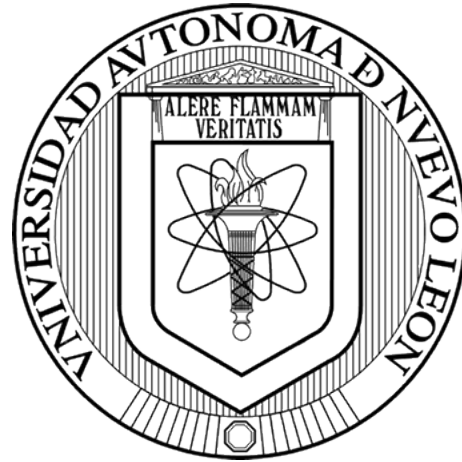


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



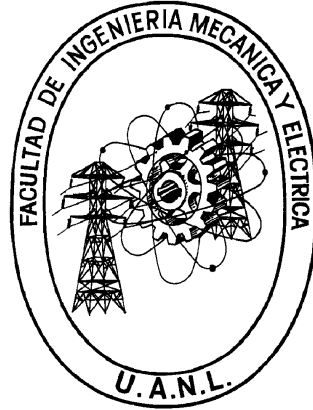
METODOLOGÍA PARA LA ESTABILIZACIÓN CUADRÁTICA
POR RETROALIMENTACIÓN DEL ESTADO CON DEPENDENCIA
PARAMÉTRICA PARA SISTEMAS LINEALES CON PARÁMETROS
VARIANTES EN EL TIEMPO

TESIS
EN OPCIÓN AL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS
DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA CON
ORIENTACIÓN EN CONTROL AUTOMÁTICO

PRESENTA
EDUARDO MARTÍNEZ ZAMBRANO

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, N. L., ENERO 2013

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



METODOLOGÍA PARA LA ESTABILIZACIÓN CUADRÁTICA
POR RETROALIMENTACIÓN DEL ESTADO CON DEPENDENCIA
PARAMÉTRICA PARA SISTEMAS LINEALES CON PARÁMETROS
VARIANTES EN EL TIEMPO

TESIS
EN OPCIÓN AL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS
DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA CON
ORIENTACIÓN EN CONTROL AUTOMÁTICO

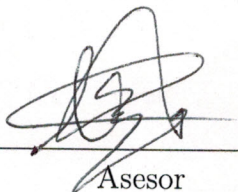
PRESENTA
EDUARDO MARTÍNEZ ZAMBRANO

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, N. L., ENERO 2013

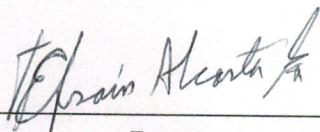
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis “METODOLOGÍA PARA LA ESTABILIZACIÓN CUADRÁTICA POR RETROALIMENTACIÓN DEL ESTADO CON DEPENDENCIA PARAMÉTRICA PARA SISTEMAS LINEALES CON PARÁMETROS VARIANTES EN EL TIEMPO” realizada por el alumno EDUARDO MARTÍNEZ ZAMBRANO, matricula 1236608 sea aceptada por su defensa como opción al grado de Maestro en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica con Orientación en Control Automático.

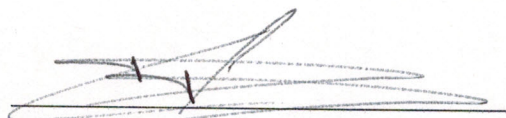
El Comité de Tesis



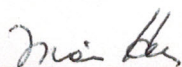
Asesor
Dr. René Galindo Orozco



Revisor:
Dr. Efraín Alcorta García



Revisor:
Dr. Daniel Ulises Campos Delgado



Vo. Bo.
Dr. Moisés Hinojosa Rivera
División de Estudios de Posgrado

Ciudad Universitaria, a Enero de 2013

Resumen

En este trabajo de tesis se propone un método alternativo para la síntesis de controladores para sistemas Lineales con Parámetros Variantes (LPV) en el tiempo que garantizan estabilidad cuadrática. El controlador depende del vector de parámetros variantes en el tiempo y se obtiene mediante la interpolación de retroalimentaciones estáticas del estado diseñadas para cada vértice. Se asume que los parámetros variantes en el tiempo son medibles, y que permanecen entre ciertas cotas finitas conocidas. Se considera dependencia paramétrica afín racional, y además, el estado se considera que está disponible. Las retroalimentaciones del estado son tales que la matriz de estado en lazo cerrado es Hurwitz e invariante en el tiempo, obteniéndose así la dinámica deseada para cualquier variación de los parámetros, esto es, que la ley de control con dependencia paramétrica logra que el sistema LPV en lazo cerrado tenga prácticamente el comportamiento dinámico de un sistema LTI estable, en este caso se garantiza Estabilidad Cuadrática (*QS*, *Quadratic Stability*) para cualquier variación en los parámetros, ya que un sistema LTI estable es *QS*.

Un factor que puede tener un efecto adverso en el desempeño de los controladores con dependencia paramétrica es la inexactitud de las mediciones, en este caso se tienen dos vectores de parámetros: el vector de parámetros reales (parámetros que tienen efecto sobre la dinámica del sistema LPV) y el vector de parámetros medidos (señales provenientes de los sensores que están disponibles para ajustar al controlador). En este trabajo de tesis se resuelven los problemas de regulación y de seguimiento a la referencia, ante diferencias entre los parámetros reales y medidos.

El método propuesto tiene la ventaja de no requerir la solución de un problema de factibilidad mediante algún método numérico, lo cual resulta más significativo al incrementarse el número de vértices. Los resultados se aplican a un sistema de dos masas, y al generador síncrono. Los resultados de simulación muestran que el desempeño del sistema en lazo cerrado corresponde prácticamente al de un sistema estable e invariante en el tiempo.

Índice de figuras

3.1. Hipercaja de dos parámetros.	15
3.2. Región en la que se encuentra $p_i(t)$	18
3.3. Sistema de dos carros.	21
3.4. Esquema de control de servosistema.	23
3.5. Variación de $m_1(t)$, (ver Apéndice E.1.3).	26
3.6. Respuesta dinámica del sistema con el controlador politópico propuesto (línea continua), Respuesta dinámica del sistema con el controlador robusto invariante (línea segmentada), en esta gráfica $w(t) = 0$, (ver Apéndice E.1).	27
3.7. Respuesta dinámica del sistema con el controlador politópico propuesto (línea continua), Respuesta dinámica del sistema con el controlador robusto invariante (línea segmentada), en esta gráfica $w(t) = 0.4 \sin(t)$, (ver Apéndice E.1).	27
3.8. Ley de control $u(t)$ del controlador politópico propuesto (línea continua), controlador robusto invariante (línea segmentada), (ver Apéndice E.1).	28
4.1. Dinámica del punto de operación (ver Apéndice E.2.1, E.2.2 y E.2.5).	32
4.2. Dinámica del sistema linealizado en un punto de operación dinámico en lazo abierto, nótese que $\delta(t)$ no regresa al punto de operación lo cual implica la presencia de un desfase persistente entre el voltaje en terminales del generador y el voltaje del bus infinito al que dicho generador esta conectado, (ver Apéndice E.2.1, E.2.2 y E.2.5).	33
4.3. Dinámica del generador sujeto a variaciones en el punto de operación, en lazo cerrado con un controlador robusto LTI, (ver Apéndice E.2.1, E.2.3 y E.2.5).	34
4.4. Dinámica del generador sujeto a las variaciones en el punto de operación que se muestran en la Figura (4.1), en lazo cerrado con un controlador politópico, (ver Apéndice E.2.1, E.2.4 y E.2.6).	36
4.5. Entrada de torque mecánico $T_{m1}(t)$ cuando el sistema linealizado opera en lazo cerrado con el controlador lineal robusto invariante en el tiempo (línea segmentada) y entrada de torque mecánico $T_{m2}(t)$ cuando sistema linealizado opera en lazo cerrado con el controlador politópico (línea continua).	37
4.6. Entrada de voltaje de campo $v_{F1}(t)$ cuando el sistema linealizado opera en lazo cerrado con el controlador lineal robusto invariante en el tiempo (línea segmentada) y entrada de voltaje de campo $v_{F2}(t)$ cuando el sistema linealizado opera en lazo cerrado con el controlador politópico (línea continua).	37

D.1. Rotor de polos no salientes en una máquina síncrona.	46
D.2. Rotor de seis polos salientes en una máquina síncrona.	46
D.3. Diagrama esquemático de un generador síncrono trifásico.	46
D.4. Circuito excitador sin escobillas con imanes permanentes en el rotor.	47
D.5. Circuito equivalente del generador síncrono.	52
D.6. Generador síncrono conectado a un bus infinito.	60
E.1. Simulación del sistema de dos carros en lazo cerrado utilizando una ley de control robusta LTI que garantiza QS.	79
E.2. Simulación del sistema de dos carros en lazo cerrado utilizando una ley de control politópica que garantiza QS.	80
E.3. Simulación en Simulink del generador síncrono en lazo cerrado con un controlador robusto LTI que garantiza QS.	96
E.4. Simulación en Simulink del generador síncrono en lazo cerrado con un controlador politópico que garantiza QS.	97

Índice general

Resumen	I
Índice de Figuras	III
Índice general	IV
1. Introducción	1
1.1. Introducción	1
1.2. Planteamiento del problema	2
1.3. Representación politópica	3
1.4. Resumen de trabajos previos	3
1.5. Objetivo general de la tesis	4
1.5.1. Objetivos particulares	4
1.6. Organización del documento	4
2. Antecedentes	6
2.1. Introducción	6
2.2. Estabilización Cuadrática de sistemas LPV	6
2.3. Conclusiones	12
3. Resultados principales	13
3.1. Introducción	13
3.2. Procedimiento de Interpolación suave de controladores LTI	13
3.3. Método alternativo para la síntesis de controladores para sistemas LPV que garantizan QS y desempeño robusto	16
3.4. Ejemplo ilustrativo: sistema de dos masas (“Two cart system”)	21
3.5. Conclusiones	28
4. Aplicación de las técnicas de control LPV en un generador síncrono	29
4.1. Introducción	29
4.2. Generador síncrono	29
4.3. Conclusiones	38
5. Conclusiones generales y trabajos futuros	39
A. El producto de Kronecker	41

B. La Ecuación de Sylvester	42
C. El complemento de Schur	43
D. El Generador Síncrono	45
D.1. Introducción	45
D.2. Modelo del generador síncrono	47
D.2.1. Ecuaciones de enlaces de flujo	48
D.2.2. Ecuaciones de voltaje	52
D.2.3. Ecuación de movimiento	55
D.2.4. Representación de las ecuaciones dinámicas del generador síncrono en por unidad	57
D.2.5. Modelo del generador síncrono conectado a un bus infinito	60
D.2.6. Linealización del modelo del generador síncrono	62
E. Archivos de Simulación	73
E.1. Sistema de Dos Carros (Two Cart System)	73
E.1.1. tcsqs_sintesis1.m	73
E.1.2. tcsqs_sintesis2.m	75
E.1.3. tcsqs1.mdl	79
E.1.4. tcsqs2.mdl	80
E.2. Generador Síncrono	81
E.2.1. datos_del_sistema.m	81
E.2.2. msqs_analisis.m	85
E.2.3. msqs_sintesis1.m	88
E.2.4. msqs_sintesis2.m	91
E.2.5. msqs1.mdl	96
E.2.6. msqs2.mdl	97
F. Publicación de resultados	99

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción

Los sistemas Lineales con Parámetros Variantes en el tiempo (LPV) son un subconjunto de los sistemas Lineales Variantes en el Tiempo (LTV). Las técnicas de control aplicables a esta clase de sistemas se basan en el Teorema de estabilidad de Lyapunov y sus resultados generalmente se presentan en forma de problemas de factibilidad de un conjunto de Desigualdades Lineales Matriciales (LMI's, Linear Matrix Inequalities). Se ha comprobado la efectividad de este enfoque en algunas aplicaciones (ver [15, 16, 18, 19]).

Los sistemas LPV se describen en variables de estado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(p(t))x(t) + B(p(t))u(t) \\ y(t) &= C(p(t))x(t) + D(p(t))u(t)\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas, $y(t) \in \mathbb{R}^s$ es el vector de salidas y $p(t) \in \mathbb{R}^q$ es un vector cuyos elementos son los parámetros variantes en el tiempo del sistema. Como se menciona en [13], desde un punto de vista práctico los sistemas LPV tienen las siguientes interpretaciones:

- Plantas lineales cuya dinámica es función de parámetros variantes en el tiempo.
- Plantas que resultan de la linealización de un sistema no lineal sobre una trayectoria variante en el tiempo.

En los dos casos anteriores, se busca garantizar QS ante variaciones en los parámetros; en caso de que $p(t)$ no pueda ser medido, una alternativa es obtener una ley de control robusta LTI mediante la solución de un problema de factibilidad; en caso de que $p(t)$ sea medible, entonces es posible utilizar las mediciones de los parámetros para ajustar la ley de control, con lo cual se puede obtener una respuesta dinámica mejor en comparación con la técnica robusta LTI.

1.2. Planteamiento del problema

Considere el sistema LPV de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(p(t))x(t) + B_1(p(t))w(t) + B_2(p(t))u(t) \\ z(t) &= C(p(t))x(t) + D_1(p(t))w(t) + D_2(p(t))u(t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas de control, $w(t) \in \mathbb{R}^v$ es el vector de entradas exógenas y $z(t) \in \mathbb{R}^s$ es el vector de salidas, se asume información completa del estado; las funciones matriciales $A(\cdot)$, $B_1(\cdot)$, $B_2(\cdot)$, $C(\cdot)$, $D_1(\cdot)$ y $D_2(\cdot)$ son funciones continuas de $p(\cdot) = [p_1(\cdot) \ p_2(\cdot) \ \cdots \ p_q(\cdot)]^T : \mathbb{R}^+ \mapsto H$ que es una función vectorial cuyos elementos son los q parámetros variantes en el tiempo siendo H una hipercaja en el espacio de parámetros donde vive dicha función, es decir, un conjunto de la forma:

$$H := [\underline{p}_1, \bar{p}_1] \times [\underline{p}_2, \bar{p}_2] \times \cdots \times [\underline{p}_q, \bar{p}_q] \quad (1.3)$$

Un concepto importante es el de vértice el cual se define como un punto de esquina de un polígono (dos dimensiones), poliedro (tres dimensiones), polítopo o hipercaja (n dimensiones) formado por la intersección de las aristas, caras o facetas del objeto. El vértice i de H se define como

$$v_{(i)} := \left\{ p_{j(i)}(t) : p_{j(i)}(t) = \underline{p}_j \oplus p_{j(i)}(t) = \bar{p}_j, \forall j = 1, 2, \dots, q \right\} \quad \forall i = 1, \dots, 2^q$$

donde \oplus denota la operación lógica de la disyunción exclusiva (o exclusiva). Se define el conjunto H^v como el conjunto de vértices de H de la siguiente manera:

$$H^v := \{v_{(1)}, v_{(2)}, \dots, v_{(2^q)}\} \quad (1.4)$$

Por ejemplo en una hipercaja de dos parámetros $H = [\underline{p}_1, \bar{p}_1] \times [\underline{p}_2, \bar{p}_2]$, el conjunto de vértices esta dado por $H^v = \left\{ \left\{ \underline{p}_2, \underline{p}_1 \right\}, \left\{ \underline{p}_2, \bar{p}_1 \right\}, \left\{ \bar{p}_2, \underline{p}_1 \right\}, \left\{ \bar{p}_2, \bar{p}_1 \right\} \right\}$. En el desarrollo de este documento se utiliza la siguiente notación para denotar las funciones evaluadas en los vértices:

$$\begin{aligned} A_{(i)} &= A(p_{(i)}) & B_{1(i)} &= B_1(p_{(i)}) & B_{2(i)} &= B_2(p_{(i)}) \\ C_{(i)} &= C(p_{(i)}) & D_{1(i)} &= D_1(p_{(i)}) & D_{2(i)} &= D_2(p_{(i)}) \end{aligned} \quad (1.5)$$

donde $p_{(i)}$ es el vector de parámetros evaluado en el vértice i , es decir

$$p_{(i)} = [p_{1(i)} \ p_{2(i)} \ \cdots \ p_{q(i)}]^T \quad \forall i = 1, \dots, 2^q \quad (1.6)$$

siendo $p_{j(i)} = \underline{p}_j \oplus \bar{p}_j, \forall j = 1, 2, \dots, q$. El objetivo es proponer una metodología práctica para la estabilización cuadrática del sistema LPV (1.2).

1.3. Representación politópica

Un concepto importante para los controladores con dependencia paramétrica es la representación politópica de sistemas LPV con dependencia afín a los parámetros (ver [22]); para ilustrar esto, considere:

$$S(p) := \begin{bmatrix} A(p) & B_1(p) & B_2(p) \\ C(p) & D_1(p) & D_2(p) \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

La dependencia temporal de $p(\cdot)$ es omitida por brevedad en la notación. Se dice que $S(p(t))$ varía dentro de un polítopo de matrices invariante; la representación politópica consiste en representar $S(p(t))$ como una combinación lineal de los 2^q vértices del polítopo, es decir:

$$S(p(t)) \in \text{convex} \{S_{(1)}, \dots, S_{(2^q)}\} := \left\{ \sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(t) S_{(i)} : \alpha_i(t) \geq 0, \sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(t) = 1 \right\} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (1.8)$$

donde

$$S_{(i)} = \begin{bmatrix} A_{(i)} & B_{1(i)} & B_{2(i)} \\ C_{(i)} & D_{1(i)} & D_{2(i)} \end{bmatrix} \quad \forall i = 1, \dots, 2^q$$

Suposición 1.1 (suposición 3.1, [22]) La función matricial $S(\cdot)$, definida en (1.7), puede representarse como el cociente entre una función matricial multiafín al vector de parámetros y una función escalar multiafín al vector de parámetros, es decir

$$S(p) = \frac{N_A(p)}{d_A(p)} = \frac{\sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(p) S_{(i)} p_{1(i)}^{k_1} p_{2(i)}^{k_2} \cdots p_{q(i)}^{k_q}}{\sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(p) p_{1(i)}^{k_1} p_{2(i)}^{k_2} \cdots p_{q(i)}^{k_q}} \quad (1.9)$$

donde k_j es 0 ó 1 $\forall j = 1, \dots, q$, $d_A \neq 0$ y $d_B \neq 0 \forall p \in H$.

1.4. Resumen de trabajos previos

En [1] se dan condiciones necesarias y suficientes para garantizar estabilidad asintótica en sistemas LPV mediante la solución de un problema de factibilidad sujeto a un número finito de LMI's.

En [3] se propone un procedimiento que simplifica el problema de estabilización cuadrática de sistemas LPV mediante una retroalimentación de estado estática utilizando la función de Lyapunov dual.

En [6] se propone un procedimiento de diseño de control por retroalimentación de salida para sistemas LPV garantizando estabilidad cuadrática y atenuación de perturbaciones para todas las trayectorias admisibles de los parámetros.

En [12] se dan condiciones necesarias y suficientes para la existencia de controladores H_∞ con dependencia paramétrica para sistemas LPV en términos de LMI's, además se expone la

idea de la presencia de incertidumbre multiplicativa de norma acotada en la medición de los parámetros.

En [13] se da una metodología para la síntesis de controladores con dependencia paramétrica que garantizan desempeño robusto, su metodología consiste en diseñar un controlador robusto H_∞ en cada vértice satisfaciendo el Lema de Cota Real (Bounded Real Lemma, ver [6] y [22]) el controlador politópico resultante se obtiene a partir de una interpolación de los controladores diseñados en cada vértice.

En [19] se da un algoritmo para el cálculo de las coordenadas politópicas del punto de operación de un sistema LPV utilizadas para definir una ley de control con dependencia paramétrica.

En este trabajo de tesis se expone un procedimiento para la estabilización cuadrática de sistemas LPV mediante una retroalimentación del estado con dependencia paramétrica, en este caso la ley de control hace que el sistema LPV en lazo cerrado tenga el comportamiento dinámico de un sistema LTI estable, además se analiza el efecto de la inexactitud en los sensores al utilizar esta técnica de control. La ventaja principal de la metodología propuesta es que no requiere la solución de un problema de factibilidad de un conjunto de LMI's, lo cual es conveniente para sistemas LPV con un cantidad grande de parámetros variantes en el tiempo.

1.5. Objetivo general de la tesis

El objetivo general de este trabajo de tesis es proponer una metodología práctica para la estabilización cuadrática de sistemas LPV mediante retroalimentación del estado con dependencia paramétrica.

1.5.1. Objetivos particulares

- Agregar a la metodología propuesta la atenuación del efecto de la entrada de perturbaciones a la salida.
- Aplicar los resultados obtenidos en el generador síncrono conectado a un bus infinito considerando variaciones en el punto de operación.
- Analizar el efecto de inexactitudes y errores dinámicos en la medición de los parámetros sobre el desempeño del controlador con dependencia paramétrica.
- Resolver los problemas de regulación y de seguimiento a la referencia en sistemas LPV, ante diferencias entre los parámetros reales y medidos.

1.6. Organización del documento

La tesis está organizada en 5 capítulos, los cuales se describen a continuación.

En el capítulo 1 se exponen los conceptos básicos referentes a los sistemas LPV, se muestran el planteamiento del problema, el resumen de trabajos previos y los objetivos del trabajo de tesis.

En el capítulo 2 se muestran algunos de los resultados más importantes aplicables a la estabilización cuadrática de sistemas LPV, tales como: la estabilización cuadrática por retroalimentación del estado con costo garantizado, la estabilización cuadrática por retroalimentación del estado con desempeño \mathcal{L}_2 , y la estabilización cuadrática por retroalimentación de salida con dependencia paramétrica.

En el capítulo 3 se muestran los resultados principales de la tesis y se aplican al sistema de dos masas (ver [7]) asumiendo variaciones acotadas en la masa m_1 . Se realiza una comparación entre el método propuesto y una técnica de control convencional en la solución del problema de seguimiento a la referencia.

En el capítulo 4 se realiza una comparación entre un controlador politópico y un controlador robusto invariante en el tiempo aplicados al modelo LPV considerado del generador síncrono.

Finalmente en el capítulo 5, se presentan las conclusiones generales de la investigación y sugerencias para trabajos futuros.

Capítulo 2

Antecedentes

2.1. Introducción

En este capítulo se muestra una breve introducción a las técnicas de estabilización cuadrática aplicables a sistemas LPV, Basándose en los trabajos de [3], [1], [9], [13].

2.2. Estabilización Cuadrática de sistemas LPV

Considere un caso particular del sistema (1.2) en la forma de

$$\dot{x}(t) = A(p)x(t) \tag{2.1}$$

En general, los valores propios no determinan estabilidad o inestabilidad en sistemas Lineales Variantes en el Tiempo (LTV), por lo tanto, la alternativa más adecuada para estudiar sistemas LPV (los cuales son un subconjunto de los LTV) es utilizar la teoría de estabilidad de Lyapunov, de la cual surgen las siguientes definiciones:

Definición 2.1 ([2], [22]). El sistema (2.1) es Cuadráticamente Estable (QS, *Quadratic Stable*) en H si y solo si existe una matriz simétrica y definida positiva $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $\forall p \in H$,

$$A^T(p)P + PA(p) < 0 \tag{2.2}$$

Definición 2.2 ([22]). El sistema (2.1) es QS mediante una Función de Lyapunov con Dependencia Paramétrica (FLDP) en H si y solo si existe una función matricial simétrica y definida positiva $P(\cdot) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $\forall p \in H$.

$$A^T(p)P(p) + P(p)A(p) + \dot{P}(p) < 0 \tag{2.3}$$

La definición 2.1 parte de una función de Lyapunov invariante en el tiempo y permite el análisis de estabilidad de sistemas LPV con dependencia paramétrica multiafín ante variaciones arbitrarias en el vector de parámetros; mientras que la definición 2.2 parte de una función

de Lyapunov con dependencia paramétrica y es útil si se conoce la tasa de variación máxima de los parámetros. A la Desigualdad Lineal Matricial (Linear Matrix Inequality, LMI) en (2.2) comúnmente se le conoce como desigualdad de Lyapunov. En general la definición 2.1 no es computacionalmente manejable ya que requiere la solución de un problema de factibilidad sujeto a un conjunto infinito de LMI's, el siguiente resultado resuelve este problema (ver Teorema A.2 [22], pág. 175).

Teorema 2.1. (Teorema de los Vértices) *Considere una función matricial $F(\cdot) : \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$,*

$$p \mapsto F(p) = \frac{N_F(p)}{d_F(p)}$$

donde $p \in H \subset \mathbb{R}^q$ siendo H una hipercaja cuyos vertices se denota por el conjunto H^v ; $N_F(\cdot) : \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$ y $d_F(\cdot) : \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}$ son funciones con dependencia multiafín de p , y $d_F(p) \neq 0$ para todo $p \in H$. entonces $F(H) > (<) 0$ si y solo si $F(H^v) > (<) 0$.

Al aplicar el Teorema 2.1 en la definición 2.1 se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 2.2 ([1]). *El sistema $\dot{x}(t) = A(p)x(t)$, donde $A(\cdot)$ satisface la suposición 1.1, es QS en H si y solo si existe una matriz simétrica y definida positiva $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que ,*

$$A_{(i)}^T P + P A_{(i)} < 0 \quad \forall i = 1, \dots, 2^q \quad (2.4)$$

El Teorema 2.2 permite determinar la estabilidad de un sistema LPV (que satisface la suposición 1.1) para todos los puntos de la hipercaja en la que opera dicho sistema tomando en cuenta unicamente los vértices, es decir que dicho resultado requiere la solución de un problema de factibilidad sujeto a un número finito de LMI's siendo este problema computacionalmente manejable. La suposición 1.1 implica dependencia paramétrica racional multiafín y es una condición necesaria para utilizar el Teorema 2.1; para ilustrar la importancia de esta condición considere una función escalar lineal $f(p) \in [\underline{f}(p), \bar{f}(p)]$ donde $p \in [\underline{p}, \bar{p}]$, en este caso es posible afirmar que $f(p) > 0 \forall p \in [\underline{p}, \bar{p}]$ si $\underline{f}(p) > 0$ y $\bar{f}(p) > 0$, de forma análoga $f(p) < 0 \forall p \in [\underline{p}, \bar{p}]$ si $\underline{f}(p) < 0$ y $\bar{f}(p) < 0$; las afirmaciones anteriores pueden extenderse a casos donde $f(p)$ sea función matricial multiafín de un cierto vector de parámetros $p \in \mathbb{R}^q$, sin embargo no son validas en caso de que $f(p)$ sea una función con dependencia paramétrica no lineal.

Para utilizar el Teorema 2.1 en la definición 2.2 es necesario primero garantizar que la LMI (2.3) sea convexa, en este caso la técnica de la envolvente politópica puede ser útil [22]. El teorema 2.1 además se utiliza en la síntesis de controladores que logran estabilización cuadrática, en este caso, debido a sus ventajas computacionales, se utiliza la llamada desigualdad de Lyapunov dual, dicha desigualdad se obtiene pre y post-multiplicando a la desigualdad de Lyapunov por $Q = P^{-1}$. Considere un caso particular del sistema LPV dado en (1.2) en la forma de,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(p)x(t) + B(p)u(t) \\ z(t) &= x(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Se asume que el sistema (2.5) satisface la suposición 1.1. Este sistema es QS si existen $P > 0$ y F tales que:

$$(A(p) + B(p)F)^T P + P (A(p) + B(p)F) < 0 \quad (2.6)$$

Sin embargo, (2.6) es una Desigualdad Bilineal Matricial (BMI, Bilinear Matrix Inequality) y los algoritmos de optimización disponibles generalmente no pueden resolver problemas de factibilidad que involucran este tipo de desigualdades. Una manera de solucionar este problema consiste en utilizar la desigualdad de Lyapunov dual, es decir

$$Q (A(p) + B(p)F)^T + (A + BF) Q < 0 \quad (2.7)$$

$$A(p)Q + QA^T(p) + V^T B^T(p) + B(p)V < 0 \quad (2.8)$$

donde $Q = P^{-1}$ y $V = FQ$, así, la desigualdad (2.8) es una LMI convexa y por lo tanto el Teorema 2.1 es aplicable. El siguiente resultado establece las condiciones que debe satisfacer el sistema (2.5) para lograr estabilización cuadrática por retroalimentación del estado.

Teorema 2.3 ([3]). *El sistema (2.5), asumiendo que satisface la suposición 1.1, es cuadráticamente estabilizable mediante retroalimentación del estado si y solo si existe una matriz simétrica y definida positiva Q y una matriz V tales que, para todo $p \in H$,*

$$A_{(i)}Q + QA_{(i)}^T + B_{(i)}V + V^T B_{(i)}^T < 0 \quad (2.9)$$

En este caso un controlador lineal por retroalimentación del estado que logra estabilización cuadrática esta dado por $u = Fx$ donde $F := VQ^{-1}$.

La siguiente definición establece las condiciones necesarias para que un sistema LPV satisfaga un criterio Lineal Cuadratico (LQ, Linear Quadratic) de la forma

$$J = \int_0^\infty x^T(t)\Pi x(t)dt \quad (2.10)$$

donde $\Pi > 0$, (ver [9] y [22]) .

Definición 2.3 ([22]). Sea P una matriz simétrica y definida positiva, Se dice que el sistema (2.1) posee un costo garantizado asociado a la matriz P con respecto al índice (2.10), si y solo $\forall p \in H$

$$A^T(p)P + PA(p) + \Pi < 0 \quad (2.11)$$

Si el sistema LPV satisface la suposición 1.1, entonces es posible aplicar el Teorema de los vértices a la LMI dada en (2.11). La definición 2.3 también puede utilizarse como criterio de diseño en la síntesis de controladores para sistemas LPV que minimizan el índice (2.10) como se muestra en el siguiente resultado que surge al agregar Π en el lado izquierdo de la desigualdad dada en (2.9) y aplicar el complemento de Schur (ver Apéndice C).

Teorema 2.4. *El sistema (2.5) es QS y posee un costo garantizado asociado a la matriz simétrica y definida positiva Q con respecto al índice (2.10), si y solo si*

$$\begin{bmatrix} A_{(i)}Q + QA_{(i)}^T + B_{(i)}V + V^T B_{(i)}^T & Q\Pi \\ \Pi Q & -\Pi \end{bmatrix} < 0 \quad i = 1, \dots, 2^a \quad (2.12)$$

en este caso, un controlador por retroalimentación del estado que minimiza el índice de costo garantizado está dado por $F = VQ^{-1}$.

Un concepto importante para las técnicas de control LPV es el desempeño \mathcal{L}_2 para sistemas LTV el cual es un concepto similar al desempeño H_∞ en sistemas LTI. Para ilustrar este concepto, considere la ley de control $u(t) = Fx(t)$ aplicada al sistema (1.2) obteniéndose el sistema en lazo cerrado

$$\dot{x}(t) = \underbrace{(A(p) + B_2(p)F)}_{A_{cl}(p)}x(t) + B_1(p)w(t) \quad (2.13)$$

$$z(t) = \underbrace{(C(p) + D_2(p)F)}_{C_{cl}(p)}x(t) + D_1(p)w(t) \quad (2.14)$$

donde se asume que la suposición 1.1 se satisface. Ahora considere una función cuadrática de Lyapunov para el sistema anterior en lazo cerrado,

$$V(x, u, w) = x^T(t)Px(t) \quad (2.15)$$

Se dice que dicho sistema es cuadráticamente estable con desempeño \mathcal{L}_2 con una cota γ si

$$\dot{V}(x, u, w) \leq \gamma^2 w^T(t)w(t) - z^T(t)z(t) < 0 \quad (2.16)$$

es posible demostrar que si (2.16) se satisface, entonces $\|\Gamma_{zw}\|_2 < \gamma$ siendo Γ_{zw} un operador lineal que relaciona la entrada $w(t)$ y la salida $z(t)$ del sistema (1.2) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \Gamma_{zw} : \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^v) &\mapsto \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^s) \\ \Gamma_{zw} : w &\mapsto z = \Gamma_{zw} w \end{aligned}$$

donde $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ es el espacio de todas las funciones vectoriales cuadráticamente integrables definidas sobre \mathbb{R}^+ y que toman valores en \mathbb{R}^n . Asumiendo que se cumple (2.16) y tomando las expresiones en lazo cerrado (2.13) y (2.14), enseguida se sustituye para $\dot{V}(x, w, z)$ obteniéndose lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, w, z) &= x^T(t) (A_{cl}^T(p)P + PA_{cl}(p)) x(t) + x^T(t)PB_1(p)w(t) + w^T(t)B_1^T(p)Px(t) \\ &< \gamma^2 w^T(t)w(t) - z^T(t)z(t) \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} &x^T(t) (A_{cl}^T(p)P + PA_{cl}(p) + C_{cl}^T(p)C_{cl}(p)) x(t) + x^T(t) (PB_1(p) + C_{cl}^T(p)D_1(p)) w(t) \\ &+ w^T(t) (B_1^T(p)P + D_1^T(p)C_{cl}(p)) x(t) + w^T(t) (D_1^T(p)D_1(p) - \gamma^2 I) w(t) < 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Podemos expresar la desigualdad dada en (2.18) de forma matricial,

$$\dot{V}(x, w, z) = \begin{bmatrix} x^T(t) & w^T(t) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} A_{cl}^T(p)P + PA_{cl}(p) + C_{cl}^T(p)C_{cl}(p) & PB_1(p) + C_{cl}^T(p)D_1(p) \\ B_1^T(p)P + D_1^T(p)C_{cl}(p) & D_1^T(p)D_1(p) - \gamma^2 I \end{bmatrix}}_{A_{BRL}} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} < 0 \quad (2.19)$$

Entonces, la condición que se debe satisfacer para la estabilización cuadrática con desempeño con desempeño \mathcal{L}_2 con una cota γ , es que deben existir una matriz simétrica $P > 0$ y un

escalar $\gamma > 0$ tales que $A_{BRL} < 0$. Notese que A_{BRL} tiene algunos productos de matrices con dependencia paramétrica y por lo tanto no se puede garantizar que sea convexa. Una forma de convexificar A_{BRL} consiste en utilizar el complemento de Schur de la siguiente manera:

$$A_{BRL} = \begin{bmatrix} A_{cl}(p)P + PA_{cl}(p) & PB_1(p) \\ B_1^T(p)P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{cl}^T(p) \\ D_1^T(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{cl}(p) & D_1(p) \end{bmatrix} < 0 \quad (2.20)$$

lo cual implica que

$$\begin{bmatrix} A_{cl}(p)P + PA_{cl}(p) & PB_1(p) & C_{cl}^T(p) \\ B_1^T(p)P & -\gamma^2 I & D_1^T(p) \\ C_{cl}(p) & D_1(p) & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.21)$$

Si existen F y P que satisfagan la BMI anterior $\forall p \in H$, entonces $u(t) = Fx(t)$ estabiliza cuadráticamente con $\|\Gamma_{zw}\|_2 < \gamma$. La desigualdad (2.21) es una BMI convexa asumiendo que

se satisface la suposición 1.1. Pre y Post-multiplicando A_{BRL} por $\begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$ donde $Q = P^{-1}$

y utilizando $V := FQ$, obtenemos la siguiente LMI:

$$\begin{bmatrix} A(p)Q + QA^T(p) + B_2(p)V + V^T B_2^T(p) & B_1(p) & QC^T(p) + V^T D_2^T(p) \\ B_1(p) & -\gamma^2 I & D_1^T(p) \\ C(p)Q + D_2(p)V & D_1(p) & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.22)$$

Es importante mencionar que en el problema de síntesis de controladores, la desigualdad matricial (2.22) tiene la ventaja de ser una LMI, mientras que la desigualdad en (2.21) es una BMI, y como se mencionó anteriormente los algoritmos de optimización disponibles, en general, no permiten la solución de problemas de factibilidad que involucran BMI's. El siguiente Teorema muestra las condiciones que deben ser satisfechas para que el sistema (1.2) sea cuadráticamente estabilizable con desempeño \mathcal{L}_2 con una cota γ por retroalimentación del estado (ver [22] y [6]).

Teorema 2.5. *El sistema (1.2) es cuadráticamente estabilizable con desempeño \mathcal{L}_2 con una cota γ por retroalimentación del estado si y solo si existe una matriz simétrica y definida positiva Q y una matriz V tales que,*

$$\begin{bmatrix} A_{(i)}Q + QA_{(i)}^T + B_{2(i)}V + V^T B_{2(i)}^T & B_{1(i)} & QC_{(i)}^T + V^T D_{2(i)}^T \\ B_{1(i)} & -\gamma^2 I & D_{1(i)}^T \\ C_{(i)}Q + D_{2(i)}V & D_{1(i)} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.23)$$

En este caso una controlador lineal por retroalimentación del estado que logra estabilización cuadrática con desempeño \mathcal{L}_2 con una cota γ está dado por $u = Fx$ donde $F = VQ^{-1}$.

También existen resultados referentes a la estabilización cuadrática de sistemas LPV mediante controladores con dependencia paramétrica. Este tipo de controladores incorpora la medición de los parámetros lo cual permite ajustarse a las variaciones en la dinámica de la planta con el objetivo de preservar estabilidad y desempeño para todas las variaciones

de parámetros. El siguiente resultado (ver [22]) permite la estabilización cuadrática de un sistema LPV en la forma de

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(p)x(t) + B(p)u(t) \\ y(t) &= C(p)x(t)\end{aligned}\tag{2.24}$$

mediante un controlador por retroalimentación de salida con dependencia paramétrica de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}_c(t) &= A_K(p)x_c(t) + B_K(p)y(t) \\ u(t) &= C_K(p)x_c(t)\end{aligned}\tag{2.25}$$

Teorema 2.6 ([22]). *El sistema (2.24), es cuadráticamente estabilizable mediante un controlador por retroalimentación de salida con dependencia paramétrica si y solo si existen matrices simétricas $Q > 0$ y $S > 0$; y funciones matriciales $\hat{C}_K(\cdot)$ y $\hat{B}_K(\cdot)$ tales que, para todo $p \in H$,*

$$A(p)Q + QA^T(p) + B(p)\hat{C}_K(p) + \hat{C}_K^T(p)B^T(p) < 0\tag{2.26}$$

$$SA(p) + A^T(p)S + \hat{B}_K(p)C(p) + C^T(p)\hat{B}_K^T(p) < 0\tag{2.27}$$

En [22] se muestra la siguiente metodología para resolver las desigualdades matriciales anteriores, considere:

$$\begin{bmatrix} Q & I \\ I & S \end{bmatrix} > 0\tag{2.28}$$

- Si la desigualdad (2.28) se satisface, sean M y N matrices no singulares tales que $MN^T = I - SQ$ y $\hat{A}_K(p) = -A^T(p)$, entonces un controlador que garantiza estabilización cuadrática es (2.25) donde

$$B_K(p) = M^{-1}(\hat{B}_K(p) - SB(p)D_K(p))\tag{2.29}$$

$$C_K(p) = (\hat{C}_K(p) - D_K(p)C(p)Q)N^{-T}\tag{2.30}$$

$$\begin{aligned}A_K(p) &= M^{-1}(\hat{A}_K(p) - SB(p)C_K(p)N^T \\ &\quad - MB_K(p)C(p)Q - S(A(p) + B(p)D_K(p)C(p))Q)N^{-T}\end{aligned}\tag{2.31}$$

- Si la desigualdad (2.28) no se satisface, entonces ajuste las matrices de la siguiente forma $Q = \lambda Q$, $S = \lambda S$, $\hat{B}_K = \lambda \hat{B}_K$ y $\hat{C}_K(p) = \lambda \hat{C}_K(p)$ donde $\lambda > 1$ hasta que se satisfaga (2.28) y evalúe al controlador.

Si el Teorema anterior se restringe al caso en el que $\hat{B}_K(p)$ y $\hat{C}_K(p)$ son constantes, entonces las LMI's (2.26) y (2.27) son convexas y el Teorema de los vértices es aplicable, por lo cual se convierten dichas condiciones en un problema de factibilidad. En la siguiente sección se dan las conclusiones del presente capítulo; en el capítulo siguiente se propone un método alternativo para lograr estabilización de sistemas LPV con dependencia paramétrica afín utilizando una retroalimentación del estado con dependencia paramétrica.

2.3. Conclusiones

En este capítulo fueron presentados los antecedentes más importantes referentes a las técnicas de control para sistemas LPV. Estas técnicas de control se basan en la teoría de estabilidad de Lyapunov y generalmente requieren la solución de un problema de factibilidad de un conjunto de LMI's. En este capítulo fue dada la definición de estabilidad cuadrática para sistemas LPV, además se exponen algunos de los resultados más importantes aplicables a dicha clase de sistemas, tales como: la estabilización cuadrática por retroalimentación del estado con costo garantizado, la estabilización cuadrática por retroalimentación del estado con desempeño \mathcal{L}_2 , y la estabilización cuadrática por retroalimentación de salida con dependencia paramétrica.

Capítulo 3

Resultados principales

3.1. Introducción

En este capítulo se presenta un método alternativo para la estabilización cuadrática de sistemas LPV por retroalimentación del estado con dependencia paramétrica. Una diferencia importante con respecto a los resultados de [1], [13], [10], [6], [22] es que el método propuesto en este trabajo de tesis para la estabilización cuadrática de sistemas LPV no requiere la solución de un problema de factibilidad; dicho método consiste básicamente en diseñar un controlador LTI estabilizante en cada vértice de manera que la característica dinámica del sistema en lazo cerrado sea la misma en todos los vértices; en este caso se obtiene una ley de control mediante la interpolación suave de dichos controladores en cada vértice de forma que la característica dinámica del sistema en lazo cerrado se preserve a pesar de las variaciones en los parámetros. Considere el sistema LPV descrito en (1.2) que por conveniencia se repite en la siguiente ecuación.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(p)x(t) + B_1(p)w(t) + B_2(p)u(t) \\ z(t) &= C(p)x(t) + D_1(p)w(t) + D_2(p)u(t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas de control, $w(t) \in \mathbb{R}^v$ es el vector de entradas exógenas y $z(t) \in \mathbb{R}^s$ es el vector de salidas; se asume información completa del estado; las funciones matriciales $A(\cdot)$, $B_1(\cdot)$, $B_2(\cdot)$, $C(\cdot)$, $D_1(\cdot)$ y $D_2(\cdot)$ son funciones continuas de $p(\cdot) = [p_1(\cdot) \ p_2(\cdot) \ \cdots \ p_q(\cdot)]^T : \mathbb{R}^+ \mapsto H$ y se pueden representar de manera politópica como se muestra en la sección 2.2. El objetivo es estabilizar cuadráticamente (3.1) con $u(t) = F(p)x(t)$;

3.2. Procedimiento de Interpolación suave de controladores LTI

En esta sección se muestra el procedimiento de interpolación suave de controladores utilizado en la síntesis de controladores politópicos. Considere,

$$S(p) := \begin{bmatrix} A(p) & B_1(p) & B_2(p) \\ C(p) & D_1(p) & D_2(p) \end{bmatrix}\tag{3.2}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
S(p) &\in \text{convex} \{S_{(1)}, \dots, S_{(2^q)}\} \\
&:= \left\{ \sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(p) S_{(i)} : \alpha_i(p) \geq 0, \sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(p) = 1 \right\} \\
&\quad \forall p \in H
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Con el objetivo de definir las componentes politópicas $\alpha_i(p) \forall i = 1, \dots, 2^q$ se propone una versión ligeramente mejorada del procedimiento de interpolación suave que se muestra en [19]. El procedimiento propuesto consiste en los siguientes pasos

- Paso 1. Asigne los vértices de $S(p)$ como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
S_{(1)} &:= S(\underline{p}_q, \underline{p}_{q-1}, \dots, \underline{p}_2, \underline{p}_1) \\
S_{(2)} &:= S(\underline{p}_q, \underline{p}_{q-1}, \dots, \underline{p}_2, \bar{p}_1) \\
S_{(3)} &:= S(\underline{p}_q, \underline{p}_{q-1}, \dots, \bar{p}_2, \underline{p}_1) \\
S_{(4)} &:= S(\underline{p}_q, \underline{p}_{q-1}, \dots, \bar{p}_2, \bar{p}_1) \\
&\vdots \\
S_{(2^{q-1})} &:= S(\bar{p}_q, \bar{p}_{q-1}, \dots, \bar{p}_2, \underline{p}_1) \\
S_{(2^q)} &:= S(\bar{p}_q, \bar{p}_{q-1}, \dots, \bar{p}_2, \bar{p}_1)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Notese que la asignación de vértices es similar a un código binario; este paso es opcional, sin embargo puede ayudar a la identificación de los vértices.

- Paso 2. Defina Γ como una medida del tamaño de la hipercaja en el espacio de parámetros,

$$\Gamma := \prod_{i=1}^q \Delta_i \tag{3.5}$$

donde $\Delta_i = \bar{p}_i - \underline{p}_i > 0, \quad \forall i = 1, \dots, q$.

Paso 3. Defina las siguientes funciones temporales,

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta}_i(t) &:= \bar{p}_i - p_i(t) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, q, \forall t \in \mathbb{R}^+ \\
\underline{\Delta}_i(t) &:= p_i(t) - \underline{p}_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, q, \forall t \in \mathbb{R}^+
\end{aligned}$$

entonces los coeficientes politópicos se definen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\alpha_1(p) &:= \frac{\overline{\Delta}_q(t)\overline{\Delta}_{q-1}(t)\cdots\overline{\Delta}_2(t)\overline{\Delta}_1(t)}{\Gamma} \\
\alpha_2(p) &:= \frac{\overline{\Delta}_q(t)\overline{\Delta}_{q-1}(t)\cdots\overline{\Delta}_2(t)\underline{\Delta}_1(t)}{\Gamma} \\
\alpha_3(p) &:= \frac{\overline{\Delta}_q(t)\overline{\Delta}_{q-1}(t)\cdots\underline{\Delta}_2(t)\overline{\Delta}_1(t)}{\Gamma} \\
\alpha_4(p) &:= \frac{\overline{\Delta}_q(t)\overline{\Delta}_{q-1}(t)\cdots\underline{\Delta}_2(t)\underline{\Delta}_1(t)}{\Gamma} \\
&\vdots \\
\alpha_{2^{q-1}}(p) &:= \frac{\underline{\Delta}_q(t)\underline{\Delta}_{q-1}(t)\cdots\underline{\Delta}_2(t)\overline{\Delta}_1(t)}{\Gamma} \\
\alpha_{2^q}(p) &:= \frac{\underline{\Delta}_q(t)\underline{\Delta}_{q-1}(t)\cdots\underline{\Delta}_2(t)\underline{\Delta}_1(t)}{\Gamma}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Es importante notar que para todo $p \in H$ existe solo un conjunto $\{\alpha_1(p), \alpha_2(p), \dots, \alpha_{2^q}(p)\}$ tal que $\sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(p) = 1$. Las componentes politópicas dadas en (3.6) pueden utilizarse para obtener una ley de control con dependencia paramétrica de la forma $u(t) = F(p)x(t)$, donde $F(p) = \sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(p)F_{(i)}$ siendo $F_{(i)}$ la matriz de ganancias de retroalimentación diseñada para el sistema evaluado en el vértice i , esto permite ajustar la ley de control utilizando las mediciones de los parámetros con el fin de preservar la estabilidad y mejorar el desempeño con el que opera el sistema en lazo cerrado. Para ilustrar de manera simple la interpolación de controladores que se utiliza, considere una hipercaja de dos parámetros, como la que se muestra en la Figura 3.1. Se supone que la hipercaja en la Figura 3.1 representa la región en donde un cierto sistema LPV en lazo cerrado con dependencia paramétrica afín opera. Cada vértice tiene una cierta ley de control y el objetivo es obtener una interpolación suave de esos controladores en cada vértice utilizando las mediciones de los parámetros.

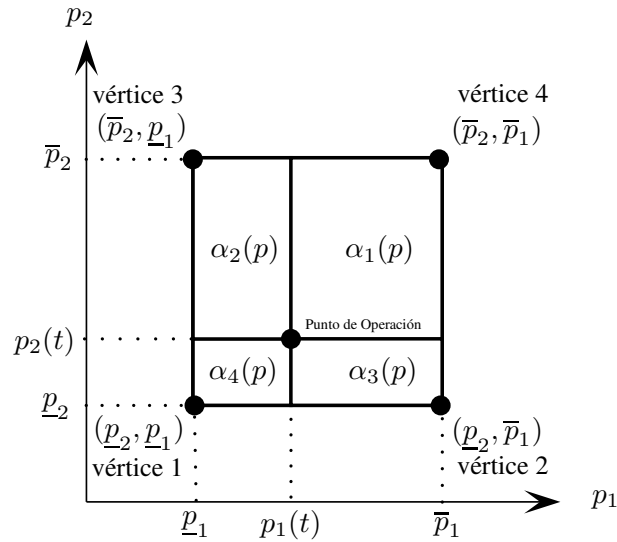


Figure 3.1: Hipercaja de dos parámetros.

Nótese que en la Figura 3.1 a medida que el punto de operación se acerca al vértice $i = 1, 2, 3, 4$, entonces la sub-región $\alpha_i(p)$ (o el coeficiente politópico del vértice i) aumenta de tamaño; por este hecho se infiere la expresión matemática de las componentes politópicas para una hipercaja de dos parámetros de la siguiente manera:

$$\alpha_1(p) := \frac{\overline{\Delta}_2(t)\overline{\Delta}_1(t)}{\Gamma} = \frac{(\overline{p}_2 - p_2(t))(\overline{p}_1 - p_1(t))}{(\overline{p}_2 - \underline{p}_2)(\overline{p}_1 - \underline{p}_1)} \quad (3.7)$$

$$\alpha_2(p) := \frac{\overline{\Delta}_2(t)\underline{\Delta}_1(t)}{\Gamma} = \frac{(\overline{p}_2 - p_2(t))(p_1(t) - \underline{p}_1)}{(\overline{p}_2 - \underline{p}_2)(\overline{p}_1 - \underline{p}_1)} \quad (3.8)$$

$$\alpha_3(p) := \frac{\underline{\Delta}_2(t)\overline{\Delta}_1(t)}{\Gamma} = \frac{(p_2(t) - \underline{p}_2)(\overline{p}_1 - p_1(t))}{(\overline{p}_2 - \underline{p}_2)(\overline{p}_1 - \underline{p}_1)} \quad (3.9)$$

$$\alpha_4(p) := \frac{\underline{\Delta}_2(t)\underline{\Delta}_1(t)}{\Gamma} = \frac{(p_2(t) - \underline{p}_2)(p_1(t) - \underline{p}_1)}{(\overline{p}_2 - \underline{p}_2)(\overline{p}_1 - \underline{p}_1)} \quad (3.10)$$

En este caso, la ley de control obtenida mediante la interpolación de controladores por retroalimentación del estado en cada vértice esta dada por:

$$u(t) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i(p)F_{(i)}x(t) = (\alpha_1(p)F_{(1)} + \alpha_2(p)F_{(2)} + \alpha_3(p)F_{(3)} + \alpha_4(p)F_{(4)})x(t) \quad (3.11)$$

Es interesante notar que las funciones $\alpha_i(p)$ $i = 1, 2, 3, 4$, satisfacen las siguientes condiciones

$$\alpha_1(p) > (=)(<)\alpha_2(p) \iff \alpha_3(p) > (=)(<)\alpha_4(p) \quad (3.12)$$

$$\alpha_1(p) > (=)(<)\alpha_3(p) \iff \alpha_2(p) > (=)(<)\alpha_4(p) \quad (3.13)$$

por lo cual se demuestra la congruencia geométrica del punto de operación en la Figura 3.1. En la siguiente sección se muestran los resultados principales de la tesis referentes a la estabilización cuadrática de sistemas LPV.

3.3. Método alternativo para la síntesis de controladores para sistemas LPV que garantizan QS y desempeño robusto

En esta sección se muestra el resultado obtenido en esta tesis referente a la estabilización cuadrática de sistemas LPV por retroalimentación del estado con dependencia paramétrica. Considere la desigualdad de Lyapunov dada en (2.2) para un sistema en lazo cerrado añadiendo una función matricial definida positiva $M(p) > 0$, tal que,

$$\underbrace{A_{cl}^T(p)P + PA_{cl}(p)}_{L_{cl}(p)} + M(p) = 0 \quad (3.14)$$

donde $A_{cl}(p) = A(p) + B(p)F(p)$. Si existe $F(p)$ tal que $A_{cl}(p)$ sea una función matricial invariante Hurwitz, entonces $L_{cl}(p)$ se convierte en \overline{L}_{cl} la cual es invariante en el tiempo,

entonces podemos escribir

$$L_{cl}(p) + M(p) = \underbrace{\bar{A}_{cl}^T P + P \bar{A}_{cl}}_{\bar{L}_{cl}} + \underline{M} = 0 \quad (3.15)$$

Así, de la teoría de ecuaciones matriciales de Sylvester, existe una matriz simétrica $P > 0$ para todo $\underline{M} > 0$ si y solo si \bar{A}_{cl} es una matriz Hurwitz invariante en el tiempo.

En conclusión la idea básica consiste en hacer que el sistema LPV en lazo cerrado tenga un comportamiento dinámico similar al de un sistema LTI. Es importante mencionar que esta técnica de control requiere controlabilidad completa del estado para todo $p \in H$, además otro factor importante en los controladores con dependencia paramétrica es la presencia de errores e incertidumbre en la medición de los parámetros. Para analizar este caso se introducen los vectores $p_r(t) = [p_{r1}(t) \ p_{r2}(t) \ \cdots \ p_{rq}(t)]^T$ y $p_m(t) = [p_{m1}(t) \ p_{m2}(t) \ \cdots \ p_{mq}(t)]^T$ los cuales son el vector de parámetros reales (valores reales acotados de los parámetros) y el vector de parámetros medidos (señales provenientes de los sensores) respectivamente. Los elementos de p_m (omitiendo la dependencia temporal por simplicidad en la notación) cuyos elementos son las señales provenientes de los sensores y son la única información de la que se dispone para determinar la ley de control $u(t) = F(p_m)x(t)$. En este caso, se tiene,

$$A_{cl}(p_r, p_m) = A(p_r) + B(p_r)F(p_m) \quad (3.16)$$

Los elementos de p_r y p_m están asociados por el siguiente modelo multiplicativo,

$$p_{ri}(t) = (1 + \psi_i(t))p_{mi}(t) \quad i = 1, \dots, q \quad (3.17)$$

donde $\psi_i(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow [\underline{\psi}_i, \bar{\psi}_i] \in \mathbb{R}$, es el error relativo dinámico en la medición del i -ésimo parámetro y se define como

$$\psi_i(t) = \frac{p_{ri}(t) - p_{mi}(t)}{p_{mi}(t)} \quad (3.18)$$

siendo $\underline{\psi}_i < 0$ y $\bar{\psi}_i > 0$ las cotas inferior y superior (respectivamente) de la función de error relativo dinámico,

$$\underline{\psi}_i = \inf_t \{\psi_i(t)\} \quad (3.19)$$

$$\bar{\psi}_i = \sup_t \{\psi_i(t)\} \quad (3.20)$$

Se asume que las cotas de las componentes de p_r son conocidas; así, a partir de (3.18) las cotas de las componentes de p_m se definen de la siguiente manera:

$$\underline{p}_{mi} := \frac{\underline{p}_{ri}}{1 + \underline{\psi}_i} \quad (3.21)$$

$$\bar{p}_{mi} := \frac{\bar{p}_{ri}}{1 + \bar{\psi}_i} \quad (3.22)$$

donde la variable de indexación i denota el número del parámetro. A continuación se definen las hipercajas H_r y H_m las cuales delimitan al vector de parámetros reales y al vector de parámetros medidos respectivamente:

$$H_r := [\underline{p}_{r1}, \bar{p}_{r1}] \times [\underline{p}_{r2}, \bar{p}_{r2}] \times \cdots \times [\underline{p}_{rq}, \bar{p}_{rq}] \quad (3.23)$$

$$H_m := [\underline{p}_{m1}, \bar{p}_{m1}] \times [\underline{p}_{m2}, \bar{p}_{m2}] \times \cdots \times [\underline{p}_{mq}, \bar{p}_{mq}] \quad (3.24)$$

donde $H_r \subset H_m$. Para justificar lo anterior considere la Figura 3.2, nótese que \underline{p}_{mi} es el valor menor que debido a inexactitudes y errores dinámicos en la medición de $p_i(t)$ puede asociarse a \underline{p}_{ri} , de manera similar, \bar{p}_{mi} es el valor mayor que puede asociarse a \bar{p}_{ri} .

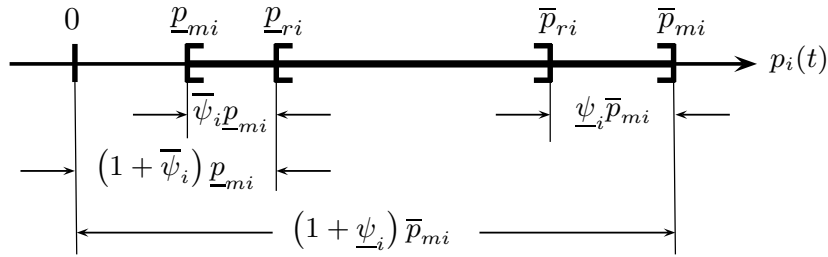


Figure 3.2: Región en la que se encuentra $p_i(t)$.

La función de Lyapunov para el proceso real es,

$$L_{cl}(p_r, p_m) + M(p_r, p_m) = A_{cl}^T(p_r, p_m)P + PA_{cl}(p_r, p_m) + M(p_r, p_m) = 0 \quad (3.25)$$

Si $A(p)$ y $B(p)$ son funciones con dependencia paramétrica afín y/o racional, entonces, la función matricial $A_{cl}(p_r, p_m)$ puede descomponerse directamente en una componente sin error en las mediciones y otra componente con error en las mediciones:

$$\begin{aligned} A_{cl}(p_r, p_m) &= \underbrace{\bar{A}(p_m) + \tilde{A}(p_m, \psi)}_{A(p_r)} + \underbrace{(\bar{B}(p_m) + \tilde{B}(p_m, \psi))}_{B(p_r)} F(p_m) \\ &= \bar{A}_{cl}(p_m) + \tilde{A}_{cl}(p_m, \psi) \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde $\bar{A}_{cl}(p_m) = \bar{A}(p_m) + \bar{B}(p_m)F(p_m)$ y $\tilde{A}_{cl}(p_m, \psi) = \tilde{A}(p_m, \psi) + \tilde{B}(p_m, \psi)F(p_m)$ son la componente sin error en las mediciones y la componente con error en las mediciones de $A_{cl}(p_r, p_m)$ respectivamente y $\psi = [\psi_1(t) \ \psi_2(t) \ \cdots \ \psi_q(t)]^T$. Así podemos escribir,

$$L_{cl}(p_m, \psi) + M(p_m, \psi) = \left(\bar{A}_{cl}(p_m) + \tilde{A}_{cl}(p_m, \psi) \right)^T P + P \left(\bar{A}_{cl}(p_m) + \tilde{A}_{cl}(p_m, \psi) \right) + M(p_m, \psi) = 0 \quad (3.27)$$

Suponiendo que los errores dinámicos en los sensores causan variaciones acotadas en $A_{cl}(p_r, p_m)$ y asumiendo que dichas variaciones son pequeñas en comparación con la componente invariante de $A_{cl}(p_r, p_m)$, esto es, pequeños en comparación con $\bar{A}_{cl}(p_m)$; se propone encontrar una cota de la función matricial $\tilde{A}_{cl}(p_m, \psi)$, sin embargo, dicha función matricial en

general no es simétrica. En [4] y [5] se muestra que una matriz no simétrica X es definida positiva si su parte hermitiana $X_H := \frac{1}{2}(X + X^H)$ es definida positiva; En este caso se propone encontrar un escalar positivo $\eta \in \mathbb{R}$ tal que $\eta I - \frac{1}{2} \left(\tilde{A}_{cl}(p_{m(i)}, \psi_{(j)}) + \tilde{A}_{cl}^T(p_{m(i)}, \psi_{(j)}) \right) \geq 0 \forall i, j = 1, \dots, 2^q$ con el objetivo de encontrar una cota superior de $\tilde{A}_{cl}(p_m, \psi)$ a partir de las cotas de las funciones del error relativo dinámico en las mediciones; entonces se puede escribir una cota superior de $L_{cl}(p_m, \psi)$ de la siguiente manera

$$\underbrace{(\bar{A}_{cl}(p_m) + \eta I_n)^T P + P (\bar{A}_{cl}(p_m) + \eta I_n)}_{\bar{L}_{cl}} + \underline{M} = 0 \quad (3.28)$$

Basándose en las ideas anteriores, el siguiente resultado proporciona condiciones suficientes para garantizar QS por retroalimentación del estado del sistema (3.1) asumiendo error dinámico en las mediciones.

Lema 3.1. *El sistema LPV dado por (3.1), donde $A(p_r)$ y $B(p_r)$ tienen dependencia paramétrica afín, es cuadráticamente estabilizable mediante la retroalimentación del estado con dependencia paramétrica,*

$$u(t) = F(p_m)x(t) \quad (3.29)$$

donde $F(p_m) = \sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(p_m)F_{(i)}$, si $F_{(i)}$ es tal que $A_{(i)} + \eta I_n + B_{(i)}F_{(i)}$ es una matriz Hurwitz y es igual para todo $i = 1, \dots, 2^q$ donde η es un escalar real positivo tal que $\eta I_n - \frac{1}{2} \left(\tilde{A}_{cl}(p_r, p_m) + \tilde{A}_{cl}^T(p_r, p_m) \right) \geq 0 \forall p_r, p_m \in H$.

Demostración. Si $A_{(i)} + \eta I_n + B_{(i)}F_{(i)}$ es una matriz Hurwitz igual en todos los vértices, entonces, $u(t) = F(p_m)x(t)$ hace que $\bar{A}_{cl}(p_m)$ sea una matriz Hurwitz invariante en el tiempo, sin embargo en general, debido a errores en las mediciones, puede haber ligeras variaciones en $A_{cl}(p_r, p_m)$, esta función matricial puede descomponerse en una parte invariante en el tiempo y en una parte variante en el tiempo como se muestra en (3.26), donde $\eta I_n - \frac{1}{2} \left(\tilde{A}_{cl}(p_{m(i)}, \psi_{(j)}) + \tilde{A}_{cl}^T(p_{m(i)}, \psi_{(j)}) \right) \geq 0$, entonces

$$\|A_{cl}(p_r, p_m)\|_2 < \|\bar{\bar{A}}_{cl}(p_m)\|_2 \quad (3.30)$$

donde $\bar{\bar{A}}_{cl}(p_m) = \bar{A}_{cl}(p_m) + \eta I_n$, así la ecuación matricial (3.28) puede escribirse como:

$$\bar{L}_{cl} + \underline{M} = \bar{\bar{A}}_{cl}^T P + P \bar{\bar{A}}_{cl} + \underline{M} = 0 \quad (3.31)$$

donde de la representación politópica de sistemas LPV dada por (1.7) y (1.8) se tiene que

$$\bar{\bar{A}}_{cl}(p_m) = \bar{A}_{cl}(p_m) + \eta I_n = \sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(p_m) (A_{(i)} + B_{(i)}F_{(i)}) + \eta I_n \quad (3.32)$$

Por hipótesis $F_{(i)}$ es tal que $A_{(i)} + B_{(i)}F_{(i)}$ es igual para todo $i = 1, \dots, 2^q$, entonces

$$\bar{\bar{A}}_{cl} = A_{(i)} + \eta I_n + B_{(i)}F_{(i)}$$

De la teoría de ecuaciones matriciales de Lyapunov se tiene que existe una matriz simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ para toda matriz simétrica definida positiva $\underline{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $\overline{\overline{A}}_{cl}^T P + P \overline{\overline{A}}_{cl} < 0$ si y solo si $\overline{\overline{A}}_{cl}$ es una matriz Hurwitz (ver Apéndice B y Teorema 1.2 pág. 6 [11]). \square

La metodología propuesta para la estabilización cuadrática de sistemas LPV basada en el Lema 3.1 consiste en los siguientes pasos:

- **Paso 1.** Descomponer las funciones matriciales en la componente sin error y la componente con error de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A(p_r) &= \overline{A}(p_m) + \tilde{A}(p_m, \psi) \\ B(p_r) &= \overline{B}(p_m) + \tilde{B}(p_m, \psi) \end{aligned}$$

- **Paso 2.** Calcule las cotas inferiores y superiores del vector de parámetros medidos a partir de (3.21) y (3.22).
- **Paso 3.** Diseñar un controlador por retroalimentación del estado en cada vértice de H_m tal que la matriz de estado en lazo cerrado sea Hurwitz e igual en todos los vértices.
- **Paso 4.** Calcule η tal que $\eta I_n - \frac{1}{2} \left(\tilde{A}_{cl}(p_{m(i)}, \psi_{(j)}) + \tilde{A}_{cl}^T(p_{m(i)}, \psi_{(j)}) \right) \geq 0 \forall i, j = 1, \dots, q$. En caso de que el error en la medición de los parámetros sea despreciable, es posible omitir este paso y considerar $\eta = 0$.
- **Paso 5.** De acuerdo con el Lema 3.1 si $A_{(i)} + \eta I_n + B_{(i)} F_{(i)}$ es Hurwitz y es igual en todos los vértices entonces la ley de control que estabiliza cuadráticamente al sistema LPV se obtiene mediante la interpolación de los controladores diseñados en cada vértice utilizando el procedimiento de interpolación de controladores LTI dado en la sección 3.2. En caso de que el Lema 3.1 no se satisfaga, regrese al paso 3 y vuelva a diseñar el controlador.

La ventaja principal de utilizar la metodología anterior en la síntesis de controlador que garantiza estabilidad cuadrática es que no requiere la solución de un problema de factibilidad; otra ventaja importante es que esta metodología permite el uso de las técnicas de diseño aplicables a sistemas LTI en los sistemas LPV, por lo que es posible satisfacer ciertas especificaciones de diseño en la respuesta dinámica del sistema LPV en lazo cerrado tales como el tiempo de estabilización, tiempo pico, máximo sobrepaso, etc.

Observación 3.1. Considere el sistema LPV en la forma de

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0_{n-m \times n-m} & I_{n-m \times m} \\ A_1(p) & A_2(p) \end{bmatrix}}_{A(p)} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0_{n-m \times m} \\ B_1(p) \end{bmatrix}}_{B(p)} u(t) \quad (3.33)$$

donde $A_1(p) \in \mathbb{R}^{m \times n-m}$, $A_2(p) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y $B_1(p) \in \mathbb{R}^{m \times m}$. En este caso, el Lema 3.1 es aplicable si y solo si $B_1(p)$ es invertible $\forall p \in H$, ya que, existe $u(t) = F(p)x(t)$, donde, $F(p) = [F_1(p) \ F_2(p)]$, tal que,

$$A_{cl}(p) = \begin{bmatrix} 0_{n-m \times n-m} & I_{n-m \times m} \\ A_{cl d1} & A_{cl d2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n-m \times n-m} & I_{n-m \times m} \\ A_1(p) & A_2(p) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n-m \times m} \\ B_1(p) \end{bmatrix} [F_1(p) \ F_2(p)], \quad (3.34)$$

sea una función matricial invariante en el tiempo Hurwitz con la dinámica deseada (nótese que $A_{cl d1}$ y $A_{cl d2}$ son matrices constantes); en este caso,

$$F_1(p) = B_1^{-1}(p) (A_{cl d1} - A_1(p)) \quad (3.35)$$

$$F_2(p) = B_1^{-1}(p) (A_{cl d2} - A_2(p)) \quad (3.36)$$

En la siguiente sección se muestra un ejemplo ilustrativo en donde se aplica la metodología propuesta de estabilización cuadrática.

3.4. Ejemplo ilustrativo: sistema de dos masas (“Two cart system”)

Considere el sistema de dos masas (ver [7]) que se muestra en la Figura 3.3 cuyo modelo en variables de estado está dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k/m_2 & k/m_2 & -b/m_2 & b/m_2 \\ k/m_1(t) & -k/m_1(t) & b/m_1(t) & -b/m_1(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/m_1(t) \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m_2 \\ 0 \end{bmatrix} w(t) \quad (3.37)$$

$$y(t) = x_2(t)$$

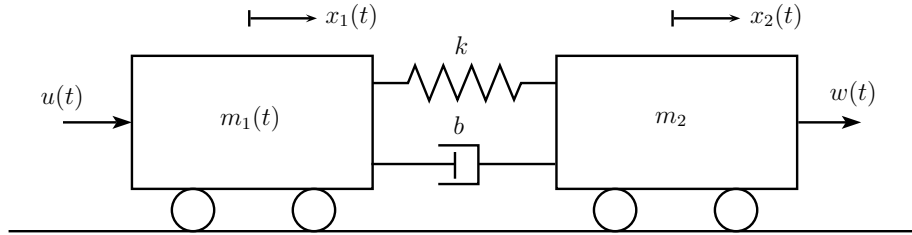


Figura 3.3: Sistema de dos carros.

donde $m_1(t) = p_r(t) \in [1, 1.5]$ Kg, $m_2 = 2$ Kg, $k = 1$ N s/m y $b = 1$ N/m; $u(t)$ es una entrada de control mientras que $w(t)$ es una entrada de perturbación. Se asume información

completa del estado, el objetivo es estabilizar cuadráticamente por retroalimentación del estado, considere que $\psi \in [-0.05, 0.05]$. Siguiendo la metodología propuesta se tiene lo siguiente:

Paso 1. Descomponer las funciones matriciales en la componente sin error y la componente con error; nótese que en este caso existe dependencia paramétrica racional, entonces,

$$\frac{1}{p_r(t)} = \frac{1}{(1 + \psi(t)) p_m(t)} = \left(1 + \widehat{\psi}(t)\right) \frac{1}{p_m(t)} \quad (3.38)$$

donde $\widehat{\psi}(t) = \frac{-\psi(t)}{1+\psi(t)} \in \left[-\frac{1}{21}, \frac{1}{19}\right]$. Entonces se tiene,

$$A(p_r) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k/m_2 & k/m_2 & -b/m_2 & b/m_2 \\ k/p_m & -k/p_m & b/p_m & -b/p_m \end{bmatrix}}_{\bar{A}(p_m)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \widehat{\psi}k/p_m & -\widehat{\psi}k/p_m & \widehat{\psi}b/p_m & -\widehat{\psi}b/p_m \end{bmatrix}}_{\tilde{A}(p_m, \widehat{\psi})} \quad (3.39)$$

$$B_2(p_r) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/p_m \end{bmatrix}}_{\bar{B}_2(p_m)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \widehat{\psi}/p_m \end{bmatrix}}_{\tilde{B}_2(p_m, \widehat{\psi})} \quad (3.40)$$

Paso 2. Calcule las cotas inferiores y superiores del vector de parámetros medidos a partir de (3.21) y (3.22).

$$\underline{p}_m = \frac{\underline{p}_r}{1 + \underline{\psi}_1} = \frac{1}{1 + 0.05} = \frac{20}{21} \quad (3.41)$$

$$\bar{p}_m = \frac{\bar{p}_r}{1 + \bar{\psi}_1} = \frac{1.5}{1 - 0.05} = \frac{30}{19} \quad (3.42)$$

Nótese que $[\underline{p}_r, \bar{p}_r] \subset [\underline{p}_m, \bar{p}_m]$, es decir, $H_r \subset H_m$.

Paso 3. Diseñe un controlador por retroalimentación del estado en cada vértice de H_m tal que la matriz de estado en lazo cerrado sea igual en todos los vértices.

Se realiza la siguiente asignación de vértices

$$\begin{aligned} S_{(1)} &:= S(\underline{p}_{m1}) = [A_{(1)} \quad B_{(1)}] \\ S_{(2)} &:= S(\bar{p}_{m1}) = [A_{(2)} \quad B_{(2)}] \end{aligned} \quad (3.43)$$

donde

$$\begin{aligned} A_{(1)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 11/10 & -11/10 & 11/10 & -11/10 \end{bmatrix} & B_{2(1)} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 11/10 \end{bmatrix} \\ A_{(2)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 3/5 & -3/5 & 3/5 & -3/5 \end{bmatrix} & B_{2(2)} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3/5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

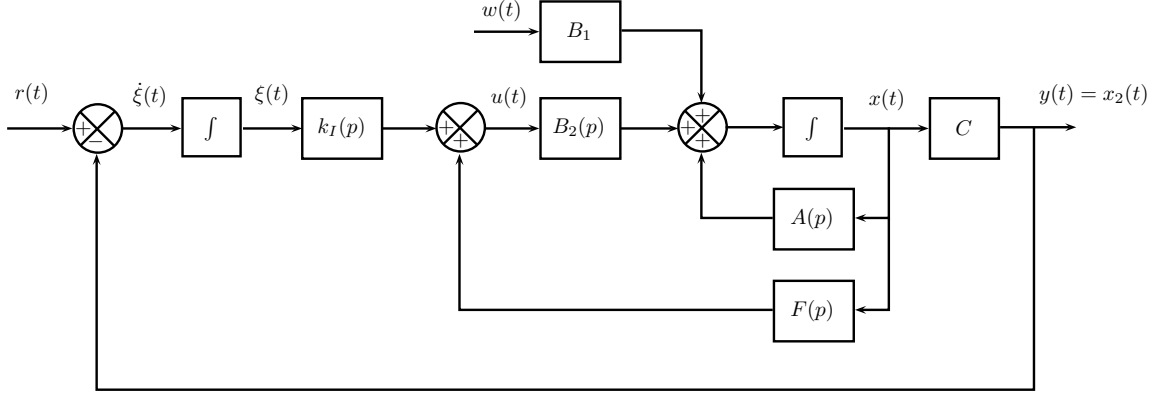


Figure 3.4: Esquema de control de servosistema.

Con el objetivo de garantizar seguimiento para la posición de la masa 2, se utiliza el esquema de control de servosistema donde la planta no tiene un integrador (ver [23], [17]), el diagrama de bloques se muestra en la Figura 3.4. A partir de dicho diagrama de bloques se obtiene,

$$\dot{x}(t) = A(p)x(t) + B_2(p)u(t) + B_1w(t) \quad (3.44)$$

$$y(t) = Cx(t) = x_2(t) \quad (3.45)$$

$$u(t) = F(p)x(t) + k_I(p)\xi(t) \quad (3.46)$$

$$\dot{\xi}(t) = r(t) - y(t) = r(t) - Cx(t) \quad (3.47)$$

donde $r(t)$ es la entrada de referencia y $\xi(t)$ es la integral del error. Supóngase que la entrada de referencia es una función escalón y se aplica en $t = 0$. En este caso para $t > 0$, la dinámica del sistema completo se describe mediante la siguiente ecuación que es una combinación de (3.44) y (3.47):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(p) & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2(p) \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} B_1(p) \\ 0 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \quad (3.48)$$

Asumiendo que (3.48) es cuadráticamente estabilizado por cierta ley de control, entonces $x(\infty)$, $\xi(\infty)$ y $u(\infty)$ tenderán respectivamente a valores constantes. Así en estado estacionario, $\xi(t) = 0$ y $y(\infty) = r(t) = r$. El sistema (3.48) en estado estacionario es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(\infty) \\ \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(p) & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\infty) \\ \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2(p) \\ 0 \end{bmatrix} u(\infty) + \begin{bmatrix} B_1(p) \\ 0 \end{bmatrix} w(\infty) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(\infty) \quad (3.49)$$

La ecuación del error en estado estacionario se obtiene al restar la ecuación (3.49) de la ecuación (3.48), resultando

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e(t) \\ \dot{\xi}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(p) & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2(p) \\ 0 \end{bmatrix} u_e(t) + \begin{bmatrix} B_1(p) \\ 0 \end{bmatrix} w_e(t) \quad (3.50)$$

donde $x_e(t) = x(t) - x(\infty)$, $\xi_e = \xi(t) - \xi(\infty)$, $u_e(t) = u(t) - u(\infty) = F(p)x_e(t) + k_I(p)\xi_e(t)$ y $w_e(t) = d(t) - d(\infty)$. Se define un vector de error $e(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$e(t) = \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

La ecuación (3.50) se puede escribir entonces como:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \hat{A}(p)e(t) + \hat{B}_2(p)u_e(t) + \hat{B}_1(p)w_e(t) \\ z(t) &= e(t) \end{aligned} \quad (3.52)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{A}(p) &= \begin{bmatrix} A(p) & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, & \hat{B}_2(p) &= \begin{bmatrix} B_2(p) \\ 0 \end{bmatrix}, & \hat{B}_1(p) &= \begin{bmatrix} B_1(p) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ u_e(t) &= \underbrace{[F(p) \ ; \ k_I(p)]}_{K(p)} e(t) \end{aligned} \quad (3.53)$$

Entonces, la ecuación de estado del error se escribe como

$$\dot{e}(t) = \underbrace{(\hat{A}(p) + \hat{B}_2(p)K(p))}_{\hat{A}_{cl}(p)} e(t) + \hat{B}_1 w_e(t) \quad (3.54)$$

El sistema LPV logra seguimiento si $\hat{A}_{cl}(p)$ es QS $\forall p \in H$. Entonces, calculamos $K_{(i)}$ tales que los valores propios de $\hat{A}_{cl(i)} = \hat{A}_{(i)} + \hat{B}_{(i)}K_{(i)}$ sean $J = [-1.8, -1.8, -2, -2, -2]$ para $i = 1, 2$.

$$\begin{aligned} K_{(1)} &= [-23.8667 \quad -6.6788 \quad -16.6303 \quad -5.8182 \quad 15.7091] \\ K_{(2)} &= [-41.2556 \quad -14.7444 \quad -28.8222 \quad -12.3333 \quad 28.8000] \end{aligned}$$

Con el objetivo de probar el desempeño robusto del sistema en lazo cerrado se resolvió el problema de factibilidad con las siguientes restricciones

$$\begin{aligned} Q &> 0 \\ \min \gamma &> 0 \\ \begin{bmatrix} \hat{A}_{cl(i)}Q + Q\hat{A}_{cl(i)}^T & \hat{B}_{1(i)} & Q\hat{C}^T \\ \hat{B}_{1(i)}^T & -\gamma^2 & 0 \\ \hat{C}Q & 0 & -I \end{bmatrix} &< 0 \quad i = 1, \dots, 2^q \end{aligned} \quad (3.55)$$

Con la ayuda de YALMIP (Toolbox de optimización de MATLAB [21]) se obtuvo,

$$Q = \begin{bmatrix} 0.3203 & 0.0299 & -0.2348 & -0.0504 & 0.2105 \\ 0.0299 & 0.3795 & -0.0522 & -0.2621 & 0.0577 \\ -0.2348 & -0.0522 & 0.6089 & -0.2346 & 0.0703 \\ -0.0504 & -0.2621 & -0.2346 & 1.0777 & -0.0103 \\ 0.2105 & 0.0577 & 0.0703 & -0.0103 & 0.3754 \end{bmatrix} > 0$$

$\gamma = 1.5934$

En este caso $\|\Gamma_{zw}\|_2 < 1.5934$, donde Γ_{zw} es un operador asociado al efecto de las entradas de perturbación a la salida. El sistema es más robusto ante las entradas de perturbación a medida que γ sea más pequeña. Para analizar el efecto de la inexactitud en los sensores realizamos lo siguiente,

$$\begin{aligned}\hat{A}_{cl}(p) &= \hat{A}_{cl}(p_m, p_r) = \hat{A}(p_r) + \hat{B}(p_r)K(p_m) \\ &= \bar{\hat{A}}_{cl}(p_m) + \tilde{\hat{A}}_{cl}(p_m, \psi)\end{aligned}\quad (3.56)$$

donde

$$\bar{\hat{A}}_{cl}(p_m) = \begin{bmatrix} \bar{A}(p_m) + \bar{B}_2(p_m)F(p_m) & \bar{B}_2(p_m)k_I(p_m) \\ -C & 0 \end{bmatrix}\quad (3.57)$$

$$\tilde{\hat{A}}_{cl}(p_m, \hat{\psi}) = \begin{bmatrix} \tilde{A}(p_m, \hat{\psi}) + \tilde{B}_2(p_m, \hat{\psi})F(p_m) & \tilde{B}_2(p_m, \hat{\psi})k_I(p_m) \\ -C & 0 \end{bmatrix}\quad (3.58)$$

Paso 4. Calcule η tal que

$$\eta I - \frac{1}{2} \left(\tilde{\hat{A}}_{cl}(p_{m(i)}, \hat{\psi}_{(j)}) + \tilde{\hat{A}}_{cl}^T(p_{m(i)}, \hat{\psi}_{(j)}) \right) \geq 0 \quad i, j = 1, 2 \quad (3.59)$$

donde $p_{m(1)} = \frac{20}{21}$, $p_{m(2)} = \frac{30}{19}$, $\hat{\psi}_{(1)} = \frac{-1}{21}$ y $\hat{\psi}_{(2)} = \frac{1}{19}$. Utilizando YALMIP, encontramos que $\eta = 1.2225$ satisface (3.59).

Paso 5. De acuerdo con el Lema 3.1 si $A_{(i)} + \eta I_n + B_{(i)}F_{(i)}$ es Hurwitz y es igual en todos los vértices entonces la ley de control que estabiliza cuadráticamente al sistema LPV se obtiene mediante la interpolación de los controladores diseñados en cada vértice utilizando el procedimiento de interpolación de controladores LTI dado en la sección 3.2. En este caso $\hat{A}_{cl}(p_m) + \eta I$ es una matriz Hurwitz y es igual para todo $i = 1, \dots, 2^q$ lo cual indica que se satisfacen las condiciones del Lema 3.1 y por lo tanto $u(t) = F(p_m)x(t) + k_I(p_m)\xi(t)$ donde $F(p_m) = \sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(p_m)F_{(i)}$, $k_I(p_m) = \sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(p_m)k_{I(i)}$, $K_{(i)} = [F_{(i)} \ : \ k_{I(i)}]$, $i = 1, 2$, garantiza estabilización cuadrática para todo $p_r, p_m \in H_m$. Otra alternativa consiste en encontrar una matriz simétrica, definida positiva $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y una matriz $V \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tales que para algún $m \in \mathbb{R}^+$ y $\gamma > 0$,

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_{(i)}Q + Q\hat{A}_{(i)}^T + \hat{B}_{2(i)}V + V^T\hat{B}_{2(i)}^T + mI_{n+1} & \hat{B}_{1(i)} & Q\hat{C}^T \\ & \hat{B}_{1(i)}^T & -\gamma^2 I & 0 \\ & \hat{C}Q & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad i = 1, \dots, 2^q \quad (3.60)$$

entonces $K = VQ^{-1} = [F \ : \ k_I]$ garantiza QS con desempeño robusto $\|\Gamma_{zw}\|_2 < \gamma$ para todo $p_r \in H_r$. En este caso podemos considerar los vértices dados en (3.43) ya que $p_r \in H_r \subset H_m$, esto genera una ley de control ligeramente más conservativa. El conjunto de LMI's dado en (3.60) para el sistema considerado es resuelto en YALMIP para $m = 1$ y $Q > I_n$ resultando,

$$F = [-14.9824 \quad -8.2833 \quad -12.4465 \quad -6.0531]$$

$$k_I = 10.3364$$

$$\gamma = 1.2623$$

En el Apéndice E.1 se encuentran los archivos de MATLAB y Simulink necesarios para la simulación del sistema considerado en lazo cerrado utilizando los controladores diseñados. En la Figura 3.5 se muestra la variación propuesta para la masa m_1 , en la Figura 3.6 se muestra la dinámica de $x_2(t)$ ante una entrada escalón unitario considerando $w(t) = 0$, en la Figura 3.7 se muestra la dinámica de $x_2(t)$ ante una entrada escalón unitario considerando $w(t) = 0.4 \sin(t)$; en la Figura 3.8 se muestra la ley de control de los controladores diseñados; en general ambas técnicas pueden lograr una buena respuesta dinámica dependiendo de los parámetros de la elección de los parámetros de diseño (la ubicación de los valores propios en el caso de la técnica propuesta y las restricciones sobre Q y m en el caso del controlador lineal robusto invariante en el tiempo), sin embargo la ventaja principal de la técnica propuesta es que en principio no requiere la solución de un problema de factibilidad.

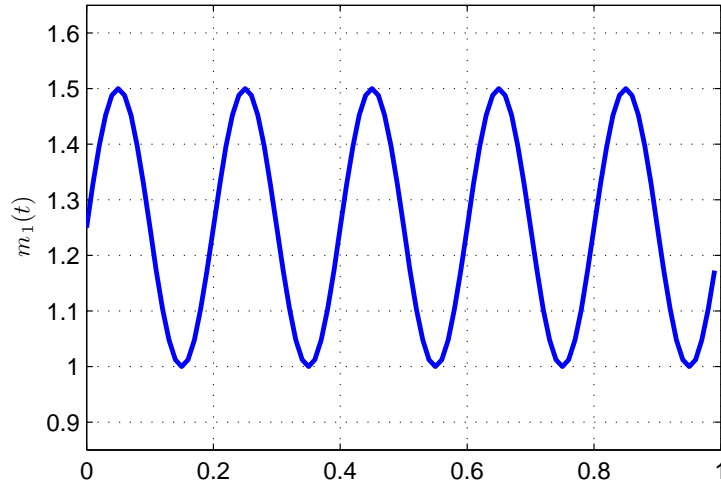


Figura 3.5: Variación de $m_1(t)$, (ver Apéndice E.1.3).

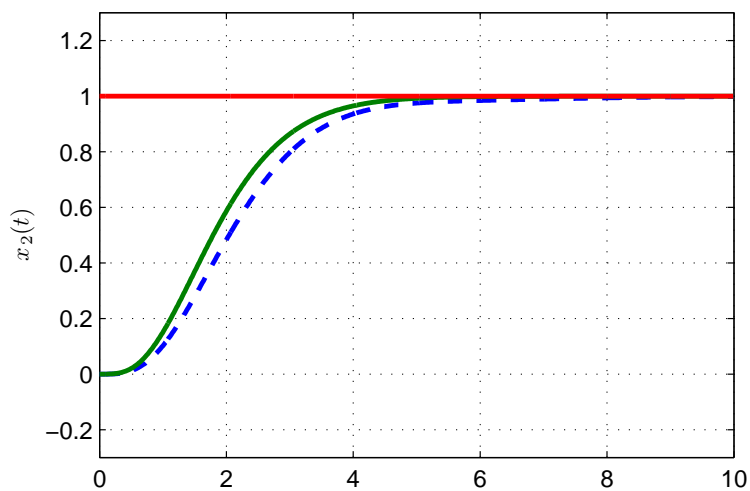


Figura 3.6: Respuesta dinámica del sistema con el controlador politópico propuesto (línea continua), Respuesta dinámica del sistema con el controlador robusto invariante (línea segmentada), en esta gráfica $w(t) = 0$, (ver Apéndice E.1).

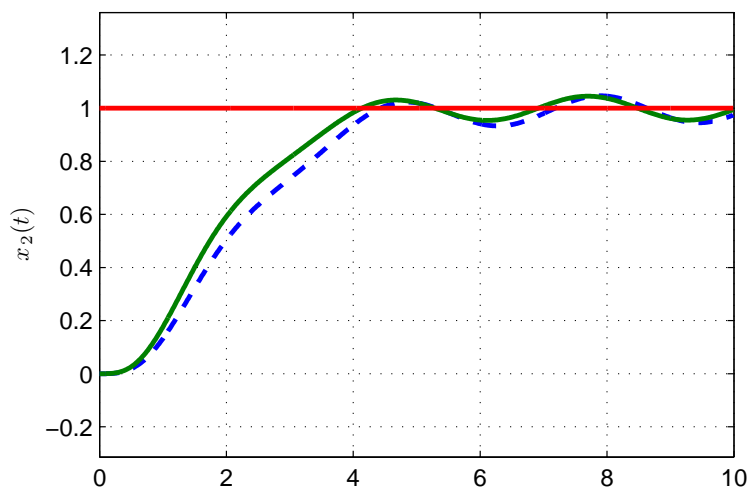


Figura 3.7: Respuesta dinámica del sistema con el controlador politópico propuesto (línea continua), Respuesta dinámica del sistema con el controlador robusto invariante (línea segmentada), en esta gráfica $w(t) = 0.4 \sin(t)$, (ver Apéndice E.1).

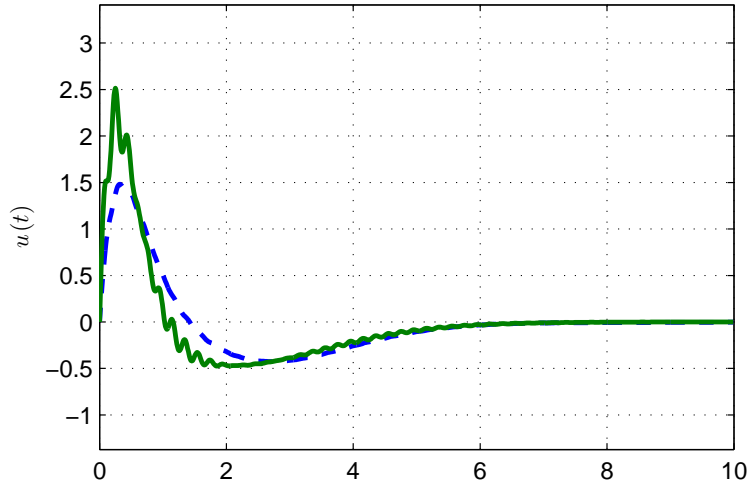


Figura 3.8: Ley de control $u(t)$ del controlador politópico propuesto (línea continua), controlador robusto invariante (línea segmentada), (ver Apéndice E.1).

3.5. Conclusiones

En este capítulo se presenta un método alternativo para la síntesis de controladores con dependencia paramétrica para sistemas LPV que garantizan QS; se asume que los parámetros variantes en el tiempo son medibles, y que permanecen entre ciertas cotas finitas conocidas. Se considera dependencia paramétrica afín racional, y además, el estado se considera que está disponible; El método alternativo propuesto consiste en diseñar un controlador por retroalimentación del estado en cada vértice tal que la matriz de estado de lazo cerrado sea Hurwitz invariante, en este caso la ley de control se obtiene mediante la interpolación de los controladores diseñados en cada vértice utilizando la medición de los parámetros. La principal ventaja de este método es que no requiere la solución de un problema de factibilidad, lo cual es conveniente en casos donde el número de parámetros es grande; sin embargo la inexactitud en la medición de los parámetros puede tener un efecto adverso en el desempeño de estos controladores, se tienen, entonces dos vectores de parámetros: el vector de parámetros reales (parámetros que tienen efecto sobre la dinámica del sistema LPV) y el vector de parámetros medidos (señales provenientes de los sensores que están disponibles para ajustar al controlador), en este caso se obtiene una cota superior de la componente variante de la matriz del sistema en lazo cerrado (debido a errores dinámicos en los sensores), dicha cota matricial está dada por ηI donde η es un escalar positivo, en este caso si $\bar{A}_{cl}(p_m) + \eta I$ es estable implica que el sistema es estable a pesar de cierto error dinámico en la medición de los parámetros. El método propuesto es aplicado en un sistema de dos masas y en este caso los resultados de simulación muestran que el desempeño del sistema en lazo cerrado corresponde prácticamente al de un sistema estable e invariante en el tiempo.

Capítulo 4

Aplicación de las técnicas de control LPV en un generador síncrono

4.1. Introducción

En este capítulo se expone el uso de técnicas de control LPV en el generador síncrono.

4.2. Generador síncrono

En esta sección se propone utilizar las técnicas de control LPV en un generador síncrono conectado a un bus infinito, este es un sistema no lineal y en este caso se seguirá la metodología dada en [13], [15] y [19] la cual consiste en linealizar el sistema en un punto de operación dinámico, en este caso el vector de parámetros se asocia el vector de estados evaluado en dicho punto de operación. El objetivo es diseñar un controlador que mantenga el sistema dentro de una vecindad (o hipercaja) alrededor del punto de operación deseado; se considera el siguiente modelo en variables de estado del generador síncrono en p.u. (ver apéndice D):

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_d \\ \dot{i}_q \\ \dot{i}_F \\ \dot{\omega} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_F(r+R_e)}{d_1} & \frac{p_4(t)L_F(L_q+L_e)}{d_1} & \frac{-kM_F r_F}{d_1} & \frac{L_F(L_q+L_e)p_2(t)}{d_1} & \frac{-L_F K \cos(p_5(t)-\alpha)}{d_1} \\ \frac{p_4(t)(L_d+L_e)}{L_q+L_e} & \frac{-(r+R_e)}{L_q+L_e} & \frac{p_4(t)kM_F}{L_q+L_e} & \frac{(L_d+L_e)p_1(t)+kM_F p_3(t)}{L_q+L_e} & \frac{K \sin(p_5(t)-\alpha)}{L_q+L_e} \\ \frac{-kM_F(r+R_e)}{d_1} & \frac{-p_4(t)kM_F(L_q+L_e)}{d_1} & \frac{(L_d+L_e)r_F}{d_1} & \frac{-kM_F(L_q+L_e)p_2(t)}{d_1} & \frac{kM_F K \cos(p_5(t)-\alpha)}{d_1} \\ \frac{(L_q-L_d)p_2(t)}{3\tau_j} & \frac{(L_q-L_d)p_1(t)-kM_F p_3(t)}{3\tau_j} & \frac{-kM_F p_2(t)}{3\tau_j} & -\frac{D}{\tau_j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_F \\ \omega \\ \delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{kM_F}{d_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{L_q+L_e}{d_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau_j} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_F \\ T_m \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

donde $d_1 = k^2 M_F^2 - L_F(L_d + L_e)$, $p_1(t) = i_{d0}(t)$, $p_2(t) = i_{q0}(t)$, $p_3(t) = i_{F0}(t)$, $p_4(t) = \omega_0(t)$, $p_5(t) = \delta_0(t)$ y $K = \sqrt{3}V_\infty$; se asume que las trayectorias de estado son acotadas en lazo cerrado, es decir $p_i(t) \in [\underline{p}_i, \bar{p}_i] \forall i = 1, \dots, 5$. Notese la presencia de las funciones con dependencia paramétrica no lineal $\cos(p_5(t) - \alpha)$ y $\sin(p_5(t) - \alpha)$ las cuales se deben a la conexión del generador a un bus infinito; se propone interpretar el efecto de estas funciones no lineales como perturbaciones al sistema de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_d \\ \dot{i}_q \\ \dot{i}_F \\ \dot{\omega} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_F(r+R_e)}{d_1} & \frac{p_4(t)L_F(L_q+L_e)}{d_1} & \frac{-kM_F r_F}{d_1} & \frac{L_F(L_q+L_e)p_2(t)}{d_1} & 0 \\ \frac{p_4(t)(L_d+L_e)}{L_q+L_e} & \frac{-(r+R_e)}{L_q+L_e} & \frac{p_4(t)kM_F}{L_q+L_e} & \frac{(L_d+L_e)p_1(t)+kM_F p_3(t)}{L_q+L_e} & 0 \\ \frac{-kM_F(r+R_e)}{d_1} & \frac{-p_4(t)kM_F(L_q+L_e)}{d_1} & \frac{(L_d+L_e)r_F}{d_1} & \frac{-kM_F(L_q+L_e)p_2(t)}{d_1} & 0 \\ \frac{(L_q-L_d)p_2(t)}{3\tau_j} & \frac{(L_q-L_d)p_1(t)-kM_F p_3(t)}{3\tau_j} & \frac{-kM_F p_2(t)}{3\tau_j} & -\frac{D}{\tau_j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_F \\ \omega \\ \delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{kM_F}{d_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{L_q+L_e}{d_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau_j} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_F \\ T_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-L_F}{d_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_q+L_e} \\ \frac{kM_F}{d_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

donde $w_1 = Kp_5(t)\cos(p_5(t) - \alpha)$ y $w_2 = Kp_5(t)\sin(p_5(t) - \alpha)$ son entradas de perturbación acotadas y decrecientes si el sistema permanece en el punto de operación. Asumiendo información completa del estado tenemos el sistema en la forma de

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(p)x(t) + B_2u(t) + B_1w(t) \\ y(t) &= x(t) \end{aligned}$$

siendo posible el uso de técnicas de control LPV. En este caso se busca diseñar un controlador que garantice estabilidad cuadrática y desempeño robusto en presencia de perturbaciones de norma acotada para todas las posibles trayectorias del vector de parámetros dentro de la hipercaja (o vecindad alrededor del punto de operación). Se considera el modelo del generador síncrono conectado a un bus infinito del ejemplo 5.1 en [20], en la Tabla 4.1 se muestran los parámetros en p.u. y en la Tabla 4.2 se muestra el punto de operación nominal.

L_d	1.7	Inductancia en el eje directo
L_e	0.4	Inductancia en la línea de transmisión
L_q	1.64	Inductancia en el eje en cuadratura
L_F	1.651	Inductancia en el rotor
kM_F	1.55	Inductancia mutua entre el rotor y el estator
r_F	0.000742	Resistencia en el rotor
r	0.001096	Resistencia en el estator
R_e	0.02	Resistencia en la línea de transmisión
τ_j	50	Constante asociada al momento de inercia del rotor
V_∞	0.828	Voltaje en el bus infinito

Tabla 4.1: Parámetros del generador síncrono en p.u.

i_{d0}	-1.591
i_{q0}	0.701
i_{F0}	2.826
ω_0	1
δ_0	0

Tabla 4.2: Punto de operación nominal en p.u.

donde las cantidades base son $I_B = 6158.4$ A, $V_{FB} = 163280.68$ V, $I_{FB} = 326.64$ A y $\omega_B = 120\pi$ rad/s (ver representación en p.u. [20], pág. 92). En este caso se considera que el punto de operación varia ligeramente alrededor del punto de operación principalmente debido a fallas en la red eléctrica. Para este ejemplo en particular se propone:

$$\begin{aligned} \underline{p}_1 &= (1 + 0.05) i_{d0} = -1.6706 & \bar{p}_1 &= (1 - 0.05) i_{d0} = -1.5115 \\ \underline{p}_2 &= (1 - 0.05) i_{q0} = 0.6659 & \bar{p}_2 &= (1 + 0.05) i_{q0} = 0.7360 \\ \underline{p}_3 &= (1 - 0.03) i_{F0} = 2.7412 & \bar{p}_3 &= (1 + 0.03) i_{F0} = 2.9108 \\ \underline{p}_4 &= (1 - 0.1) \omega_0 = 1.1 & \bar{p}_4 &= (1 + 0.1) \omega_0 = 0.9 \end{aligned}$$

Se desea sintetizar un controlador que garantice estabilidad cuadrática y desempeño robusto ante variaciones en los parámetros cerca del punto de operación. El generador síncrono es QS en lazo abierto dado que se satisface la condición dada por el teorema 2.4, sin embargo su respuesta dinámica no es buena y carece de la robustez suficiente como para prescindir de un controlador en lazo cerrado. En la Figura 4.2 se muestra la respuesta dinámica del modelo LPV del generador síncrono en lazo abierto ante variaciones del punto de operación las cuales se muestran en la Figura 4.1; la simulación se realiza considerando $[i_{d0} \ i_{q0} \ i_{F0} \ \omega_0 \ \delta_0] = [0 \ 0 \ 0 \ -0.1 \ 0]$ como condición inicial, nótese que $\delta(t)$ no regresa al punto de operación lo cual implica la presencia de un desfase persistente entre el voltaje en terminales del generador y el voltaje del bus infinito al que dicho generador está conectado; tal situación desde luego afectaría a la calidad de la energía en la red eléctrica pudiendo ocasionar fallas en la misma. En el Apéndice E.2 se encuentran los archivos necesarios para la simulación del sistema considerado en lazo abierto y en lazo cerrado.

En este trabajo se comparan dos alternativas, la primera consiste en usar el Teorema 2.8, en este caso el sistema LPV (4.2) es cuadráticamente estabilizable con desempeño robusto si existe una matriz simétrica $Q > 0$ y una matriz V tales que

$$\begin{bmatrix} A_{(i)}Q + QA_{(i)}^T + B_{2(i)}V + V^T B_{2(i)}^T & B_{1(i)} & QC^T \\ B_{1(i)}^T & -\gamma^2 I & 0 \\ CQ & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad i = 1, \dots, 2^q \quad (4.3)$$

entonces un controlador lineal invariante en el tiempo que estabiliza cuadráticamente el sistema está dado por $F = VQ^{-1}$. Con el uso de YALMIP se obtuvo la siguiente solución al conjunto de LMI's dado en (4.3), (ver el programa de MATLAB msqs_sintesis1.m en el apéndice E.2.3)

$$F = VQ^{-1} = \begin{bmatrix} -12.2113 & 0.516062 & -13.7161 & -10.1456 & 0.300966 \\ -710.381 & 39.6586 & -794.227 & -971.446 & -20.7579 \end{bmatrix}$$

$$\gamma = 2.49$$

En la Figura 4.3 se muestra la dinámica del sistema LPV en lazo cerrado utilizando el controlador obtenido por la solución del conjunto de LMI's dado en (4.3). Nótese que el sistema tiene una respuesta dinámica rápida en la frecuencia angular, sin embargo las corrientes $i_d(t)$, $i_q(t)$ e $i_F(t)$ tienen un transitorio muy prolongado.

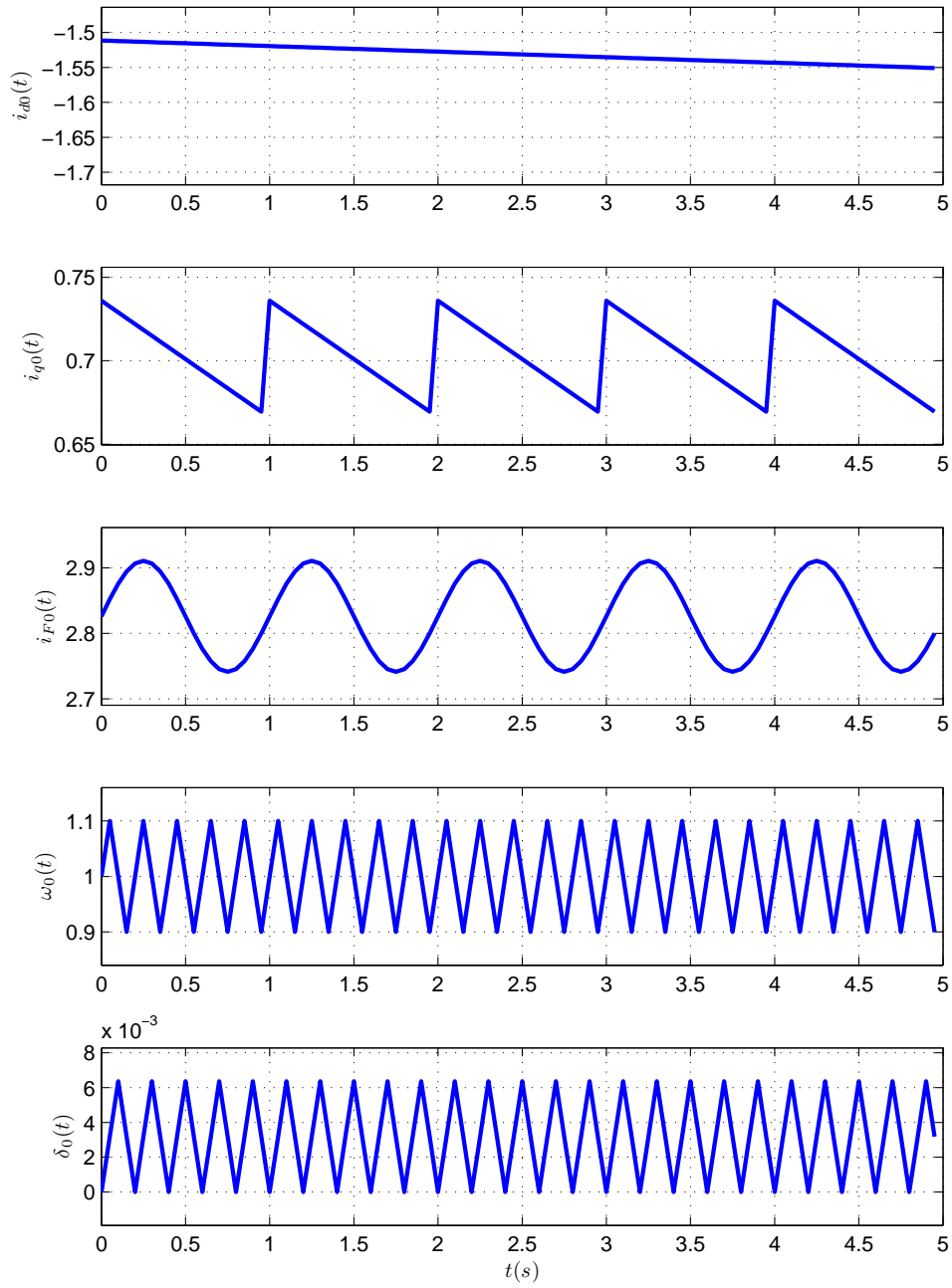


Figura 4.1: Dinámica del punto de operación (ver Apéndice E.2.1, E.2.2 y E.2.5).

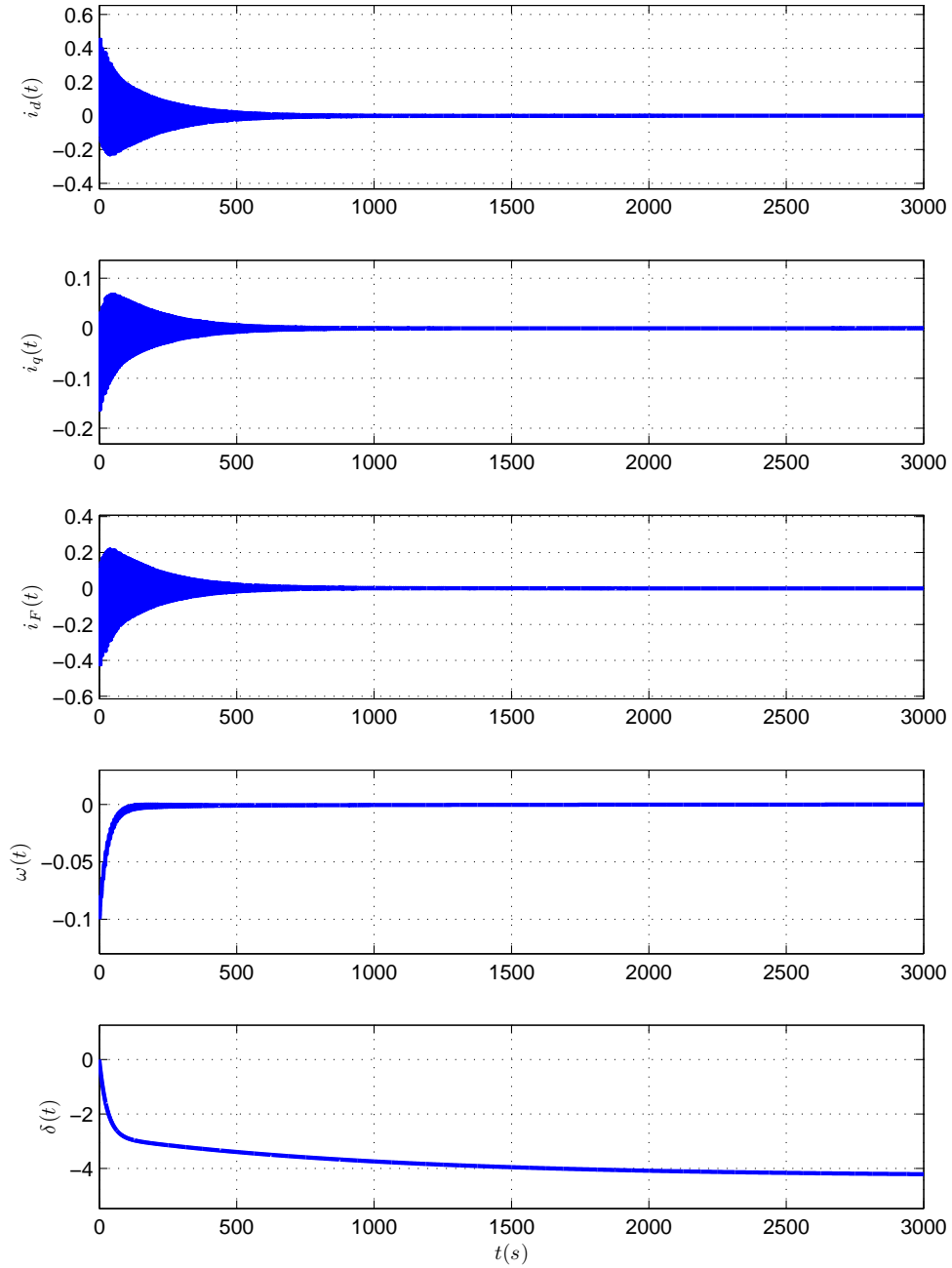


Figura 4.2: Dinámica del sistema linealizado en un punto de operación dinámico en lazo abierto, nótese que $\delta(t)$ no regresa al punto de operación lo cual implica la presencia de un desfase persistente entre el voltaje en terminales del generador y el voltaje del bus infinito al que dicho generador esta conectado, (ver Apéndice E.2.1, E.2.2 y E.2.5).

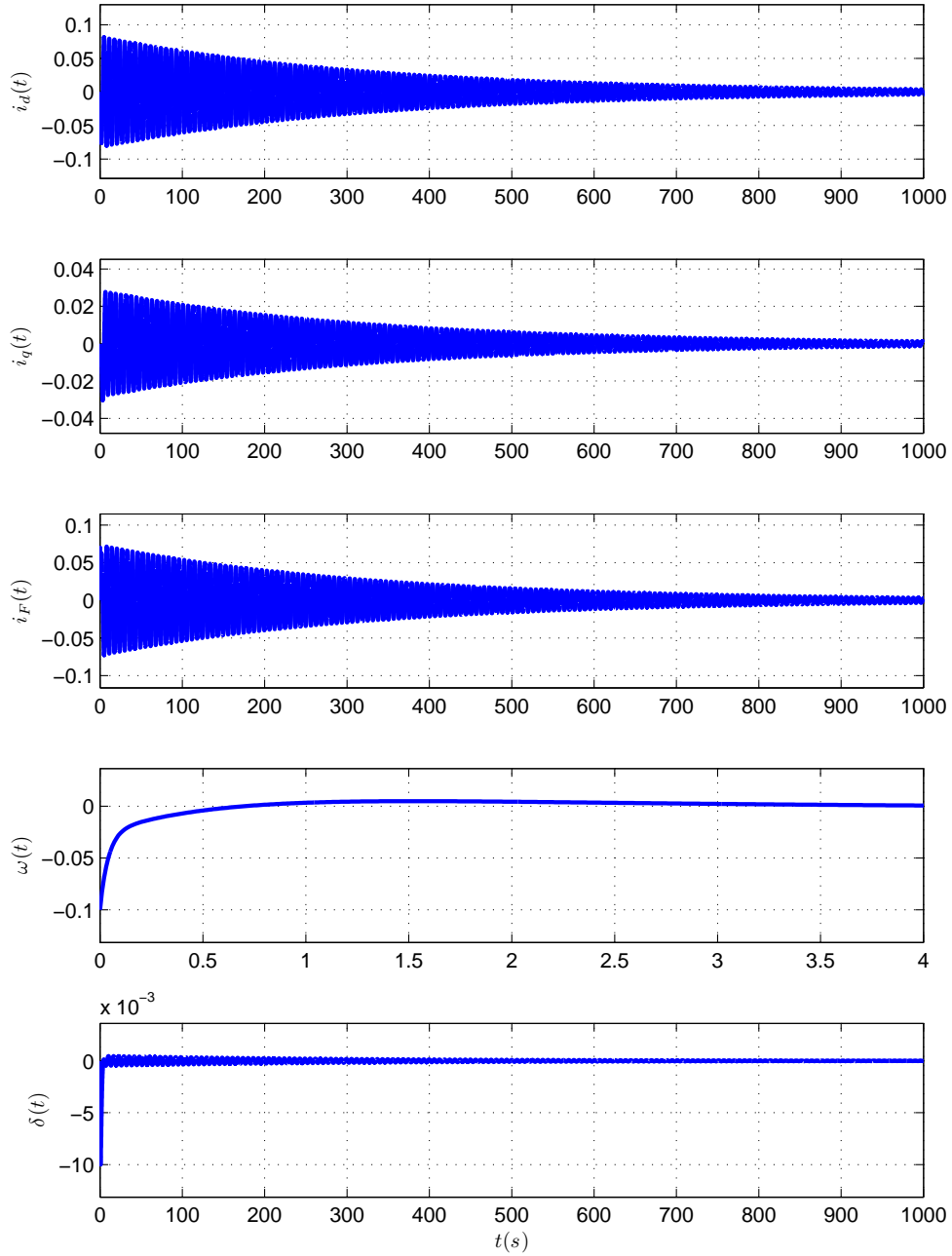


Figura 4.3: Dinámica del generador sujeto a variaciones en el punto de operación, en lazo cerrado con un controlador robusto LTI, (ver Apéndice E.2.1, E.2.3 y E.2.5).

En esta aplicación no es posible el uso del resultado dado en el capítulo 3, debido a que no es posible satisfacer la condición de invariancia de los elementos de la matriz de lazo cerrado para todas las trayectorias de los parámetros; En este caso se propone diseñar un controlador estabilizante en cada vértice y obtener una ley de control mediante la interpolación de dichos controladores utilizando mediciones de los parámetros; y con el objetivo de garantizar que tal controlador garantiza estabilización cuadrática con desempeño robusto se demuestra que existen $Q > 0$ y $\gamma > 0$ tales que

$$\begin{bmatrix} A_{cl(i)}Q + QA_{cl(i)}^T & B_{1(i)} & QC^T \\ B_{1(i)}^T & -\gamma^2 & 0 \\ CQ & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad i = 1, \dots, 2^q \quad (4.4)$$

lo cual es equivalente a la condición que implica el conjunto de LMI's dado en (4.3). Se asume que no existe error en la medición de los parámetros. Se propone diseñar un controlador estabilizante en cada vértice tal que los valores propios de $A_{cl(i)} = A_{(i)} + B_2F_{(i)}$ sean -2.7 , -2.7 , -2.5 , -2.5 y -0.1 para todo $i = 1, \dots, 2^q$; Se tienen las siguientes matrices de retroalimentación del estado en cada vértice que satisfacen lo anterior con $\gamma = 3.3166$, (ver el programa de MATLAB `msqs_sintesis2.m` en el apéndice E.2.4),

$$\begin{aligned} F_{(1)} &= \begin{bmatrix} 9.22004 & 184.933 & 4.19771 & 17.8718 & 14.9699 \\ -508.707 & 143.459 & -387.432 & -253.665 & 9.15975 \end{bmatrix} & F_{(9)} &= \begin{bmatrix} 9.22004 & 184.933 & 4.19771 & 17.8718 & 14.9699 \\ -508.707 & 143.459 & -387.432 & -253.665 & 9.15975 \end{bmatrix} \\ F_{(2)} &= \begin{bmatrix} -25.6054 & 194.66 & -22.3483 & 20.8939 & 17.6805 \\ -483.359 & 136.383 & -368.111 & -245.478 & 16.5656 \end{bmatrix} & F_{(10)} &= \begin{bmatrix} 5.61874 & 174.763 & 1.30491 & 21.7288 & 12.3315 \\ -477.322 & 235.406 & -364.101 & -238.669 & 15.1301 \end{bmatrix} \\ F_{(3)} &= \begin{bmatrix} 17.0432 & 182.749 & 10.161 & 19.2164 & 16.0673 \\ -465.469 & 131.384 & -354.438 & -255.504 & 7.54005 \end{bmatrix} & F_{(11)} &= \begin{bmatrix} 41.1908 & 157.323 & 28.4642 & 19.7992 & 11.1029 \\ -455.36 & 224.636 & -347.298 & -251.265 & 7.54548 \end{bmatrix} \\ F_{(4)} &= \begin{bmatrix} -15.3159 & 191.786 & -14.505 & 21.9364 & 18.5076 \\ -444.155 & 125.434 & -338.191 & -247.897 & 14.4178 \end{bmatrix} & F_{(12)} &= \begin{bmatrix} 14.2615 & 170.525 & 7.90365 & 22.7611 & 12.8805 \\ -437.61 & 215.938 & -333.746 & -241.729 & 13.3167 \end{bmatrix} \\ F_{(5)} &= \begin{bmatrix} -18.4688 & 192.666 & -16.9083 & 20.154 & 17.0161 \\ -488.554 & 137.918 & -372.07 & -247.155 & 15.0481 \end{bmatrix} & F_{(13)} &= \begin{bmatrix} 11.618 & 171.821 & 5.88538 & 20.9262 & 11.8494 \\ -481.691 & 237.633 & -367.437 & -240.793 & 13.8438 \end{bmatrix} \\ F_{(6)} &= \begin{bmatrix} -50.653 & 201.655 & -41.441 & 24.0292 & 20.4983 \\ -465.128 & 131.379 & -354.213 & -239.589 & 21.8914 \end{bmatrix} & F_{(14)} &= \begin{bmatrix} -15.5879 & 185.159 & -14.8864 & 25.13 & 14.3764 \\ -461.876 & 227.921 & -352.308 & -231.159 & 19.6768 \end{bmatrix} \\ F_{(7)} &= \begin{bmatrix} -8.66234 & 189.928 & -9.43327 & 21.2663 & 17.9058 \\ -448.537 & 126.743 & -341.532 & -249.461 & 13.0037 \end{bmatrix} & F_{(15)} &= \begin{bmatrix} 19.83 & 167.795 & 12.1552 & 22.0337 & 12.4434 \\ -441.281 & 217.822 & -336.549 & -243.701 & 12.1234 \end{bmatrix} \\ F_{(8)} &= \begin{bmatrix} -38.7602 & 198.333 & -32.3756 & 24.7934 & 21.0756 \\ -428.712 & 121.209 & -326.42 & -242.385 & 19.4002 \end{bmatrix} & F_{(16)} &= \begin{bmatrix} -5.49031 & 180.209 & -7.17685 & 25.86 & 14.744 \\ -424.591 & 209.643 & -323.806 & -234.735 & 17.5494 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Un controlador con dependencia paramétrica que garantiza QS para todas las trayectorias del vector de parámetros está dado por,

$$u(t) = \sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(p) F_{(i)} \quad (4.5)$$

donde $q = 4$. En la Figura 4.4 se muestra la dinámica del sistema en lazo cerrado con la ley de control dada por (4.5); en las Figura 4.5 y 4.6 se compara el torque y el voltaje de campo respectivamente requeridos por los controladores diseñados; en este caso se observa que el controlador politópico propuesto requiere mayor acción en el voltaje de campo que el controlador robusto LTI, sin embargo el controlador politópico compensa esta desventaja con una respuesta dinámica más rápida en $i_d(t)$, $i_q(t)$ e $i_F(t)$, además de una disminución sustancial en el torque máximo requerido por la ley de control.

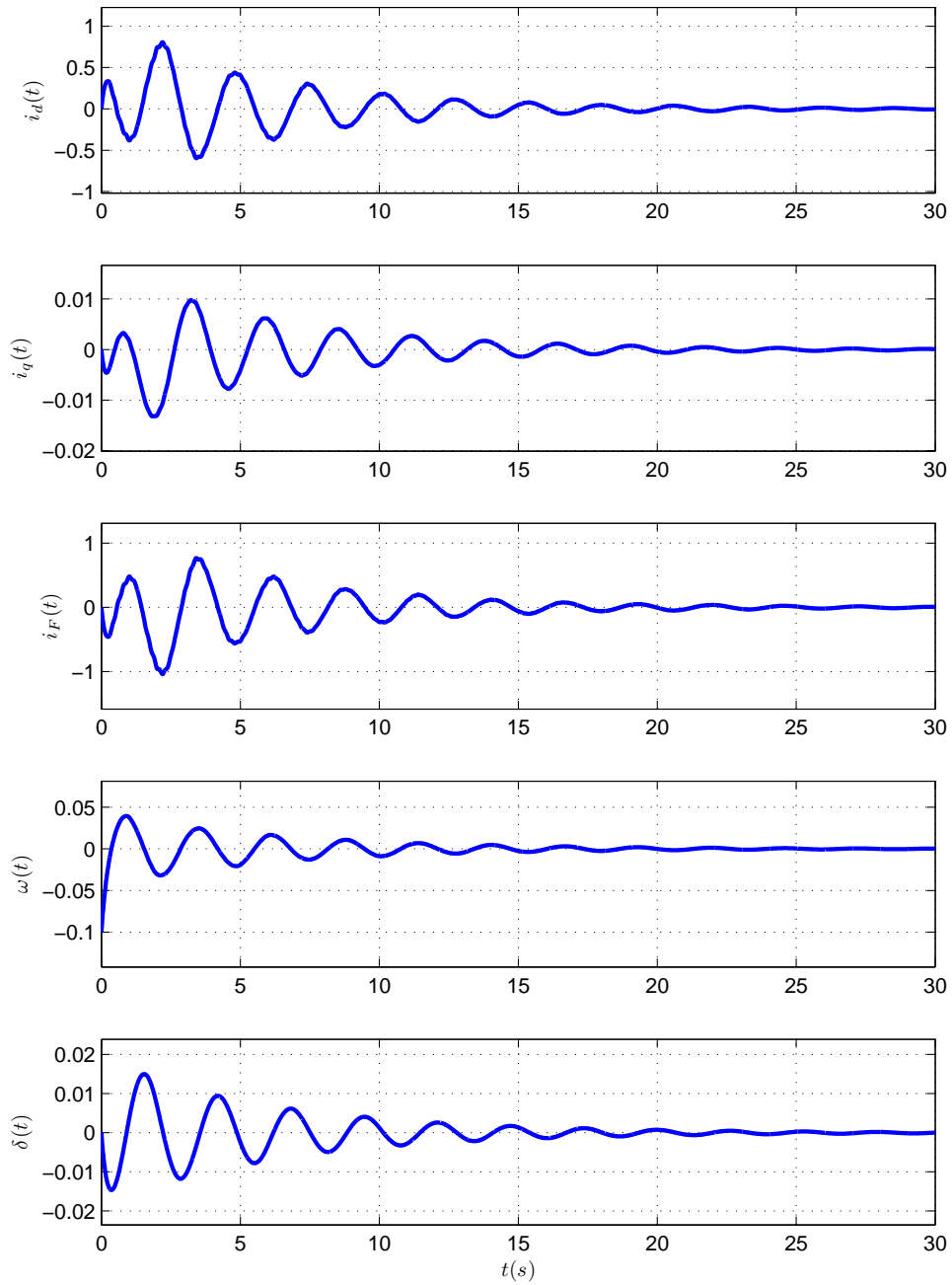


Figura 4.4: Dinámica del generador sujeto a las variaciones en el punto de operación que se muestran en la Figura (4.1), en lazo cerrado con un controlador politópico, (ver Apéndice E.2.1, E.2.4 y E.2.6).

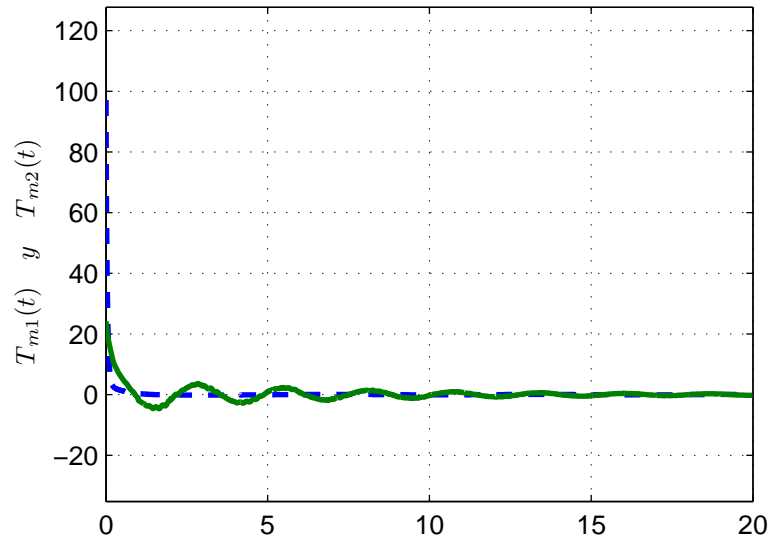


Figura 4.5: Entrada de torque mecánico $T_{m1}(t)$ cuando el sistema linealizado opera en lazo cerrado con el controlador lineal robusto invariante en el tiempo (línea segmentada) y entrada de torque mecánico $T_{m2}(t)$ cuando sistema linealizado opera en lazo cerrado con el controlador politópico (línea continua).

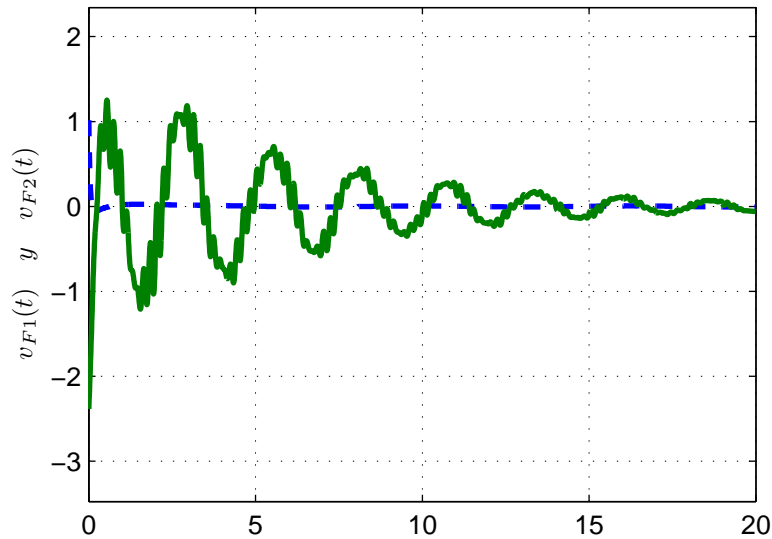


Figura 4.6: Entrada de voltaje de campo $v_{F1}(t)$ cuando el sistema linealizado opera en lazo cerrado con el controlador lineal robusto invariante en el tiempo (línea segmentada) y entrada de voltaje de campo $v_{F2}(t)$ cuando el sistema linealizado opera en lazo cerrado con el controlador politópico (línea continua).

4.3. Conclusiones

En este capítulo se expone la aplicación de las técnicas de control LPV en el generador síncrono. El modelo del generador síncrono es no lineal; y en este caso el modelo es linealizado sobre un punto de operación dinámico, obteniéndose así, un sistema LPV, en este caso el vector de estados evaluado en dicho punto de operación dinámico corresponde al vector de parámetros. Se asume que las variaciones en el punto de operación son acotadas, es decir, que el vector de parámetros es acotado por un hipercaja. Lo que se persigue en esta aplicación es aumentar la robustez con la que el generador síncrono opera en presencia de variaciones en su punto de operación debido principalmente a fallas en la red eléctrica, en este caso se requiere lograr estabilización cuadrática del sistema para todas las variaciones del vector de parámetros; El resultado dado en el capítulo 3 no es aplicable a este sistema ya que al diseñar un controlador por retroalimentación del estado en cada vértice no es posible satisfacer que la matriz de estado en lazo cerrado sea igual en todos los vértices, por lo que no es posible encontrar una ley de control que haga que el sistema LPV en lazo cerrado tenga el comportamiento dinámico de un sistema LTI estable. En este caso se diseñó un controlador politópico y se demostró que satisface las condiciones de estabilidad cuadrática y desempeño robusto; la respuesta dinámica de dicho controlador politópico fue comparada con la respuesta dinámica de un controlador robusto LTI obtenido mediante la solución de un problema de factibilidad. Los resultados de simulación para esta aplicación muestran que el controlador politópico resultó tener una respuesta dinámica más rápida en $i_d(t)$, $i_q(t)$ e $i_F(t)$ que el controlador robusto LTI.

Capítulo 5

Conclusiones generales y trabajos futuros

En este trabajo de tesis se propone un método alternativo para la síntesis de controladores para sistemas Lineales con Parámetros Variantes (LPV) en el tiempo que garantizan QS. El controlador depende del vector de parámetros variantes en el tiempo y se obtiene mediante la interpolación de retroalimentaciones estáticas del estado diseñadas para cada vértice. Se asume que los parámetros variantes en el tiempo son medibles, y que permanecen entre ciertas cotas finitas conocidas. Se considera dependencia paramétrica afín racional, y además, el estado se considera que está disponible. Las retroalimentaciones del estado son tales que la matriz de estado en lazo cerrado es Hurwitz e invariante en el tiempo, obteniéndose así la dinámica deseada para cualquier variación de los parámetros, esto es, que la ley de control con dependencia paramétrica logra que el sistema LPV en lazo cerrado tenga prácticamente el comportamiento dinámico de un sistema LTI estable, en este caso se garantiza QS para cualquier variación en los parámetros, ya que un sistema LTI estable es QS.

El método propuesto tiene la ventaja de no requerir la solución de un problema de factibilidad mediante algún método numérico, lo cual resulta más significativo al incrementarse el número de vértices, sin embargo, un factor que puede tener un efecto adverso en el desempeño de los controladores con dependencia paramétrica es la inexactitud de las mediciones, por lo que se proponen dos vectores de parámetros: el vector de parámetros reales (parámetros que tienen efecto sobre la dinámica del sistema LPV) y el vector de parámetros medidos (señales provenientes de los sensores que están disponibles para ajustar al controlador). En este trabajo de tesis se resuelven los problemas de regulación y de seguimiento a la referencia, ante diferencias entre los parámetros reales y medidos.

Como trabajo a futuro se propone lo siguiente:

- Relajar la condición de invariancia de la matriz de lazo cerrado en el método propuesto de estabilización cuadrática.
- Extender este método a sistemas LPV en donde no todos los parámetros son medibles y se dispone de una cantidad menor de información para ajustar el controlador.
- Extender este método a sistemas LPV con dependencia paramétrica multiafín.
- Utilizar otras técnicas de control en los vértices y determinar su relación con la estabilidad cuadrática.

- Profundizar más acerca de la estabilidad y el desempeño de controladores LPV aplicados a sistemas no lineales.
- Profundizar más acerca del efecto de las inexactitudes y errores dinámicos en las mediciones sobre el desempeño de controladores con dependencia paramétrica.

Apéndice A

El producto de Kronecker

Dadas dos matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$, el producto de Kronecker entre A y B se define como

$$A \otimes B := \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nm}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{np \times mq}$$

Algunas de las propiedades del producto de Kronecker son

$$\begin{aligned} 1 \otimes A &= A \\ (A + B) \otimes C &= A \otimes C + B \otimes C \\ (AB) \otimes (CD) &= (A \otimes C)(B \otimes D) \\ (A \otimes B)^T &= A^T \otimes B^T \\ (A \otimes B)^{-1} &= A^{-1} \otimes B^{-1} \end{aligned}$$

donde A , B y C son matrices de dimensiones compatibles.

Apéndice B

La Ecuación de Sylvester

En este apéndice se muestra la solución analítica de la llamada ecuación de Sylvester

$$AP + PB = C \tag{B.1}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$, y $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$ son matrices conocidas y $P \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es una cierta matriz desconocida.

Lema B.1. *La ecuación (B.1) tiene una única solución si y solo si $\lambda_i[A] + \lambda_j[B] \neq 0$ $\forall i = 1, \dots, m \forall j = 1, \dots, n$; en este caso, la única solución esta dada por*

$$\text{col}[P] = [(I_n \otimes A) + (B^T \otimes I_m)]^{-1} \text{col}[C] \tag{B.2}$$

donde \otimes denota el producto de Kronecker (ver Apéndice A); la correspondiente ecuación homogénea $AP + PB = 0$ tiene una única solución $P = 0$.

En particular, si $B = A^T$, (B.1) se reduce a la ecuación matricial clásica de Lyapunov para sistemas en tiempo continuo; y la condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución única en este caso es que $\lambda_i[A] + \lambda_j[A^T] \neq 0 \forall i, j = 1, \dots, n$; notese que si A es Hurwitz, esta condición se satisface.

Apéndice C

El complemento de Schur

En este apéndice se muestra un resultado fundamental en la teoría de LMI's que permite transformar una desigualdad de Riccati en una LMI. Considere la siguiente matriz simétrica:

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ S^T Q^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R - S^T Q^{-1} S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & Q^{-1} S \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

Dado que las matrices multiplicadoras por la izquierda y por la derecha del segundo miembro en (C.1) son de rango completo, entonces la matriz $\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix}$ es definida positiva si y solo si la matriz $\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R - S^T Q^{-1} S \end{bmatrix}$ es definida positiva. por lo anterior se puede formular el siguiente resultado.

Hecho C.1. La matriz $\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix}$ es definida positiva si y solo si Q es definida positiva y $R - S^T Q^{-1} S$ es definida positiva.

A la matriz $R - S^T Q^{-1} S$ se le llama *Complemento de Schur* de Q . De igual manera (C.1) puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & SR^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q - SR^{-1} S^T & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ R^{-1} S^T & I \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

de donde se obtiene la siguiente condición alternativa para determinar si dicha matriz es definida positiva.

Hecho C.2. La matriz $\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix}$ es definida positiva si y solo si R es definida positiva y $Q - SR^{-1} S^T$ es definida positiva.

A la matriz $Q - SR^{-1} S^T$ se le llama *Complemento de Schur* de R . Dado que,

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} < 0$$

es equivalente a

$$\begin{bmatrix} -Q & -S \\ -S^T & -R \end{bmatrix} > 0$$

surge el siguiente hecho

Hecho C.3. *Las siguientes condiciones son equivalentes*

- La matriz $\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix}$ es definida negativa;
- Las matrices Q y $R - S^T Q^{-1} S$ son definidas negativas;
- Las matrices R y $Q - S R^{-1} S^T$ son definidas negativas.

Apéndice D

El Generador Síncrono

D.1. Introducción

Los generadores síncronos o alternadores son máquinas eléctricas utilizadas para convertir potencia mecánica en potencia eléctrica de Corriente Alterna (CA). Al generador síncrono se le suministra un voltaje de Corriente Directa (CD) en el devanado del rotor, lo cual produce un campo magnético. Al girar el rotor del generador, mediante una fuente de potencia mecánica externa (una turbina por ejemplo), se produce un campo magnético rotacional dentro de la máquina. Este campo magnético rotacional induce un grupo trifásico de voltajes en los devanados del estátor del generador.

Existen dos formas comunes de suministrar potencia CD al rotor:

1. Suministrar la potencia CD desde una fuente externa al rotor por medio de anillos deslizantes y escobillas.
2. Suministrar la potencia CD desde una fuente especial montada directamente en el rotor del generador síncrono.

El rotor de la máquina síncrona puede ser de polos salientes o de polos no salientes como se muestra en las Figuras D.1 y D.2 respectivamente. En el laboratorio del posgrado de ingeniería eléctrica de la FIME se cuenta con una máquina síncrona con rotor devanado de 4 polos salientes cuyo voltaje de excitación es proporcionado por medio de anillos deslizantes y escobillas.

Los anillos deslizantes son anillos metálicos que circundan el eje de la máquina, existiendo aislamiento eléctrico entre ellos. Cada extremo del devanado del rotor en serie con la resistencia del rotor esta unido a uno de los anillos deslizantes colocados sobre el eje de la máquina síncrona, al girar el rotor, dichos anillos se deslizan a través de las escobillas estacionarias como se muestra en la Figura D.3. Una escobilla es un bloque de un compuesto de carbón grafitado que conduce la electricidad libremente y tiene muy baja fricción para no desgastarse con el anillo deslizante. Si se conecta al extremo positivo de una fuente de voltaje CD a una escobilla y el extremo negativo a la otra, se aplicará igual voltaje CD al devanado de campo en todo momento, sin tener en cuenta la posición angular o la velocidad del rotor.

Los anillos deslizantes y las escobillas crean algunos problemas cuando se utilizan para suministrar potencia CD a los devanados de campo de la máquina síncrona pues exigen más

mantenimiento en la máquina ya que se debe revisar con regularidad las escobillas debido a su desgaste. Además, la caída de tensión en las escobillas causa pérdidas significativas de potencia en las máquinas que tienen grandes corrientes de campo. A pesar de estos problemas, los anillos deslizantes y las escobillas se utilizan en todas las máquinas síncronas pequeñas ya que ningún otro método de suministro de CD en el devanado de campo es adecuado por el costo.

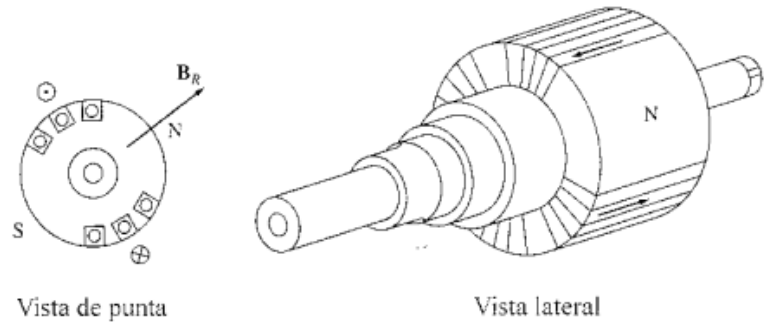


Figura D.1: Rotor de polos no salientes en una máquina síncrona.

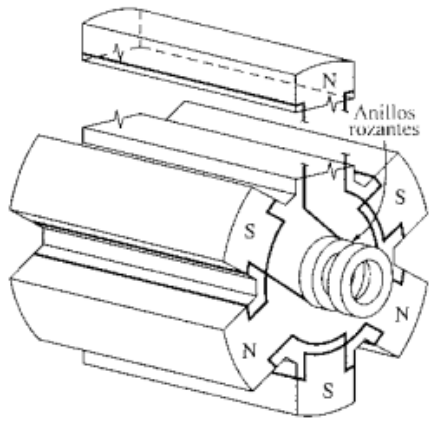


Figura D.2: Rotor de seis polos salientes en una máquina síncrona.

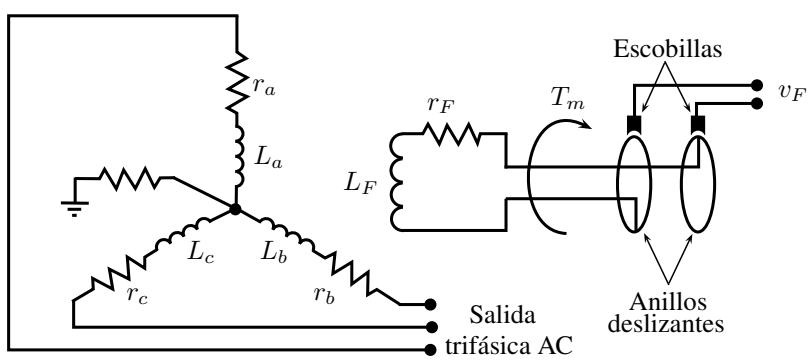


Figura D.3: Diagrama esquemático de un generador síncrono trifásico.

En generadores y motores grandes, se utilizan excitadores sin escobillas para suministrar potencia CD al devanado del rotor. Un excitador sin escobillas consiste en un generador pequeño cuyo circuito de campo está montado en el estátor y su circuito de armadura está montado sobre el eje del rotor. La salida trifásica del generador excitador es rectificadora montado también en el eje del generador esto permite energizar el devanado del rotor sin necesidad de una fuente externa. Muchos generadores síncronos incluyen los dos métodos de excitación de campo mencionados anteriormente con el objetivo de contar con un medio de excitación de campo adicional en caso de emergencia. Para este trabajo de investigación, el caso que es de interés es aquel en el que se energiza el devanado de campo mediante una fuente externa utilizando escobillas y anillos deslizantes. En la siguiente sección se presenta el modelado matemático del generador síncrono.

D.2. Modelo del generador síncrono

En esta sección se presenta el modelado matemático del generador síncrono. En general, en el modelado de las máquinas eléctricas de CA se utiliza la transformación de Park, dicha transformación consiste en definir un nuevo conjunto de variables en el estátor (corrientes, voltajes o enlaces de flujo) en términos de un marco de referencia rotatorio determinado por la posición del rotor. La transformación de Park se desarrolla matemáticamente de la siguiente manera:

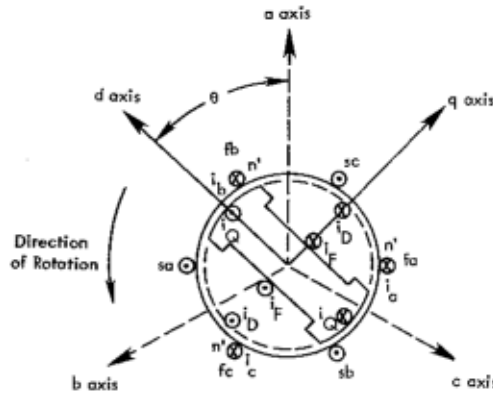


Figura D.4: Circuito excitador sin escobillas con imanes permanentes en el rotor.

Se define θ como la posición angular del marco de referencia rotatorio dq (eje directo y eje en cuadratura del rotor) con respecto a un marco de referencia fijo tal como se muestra en la Figura D.4. Sean i_a , i_b e i_c las corrientes que salen de las terminales del estátor; al proyectar dichas corrientes sobre el marco de referencia dq se obtiene:

$$i_q = 2/3 [i_a \sin \theta + i_b \sin (\theta - 2\pi/3) + i_c \sin (\theta + 2\pi/3)] \quad (D.1)$$

$$i_d = 2/3 [i_a \cos \theta + i_b \cos (\theta - 2\pi/3) + i_c \cos (\theta + 2\pi/3)] \quad (D.2)$$

La transformación de Park transforma las variables en las fases a , b y c (marco de referencia fijo) en las variables d y q (marco de referencia alineado con el rotor) junto con una varia-

ble denominada de secuencia cero (denotada por subíndice cero) la cual es igual a cero en condiciones balanceadas de operación. Entonces, por definición

$$i_{0dq} = P i_{abc}, \quad (\text{D.3})$$

donde $i_{0dq} = [i_0 \ i_d \ i_q]^T$, $i_{abc} = [i_a \ i_b \ i_c]^T$ y la matriz de transformación de Park P se define como:

$$P := \sqrt{2/3} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ \cos \theta & \cos(\theta - 2\pi/3) & \cos(\theta + 2\pi/3) \\ \text{sen } \theta & \text{sen}(\theta - 2\pi/3) & \text{sen}(\theta + 2\pi/3) \end{bmatrix} \quad (\text{D.4})$$

De igual manera podemos escribir

$$v_{0dq} = P v_{abc}, \quad \lambda_{0dq} = P \lambda_{abc} \quad (\text{D.5})$$

Dado que la transformación de Park es única, entonces la inversa de P existe, es decir, que al llevar el sistema a coordenadas dq , es posible llevarlo de regreso a coordenadas originales. entonces podemos escribir:

$$i_{abc} = P^{-1} i_{0dq} \quad (\text{D.6})$$

donde la inversa de (D.4) es

$$P^{-1} = \sqrt{2/3} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & \cos \theta & \text{sen } \theta \\ 1/\sqrt{2} & \cos(\theta - 2\pi/3) & \text{sen}(\theta - 2\pi/3) \\ 1/\sqrt{2} & \cos(\theta + 2\pi/3) & \text{sen}(\theta + 2\pi/3) \end{bmatrix} \quad (\text{D.7})$$

notese que $P^{-1} = P^T$, lo cual indica que la transformación P es ortogonal, esto demuestra que la transformación P no altera la potencia del sistema.

D.2.1. Ecuaciones de enlaces de flujo

Los enlaces de flujo en los devanados de la máquina síncrona se obtienen mediante la siguiente ecuación matricial:

$$\underbrace{\begin{matrix} \text{estator} \\ \\ \\ \\ \text{rotor} \end{matrix}} \left\{ \begin{matrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \\ \lambda_F \\ \lambda_D \\ \lambda_Q \end{matrix} \right\} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_a & L_{ab} & L_{ac} & L_{aF} & L_{aD} & L_{aQ} \\ L_{ba} & L_b & L_{bc} & L_{bF} & L_{bD} & L_{bQ} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_c & L_{cF} & L_{cD} & L_{cQ} \\ L_{Fa} & L_{Fb} & L_{Fc} & L_F & L_{FD} & L_{FQ} \\ L_{Da} & L_{Db} & L_{Dc} & L_{DF} & L_D & L_{DQ} \\ L_{Qa} & L_{Qb} & L_{Qc} & L_{QF} & L_{QD} & L_Q \end{bmatrix}}_{L_{abc}} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_F \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \quad (\text{D.8})$$

donde los elementos en la diagonal principal de L representan las inductancias propias y los elementos restantes representan las inductancias mutuas entre los devanados del generador. Estas inductancias pueden clasificarse de manera más detallada de la siguiente manera:

- **Inductancias propias en los devanados del estator:**

$$\begin{aligned}L_a &= L_s + L_m \cos 2\theta \\L_b &= L_s + L_m \cos (2\theta - 4\pi/3) \\L_c &= L_s + L_m \cos (2\theta + 4\pi/3)\end{aligned}$$

donde $L_s > L_m$ siendo L_s la componente fija de la inductancia y L_m el valor máximo de la componente que varía con la posición del rotor.

- **Inductancias propias en el rotor:** L_F , L_D y L_Q son las inductancias propias en el devanado de campo, en el devanado de amortiguamiento en el eje directo y en el devanado de amortiguamiento en el eje en cuadratura respectivamente.

- **Inductancias mutuas entre los devanados del estator:**

$$\begin{aligned}L_{ab} &= L_{ba} = -M_s - L_m \cos 2(\theta + \pi/6) \\L_{bc} &= L_{cb} = -M_s - L_m \cos 2(\theta + \pi/2) \\L_{ca} &= L_{ac} = -M_s - L_m \cos 2(\theta + \pi/6)\end{aligned}$$

donde $|M_s| > L_m$

- **Inductancias mutuas entre los devanados del rotor:**

$$\begin{aligned}L_{FD} &= L_{DF} = M_R \\L_{FQ} &= L_{QF} = 0 \\L_{DQ} &= L_{QD} = 0\end{aligned}$$

- **Inductancias mutuas entre los devanados del estator y el devanado de campo F:**

$$\begin{aligned}L_{aF} &= L_{Fa} = M_F \cos \theta \\L_{bF} &= L_{Fb} = M_F \cos (\theta - 2\pi/3) \\L_{cF} &= L_{Fc} = M_F \cos (\theta + 2\pi/3)\end{aligned}$$

- **Inductancias mutuas entre los devanados del estator y el devanado de amortiguamiento D:**

$$\begin{aligned}L_{aD} &= L_{Da} = M_D \cos \theta \\L_{bD} &= L_{Db} = M_D \cos (\theta - 2\pi/3) \\L_{cD} &= L_{Dc} = M_D \cos (\theta + 2\pi/3)\end{aligned}$$

- **Inductancias mutuas entre los devanados del estator y el devanado de amortiguamiento Q:**

$$\begin{aligned} L_{aQ} &= L_{Qa} = M_Q \cos \theta \\ L_{bQ} &= L_{Qb} = M_Q \cos (\theta - 2\pi/3) \\ L_{cQ} &= L_{Qc} = M_Q \cos (\theta + 2\pi/3) \end{aligned}$$

Todas las inductancias se miden en Henrios H.

Al utilizar la transformación de Park en las ecuaciones de los enlaces de flujo se tiene

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{abc} \\ \lambda_{FDQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{ss} & L_{sr} \\ L_{rs} & L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{abc} \\ i_{FDQ} \end{bmatrix} \quad (\text{D.9})$$

donde

$$\begin{aligned} L_{ss} &= \text{matriz de inductancias del estator} \\ L_{sr}, L_{rs} &= \text{matriz de inductancias entre el estator y el rotor} \\ L_{rr} &= \text{matriz de inductancias del rotor} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_{0dq} \\ \lambda_{FDQ} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} PL_{ss}P^{-1} & PL_{sr} \\ L_{rs}P^{-1} & L_{rr} \end{bmatrix}}_{L_{0dq}} \begin{bmatrix} i_{0dq} \\ i_{FDQ} \end{bmatrix} \quad (\text{D.10})$$

Para calcular la matriz de inductancias L_{abc} en coordenadas dq es decir, la matriz L_{0dq} . realizamos las operaciones indicadas en (D.10) evaluando en $\theta = 0$.

$$P = \sqrt{2/3} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ \cos \theta & \cos (\theta - 2\pi/3) & \cos (\theta + 2\pi/3) \\ \text{sen } \theta & \text{sen } (\theta - 2\pi/3) & \text{sen } (\theta + 2\pi/3) \end{bmatrix} \Bigg|_{\theta=0} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \sqrt{2/3} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & \cos \theta & \text{sen } \theta \\ 1/\sqrt{2} & \cos (\theta - 2\pi/3) & \text{sen } (\theta - 2\pi/3) \\ 1/\sqrt{2} & \cos (\theta + 2\pi/3) & \text{sen } (\theta + 2\pi/3) \end{bmatrix} \Bigg|_{\theta=0} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$L_{ss} = \left[\begin{array}{ccc} L_a & L_{ab} & L_{ac} \\ L_{ba} & L_b & L_{bc} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_c \end{array} \right] \Big|_{\theta=0} = \left[\begin{array}{ccc} L_m + L_s & -1/2L_m - M_s & -1/2L_m - M_s \\ -1/2L_m - M_s & L_s - 1/2L_m & L_m - M_s \\ -1/2L_m - M_s & L_m - M_s & L_s - 1/2L_m \end{array} \right]$$

$$L_{sr} = \left[\begin{array}{ccc} L_{aF} & L_{aD} & L_{aQ} \\ L_{bF} & L_{bD} & L_{bQ} \\ L_{cF} & L_{cD} & L_{cQ} \end{array} \right] \Big|_{\theta=0} = \left[\begin{array}{ccc} M_F & M_D & 0 \\ -1/2M_F & -1/2M_D & -\sqrt{3}/2M_Q \\ -1/2M_F & -1/2M_D & \sqrt{3}/2M_Q \end{array} \right]$$

$$L_{rs} = L_{sr}^T = \left[\begin{array}{ccc} L_{Fa} & L_{Fb} & L_{Fc} \\ L_{Da} & L_{Db} & L_{Dc} \\ L_{Qa} & L_{Qb} & L_{Qc} \end{array} \right] \Big|_{\theta=0} = \left[\begin{array}{ccc} M_F & -1/2M_F & -1/2M_F \\ M_D & -1/2M_D & -1/2M_D \\ 0 & -\sqrt{3}/2M_Q & \sqrt{3}/2M_Q \end{array} \right]$$

$$PL_{ss}P^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} L_s - 2M_s & 0 & 0 \\ 0 & L_s + 3/2L_m + M_s & 0 \\ 0 & 0 & L_s - 3/2L_m + M_s \end{array} \right]$$

$$PL_{sr} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}/2M_F & \sqrt{3}/2M_D & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2M_Q \end{array} \right]$$

$$L_{rs}P^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & \sqrt{3}/2M_F & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2M_D & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2M_Q \end{array} \right]$$

$$L_{rr} = \left[\begin{array}{ccc} L_F & L_{FD} & L_{FQ} \\ L_{DF} & L_D & L_{DQ} \\ L_{QF} & L_{QD} & L_Q \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} L_F & M_R & 0 \\ M_R & L_D & 0 \\ 0 & 0 & L_Q \end{array} \right]$$

Obteniéndose,

$$\left[\begin{array}{c} \lambda_0 \\ \lambda_d \\ \lambda_q \\ \lambda_F \\ \lambda_D \\ \lambda_Q \end{array} \right] = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_d & 0 & kM_F & kM_D & 0 \\ 0 & 0 & L_q & 0 & 0 & kM_Q \\ \hline 0 & kM_F & 0 & L_F & M_R & 0 \\ 0 & kM_D & 0 & M_R & L_D & 0 \\ 0 & 0 & kM_Q & 0 & 0 & L_Q \end{array} \right]}_{L_{0dq}} \left[\begin{array}{c} i_0 \\ i_d \\ i_q \\ i_F \\ i_D \\ i_Q \end{array} \right] \quad (\text{D.11})$$

donde

$$\begin{aligned} L_d &:= L_s + 3/2L_m + M_s & L_q &:= L_s - 3/2L_m + M_s \\ L_0 &:= L_s - 2M_s & k &:= \sqrt{3}/2 \end{aligned}$$

D.2.2. Ecuaciones de voltaje

El circuito del generador síncrono se muestra en la Figura D.5,

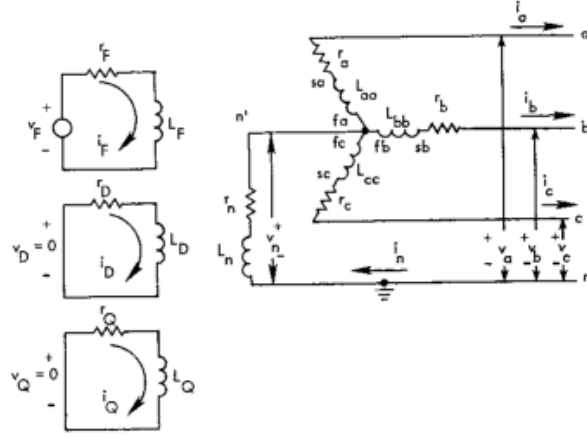


Figura D.5: Circuito equivalente del generador síncrono.

Asumiendo que las corrientes salen fuera de las terminales del generador, las ecuaciones dinámicas de voltaje están dadas por:

$$v = -Ri - \dot{\lambda} + v_n \quad (\text{D.12})$$

de manera más explícita tenemos:

$$\begin{bmatrix} v_{abc} \\ v_{FDQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{abc} & 0 \\ 0 & R_{FDQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{abc} \\ i_{FDQ} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{abc} \\ \dot{\lambda}_{FDQ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_n \\ 0 \end{bmatrix} \text{ V} \quad (\text{D.13})$$

donde:

$$v_{abc} := \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} \quad v_{FDQ} := \begin{bmatrix} -v_F \\ v_D \\ v_Q \end{bmatrix} \quad i_{abc} := \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad i_{FDQ} := \begin{bmatrix} i_F \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix}$$

$$R_{abc} := \begin{bmatrix} r_a & 0 & 0 \\ 0 & r_b & 0 \\ 0 & 0 & r_c \end{bmatrix} \quad R_{FDQ} := \begin{bmatrix} r_F & 0 & 0 \\ 0 & r_D & 0 \\ 0 & 0 & r_Q \end{bmatrix} \quad \dot{\lambda}_{abc} := \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_a \\ \dot{\lambda}_b \\ \dot{\lambda}_c \end{bmatrix} \quad \dot{\lambda}_{FDQ} := \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_F \\ \dot{\lambda}_D \\ \dot{\lambda}_Q \end{bmatrix}$$

si $r_a = r_b = r_c = r$, lo cual normalmente es el caso, entonces:

$$R_{abc} = \begin{bmatrix} r_a & 0 & 0 \\ 0 & r_b & 0 \\ 0 & 0 & r_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} = rI_3$$

La contribución del voltaje en la línea neutra se define como:

$$\begin{aligned} v_n &= -r_n \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} - L_n \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{i}_b \\ \dot{i}_c \end{bmatrix} \\ &= -r_n U_3 i_{abc} - L_n U_3 \dot{i}_{abc} \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

Al aplicar la transformación de Park a (D.13) tenemos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{abc} \\ v_{FDQ} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{abc} & 0 \\ 0 & R_{FDQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{abc} \\ i_{FDQ} \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{abc} \\ \dot{\lambda}_{FDQ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_n \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} v_{0dq} \\ v_{FDQ} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} PR_{abc}P^{-1} & 0 \\ 0 & R_{FDQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{0dq} \\ i_{FDQ} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P\dot{\lambda}_{abc} \\ \dot{\lambda}_{FDQ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Pv_n \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

donde

$$PR_{abc}P^{-1} = R_{abc}$$

$$P\dot{\lambda}_{abc} = \dot{\lambda}_{0dq} - \dot{P}\lambda_{abc} = \dot{\lambda}_{0dq} - \dot{P}P^{-1}\lambda_{0dq}$$

$$\begin{aligned} Pv_n &= n_{0dq} \text{ (por definicion es el voltaje entre neutro y tierra en coordenadas } dq) \\ &= -Pr_n U_3 P^{-1} P i_{abc} - PL_n U_3 P^{-1} P \dot{i}_{abc} \\ &= - \begin{bmatrix} 3r_n i_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3L_n \dot{i}_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{bmatrix} v_{0dq} \\ v_{FDQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{abc} & 0 \\ 0 & R_{FDQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{0dq} \\ i_{FDQ} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{0dq} \\ \dot{\lambda}_{FDQ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{P}P^{-1}\lambda_{0dq} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{0dq} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.16})$$

Ahora, calculamos el termino $\dot{P}P^{-1}\lambda_{0dq}$ en la ecuación anterior

$$\dot{P}|_{\theta=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega\sqrt{2}/2 & -\omega\sqrt{2}/2 \\ \omega\sqrt{6}/3 & -\omega\sqrt{6}/6 & -\omega\sqrt{6}/6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{P}P^{-1}|_{\theta=0} &= \omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \dot{P}P^{-1}|_{\theta=0}\lambda_{0dq} &= \omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_d \\ \lambda_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega\lambda_q \\ \omega\lambda_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega L_q i_q - \omega k M_Q i_Q \\ \omega L_d i_d + \omega k M_F i_F + \omega k M_D i_D \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

sustituyendo (D.17) en (D.16), escribiendo de manera más explícita tenemos:

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ v_d \\ v_q \\ -v_F \\ v_D \\ v_Q \end{bmatrix} = - \left[\begin{array}{ccc|ccc} r + 3r_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & \omega L_q & 0 & 0 & \omega k M_Q \\ 0 & -\omega L_d & r & -\omega k M_F & -\omega k M_D & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & r_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_Q \end{array} \right] \begin{bmatrix} i_0 \\ i_d \\ i_q \\ i_F \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_0 \\ \dot{\lambda}_d \\ \dot{\lambda}_q \\ \dot{\lambda}_F \\ \dot{\lambda}_D \\ \dot{\lambda}_Q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3L_n \dot{i}_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{V} \quad (\text{D.18})$$

dado que la matriz de inductancias L_{0dq} es constante, entonces

$$\dot{\lambda}_{0dq} = L_{0dq} \dot{i}_{0dq} \quad (\text{D.19})$$

Al sustituir (D.19) en (D.18) tenemos:

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ v_d \\ v_q \\ -v_F \\ v_D \\ v_Q \end{bmatrix} = - \left[\begin{array}{ccc|ccc} r + 3r_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & \omega L_q & 0 & 0 & \omega k M_Q \\ 0 & -\omega L_d & r & -\omega k M_F & -\omega k M_D & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & r_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_Q \end{array} \right] \begin{bmatrix} i_0 \\ i_d \\ i_q \\ i_F \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} - \left[\begin{array}{ccc|ccc} L_0 + 3L_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_d & 0 & kM_F & kM_D & 0 \\ 0 & 0 & L_q & 0 & 0 & kM_Q \\ \hline 0 & kM_F & 0 & L_F & M_R & 0 \\ 0 & kM_D & 0 & M_R & L_D & 0 \\ 0 & 0 & kM_Q & 0 & 0 & L_Q \end{array} \right] \begin{bmatrix} \dot{i}_0 \\ \dot{i}_d \\ \dot{i}_q \\ \dot{i}_F \\ \dot{i}_D \\ \dot{i}_Q \end{bmatrix}$$

Asumiendo que el sistema opera en condiciones balanceadas, es decir $v_0 = 0$, y acomodando las variables de estado con el objetivo de escribir la matriz de inductancias en forma diagonal a bloques, esto permite calcular su inversa de manera más fácil, entonces tenemos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_d \\ -v_F \\ v_D \\ v_q \\ v_Q \end{bmatrix}}_v = - \underbrace{\begin{bmatrix} r & 0 & 0 & \omega L_q & \omega k M_Q \\ 0 & r_F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_D & 0 & 0 \\ -\omega L_d & -\omega k M_F & -\omega k M_D & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_Q \end{bmatrix}}_{R+\omega N} \underbrace{\begin{bmatrix} i_d \\ i_F \\ i_D \\ i_q \\ i_Q \end{bmatrix}}_i - \underbrace{\begin{bmatrix} L_d & kM_F & kM_D & 0 & 0 \\ kM_F & L_F & M_R & 0 & 0 \\ kM_D & M_R & L_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_q & kM_Q \\ 0 & 0 & 0 & kM_Q & L_Q \end{bmatrix}}_L \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{i}_d \\ \dot{i}_F \\ \dot{i}_D \\ \dot{i}_q \\ \dot{i}_Q \end{bmatrix}}_i \quad (\text{D.20})$$

donde

$$R + \omega N = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_Q \end{bmatrix} + \omega \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & L_q & kM_Q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -L_d & -kM_F & -kM_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_N$$

entonces

$$\dot{i} = -L^{-1}(R + \omega N)i - L^{-1}v \quad (\text{D.21})$$

D.2.3. Ecuación de movimiento

La ecuación dinámica que describe el movimiento del rotor es:

$$J\ddot{\theta} = (2J/p)\dot{\omega} = T_m - T_e - T_d = T_a \quad (\text{D.22})$$

donde:

J es el momento de inercia del rotor expresado $\text{kg}\cdot\text{m}^2$

θ es el ángulo mecánico del rotor con respecto a un marco de referencia fijo expresado en radianes

p es el número de polos

T_a es el torque acelerante expresado en $\text{N}\cdot\text{m}$

T_m es el torque mecánico expresado en $\text{N}\cdot\text{m}$

T_e es el torque eléctrico expresado en $\text{N}\cdot\text{m}$

$T_d = D\omega$ (donde D es una constante de amortiguamiento) es el torque asociado a los devanados de amortiguamiento en el rotor expresado en $\text{N}\cdot\text{m}$

En la ecuación (D.22) consideramos que un torque positivo T_m acelera el rotor, mientras que un torque positivo en T_e o en T_d desacelera el rotor. El ángulo mecánico del rotor está dado por:

$$\theta = \omega_R t + \alpha + \delta_m \quad (\text{D.23})$$

donde ω_R es la velocidad angular nominal del rotor, el ángulo α solo se necesita si δ_m se mide con respecto a un ángulo diferente de cero en el marco de referencia fijo, en [20] se sugiere $\alpha = \pi/2$.

El ángulo del torque δ el cual es el mismo que el ángulo del torque eléctrico δ_e esta relacionado con el ángulo del torque mecánico δ_m por:

$$\delta = \delta_e = (p/2)\delta_m \quad (\text{D.24})$$

Despejando $\dot{\omega}$ en (D.22) tenemos,

$$\dot{\omega} = \frac{p}{2J}(T_m - T_e - T_d) \quad (\text{D.25})$$

Donde el torque eléctrico trifásico T_e se obtiene a partir de la potencia eléctrica en las terminales del generador,

$$p_{out} = v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c = v_{abc}^T i_{abc} \quad (D.26)$$

como se había mencionado anteriormente la transformación de Park es ortogonal, por lo tanto, al utilizar dicha transformación la potencia se preserva, entonces,

$$\begin{aligned} p_{out} &= v_{abc}^T P P^{-1} i_{abc} \\ &= v_{abc}^T (P^{-1})^T P^{-1} i_{abc} \\ &= v_d i_d + v_q i_q + v_0 i_0 \end{aligned} \quad (D.27)$$

por simplicidad podemos considerar condiciones balanceadas, es decir $v_0 = i_0 = 0$. entonces:

$$p_{out} = v_d i_d + v_q i_q \quad (D.28)$$

A partir de (D.18) obtenemos:

$$v_d = -r i_d - \omega L_q i_q - \omega k M_Q i_Q - \dot{\lambda}_d \quad (D.29)$$

$$v_q = -r i_q + \omega L_d i_d + \omega k M_F i_F + \omega k M_D i_D - \dot{\lambda}_q \quad (D.30)$$

al sustituir v_d y v_q en (D.28) se tiene:

$$\begin{aligned} p_{out} &= -\dot{\lambda}_d i_d - \dot{\lambda}_q i_q + (i_q L_d i_d + i_q k M_F i_F + i_q k M_D i_D - L_q i_q i_d - k M_Q i_Q i_d) \omega - r i_d^2 - r i_q^2 \\ &= -\dot{\lambda}_d i_d - \dot{\lambda}_q i_q + (i_q (L_d i_d + k M_F i_F + k M_D i_D) - i_d (L_q i_q + k M_Q i_Q)) \omega - r (i_d^2 + i_q^2) \end{aligned} \quad (D.31)$$

A partir de (D.11) sabemos que:

$$\lambda_d = L_d i_d + k M_F i_F + k M_D i_D \quad (D.32)$$

$$\lambda_q = L_q i_q + k M_Q i_Q \quad (D.33)$$

entonces:

$$p_{out} = - \left(\dot{\lambda}_d i_d + \dot{\lambda}_q i_q \right) + \underbrace{(i_q \lambda_d - i_d \lambda_q)}_{P_{fld}} \omega - r (i_d^2 + i_q^2) \quad (D.34)$$

en (D.34) se identifican tres términos: el primero asociado a la derivada del flujo magnético en el estator, el segundo asociado a la potencia eléctrica transferida por el estator hacia el rotor a través del entrehierro (potencia desacelerante) y el tercer término asociado a pérdidas resistivas en los devanados del estator. El torque eléctrico total de la máquina es obtenido por el término asociado a la potencia desacelerante.

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{\partial P_{fld}}{\partial \omega} = i_q \lambda_d - i_d \lambda_q \\ &= L_d i_q i_d + k M_F i_q i_F + k M_D i_q i_D - L_q i_d i_q - k M_Q i_d i_Q \\ &= \begin{bmatrix} L_d i_q & k M_F i_q & k M_D i_q & -L_q i_d & -k M_Q i_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_F \\ i_D \\ i_q \\ i_Q \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (D.35)$$

sustituyendo (D.35) en (D.25) y escribiendo en forma vectorial, tenemos:

$$\dot{\omega} = \frac{pT_m}{2J} + \begin{bmatrix} \frac{-pL_d i_q}{2J} & \frac{-pkM_F i_q}{2J} & \frac{-pkM_D i_q}{2J} & \frac{pL_q i_d}{2J} & \frac{pkM_Q i_d}{2J} & \frac{-pD}{2J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_F \\ i_D \\ i_q \\ i_Q \\ \omega \end{bmatrix} \quad (\text{D.36})$$

Finalmente, el eje d del rotor se encuentra a partir de,

$$\theta = \omega_R t + \delta + \frac{\pi}{2} \quad (\text{D.37})$$

donde ω_R es la frecuencia angular nominal en rad/s y δ es el desplazamiento angular del torque eléctrico medido en radianes eléctricos. Despejando δ y calculando su derivada en el tiempo tenemos:

$$\dot{\delta} = \omega - \omega_R \quad (\text{D.38})$$

Incorporando (D.21), (D.36) y (D.38) obtenemos el modelo no lineal del generador síncrono

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_d \\ \dot{i}_F \\ \dot{i}_D \\ \dot{i}_q \\ \dot{i}_Q \\ \dot{\omega} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ \hline \end{array} \right] \begin{bmatrix} i_d \\ i_F \\ i_D \\ i_q \\ i_Q \\ \omega \\ \delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \frac{pT_m}{2J} \\ -\omega_R \end{bmatrix} \quad (\text{D.39})$$

En la siguiente sección se expone la representación en por unidad aplicada a las ecuaciones dinámicas del generador síncrono lo cual es una práctica común en la literatura.

D.2.4. Representación de las ecuaciones dinámicas del generador síncrono en por unidad

Es común en la literatura expresar las ecuaciones dinámicas en por unidad (pu), esto se realiza normalizando las ecuaciones dinámicas utilizando un conjunto de cantidades base, esto permite una simulación del sistema más clara ya que las variables están normalizadas. En [20] se elige las siguientes cantidades base

$$\begin{aligned} S_B = S_R &= \text{Potencia aparente nominal por fase, VA rms} \\ V_B = V_R &= \text{Voltaje nominal de linea a neutro, V rms} \\ \omega_B = \omega_R &= \text{Frecuencia eléctrica angular nominal, rad/s} \end{aligned}$$

Utilizando la base anterior, en [20] en la sección 4.8 se demuestra que las ecuaciones de voltaje normalizadas son idénticas a las ecuaciones de voltaje en unidades convencionales, esto permite usar las mismas expresiones analíticas ya sea en unidades convencionales o en pu. Sin embargo, las ecuaciones de torque no son iguales. Para normalizar (D.22) dividimos ambos lados de la ecuación por un torque base T_B , entonces:

$$\frac{2J}{pT_B}\dot{\omega} = \frac{T_a}{T_B} = T_{au} \quad (\text{D.40})$$

Sabemos que

$$p = \frac{2\omega_R}{\omega_{mR}} \quad (\text{D.41})$$

donde ω_{mR} es la frecuencia angular nominal mecánica mientras que ω_R es la frecuencia angular nominal eléctrica. En el libro de Anderson eligen $T_B = \frac{S_{B3}}{\omega_{mR}}$ (Notese que utilizan S_{B3} la potencia aparente trifásica nominal en lugar de S_B la potencia aparente nominal por fase). entonces podemos escribir (D.40) como:

$$\frac{J\omega_{mR}^2}{\omega_R S_{B3}}\dot{\omega} = T_{au} \quad (\text{D.42})$$

Definiendo $W_k = \frac{1}{2}J\omega_{mR}^2$ como la energía cinética del rotor (medida en joules) podemos escribir (D.42) como:

$$\frac{2W_k}{\omega_R S_{B3}}\dot{\omega} = T_{au} \quad (\text{D.43})$$

Definiendo la constante $H := \frac{W_k}{S_{B3}}$ (medida en segundos) escribimos (D.43) como:

$$\frac{2H}{\omega_R}\dot{\omega} = T_{au} \quad (\text{D.44})$$

En la ecuación (D.44) anterior el torque esta en pu, sin embargo falta representar t y ω en pu, para esto consideramos:

$$\omega_u = \frac{\omega}{\omega_B} \quad t_u = \omega_B t$$

si t y T_a están en pu entonces:

$$\frac{2H}{\omega_R} \frac{d\omega}{dt} = \frac{2H\omega_B}{\omega_R} \frac{d\omega}{dt_u} = \underbrace{2H}_{\tau_j} \frac{d\omega}{dt_u} = T_{au} \quad (\text{D.45})$$

si ω y T_a están en pu entonces:

$$\frac{2H}{\omega_R} \frac{d\omega}{dt} = \frac{2H}{\omega_R} \frac{d(\omega_u \omega_B)}{dt} = \underbrace{2H}_{\tau_j} \frac{d\omega_u}{dt} = T_{au} \quad (\text{D.46})$$

si ω , t y T_a están en pu entonces:

$$\frac{2H}{\omega_R} \frac{d\omega}{dt} = \frac{2H\omega_B}{\omega_R} \frac{d(\omega_u\omega_B)}{dt} = \underbrace{2H\omega_B}_{\tau_j} \frac{d\omega_u}{dt_u} = T_{au} \quad (\text{D.47})$$

La ecuación (D.47) es la ecuación de torque más común en la literatura. S_{B3} la potencia aparente nominal por fase se utiliza para definir $T_B = \frac{S_{B3}}{\omega_{mR}}$. Podemos decir que $S_{B3} = 3S_B$; el torque eléctrico trifásico T_e se normaliza utilizando $T_{eB} = \frac{S_B}{\omega_B}$ de la siguiente manera,

$$T_{eu} = \frac{T_e}{T_{eB}} \quad \Longleftrightarrow \quad T_e = T_{eB} T_{eu}$$

entonces escribimos:

$$\begin{aligned} \tau_j \dot{\omega} &= \frac{T_m}{T_B} - \frac{T_e}{T_B} - \frac{T_d}{T_B} \\ &= T_{mu} - \frac{T_{eB}}{T_B} T_{eu} - T_{du} \end{aligned} \quad (\text{D.48})$$

sabemos que $\frac{T_{eB}}{T_B} = \frac{S_B\omega_{mR}}{3S_B\omega_R}$, recordando que $p = \frac{2\omega_R}{\omega_{mR}}$ entonces $\frac{T_{eB}}{T_B} = \frac{S_B\omega_{mR}}{3S_B\omega_R} = \frac{2}{3p}$. Al sustituir $\frac{T_{eB}}{T_B} = \frac{2}{3p}$ en (D.48) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \frac{T_{mu}}{\tau_j} - \frac{2T_{eu}}{3p\tau_j} - \frac{T_{du}}{\tau_j} \\ &= \frac{T_{mu}}{\tau_j} + \begin{bmatrix} -2L_d i_q & -2kM_F i_q & -2kM_D i_q & 2L_q i_d & 2kM_Q i_d & -D \\ 3p\tau_j & 3p\tau_j & 3p\tau_j & 3p\tau_j & 3p\tau_j & \tau_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_F \\ i_D \\ i_q \\ i_Q \\ \omega \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{D.49})$$

Incorporando (D.21), (D.38) y (D.49) obtenemos el modelo no lineal en pu del generador síncrono,

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_d \\ \dot{i}_F \\ \dot{i}_D \\ \dot{i}_q \\ \dot{i}_Q \\ \dot{\omega} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_{dq}^{-1}(R + \omega N) & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ \frac{-2L_d i_q}{3p\tau_j} & \frac{-2kM_F i_q}{3p\tau_j} & \frac{-2kM_D i_q}{3p\tau_j} & \frac{2L_q i_d}{3p\tau_j} & \frac{2kM_Q i_d}{3p\tau_j} & \frac{-D}{\tau_j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_F \\ i_D \\ i_q \\ i_Q \\ \omega \\ \delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -L_{dq}^{-1}v \\ \\ \\ \\ \\ \frac{T_{mu}}{\tau_j} \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\text{D.50})$$

D.2.5. Modelo del generador síncrono conectado a un bus infinito

En esta sección analizaremos las expresiones matemáticas que describen el funcionamiento de un generador síncrono conectado a un bus infinito como se muestra en la Figura D.6.

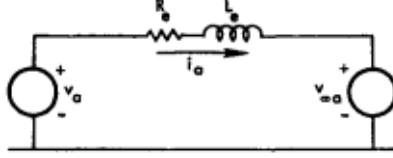


Figura D.6: Generador síncrono conectado a un bus infinito.

Los voltajes en las fases a , b y c son,

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{\infty a} \\ v_{\infty b} \\ v_{\infty c} \end{bmatrix} + R_e \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + L_e \begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{i}_b \\ \dot{i}_c \end{bmatrix} \quad (\text{D.51})$$

Podemos escribir (D.51) utilizando notación matricial,

$$v_{abc} = v_{\infty abc} + R_e i_{abc} + L_e \dot{i}_{abc} \quad (\text{D.52})$$

transformando (D.52) en coordenadas $0dq$ tenemos:

$$v_{0dq} = P v_{abc} = P v_{\infty abc} + R_e i_{0dq} + L_e P \dot{i}_{abc} \quad (\text{D.53})$$

asumiendo que $v_{\infty abc}$ es un conjunto de voltajes trifásicos balanceados, es decir

$$v_{\infty abc} = \sqrt{2} V_{\infty} \begin{bmatrix} \cos(\omega_R t + \alpha) \\ \cos(\omega_R t + \alpha - 120) \\ \cos(\omega_R t + \alpha + 120) \end{bmatrix} \quad (\text{D.54})$$

donde V_{∞} es la magnitud del voltaje rms en cada fase. Ahora transformamos (D.54) a coordenadas dq utilizando $\theta = \omega_R t + \delta + \pi/2$,

$$v_{0dq} = P v_{\infty abc} = V_{\infty} \sqrt{3} \begin{bmatrix} 0 \\ -\text{sen}(\delta - \alpha) \\ \cos(\delta - \alpha) \end{bmatrix} \quad (\text{D.55})$$

El último término de (D.53) se calcula a partir de la derivada de $i_{0dq} = P i_{abc}$,

$$\dot{i}_{0dq} = P \dot{i}_{abc} + \dot{P} i_{abc} = P \dot{i}_{abc} + \dot{P} P^{-1} i_{0dq} \iff P \dot{i}_{abc} = \dot{i}_{0dq} - \dot{P} P^{-1} i_{0dq}$$

donde anteriormente se demostró que $\dot{P} P^{-1}|_{\theta=0} = \omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ v_d \\ v_q \end{bmatrix} = P v_{abc} = V_{\infty} \sqrt{3} \begin{bmatrix} 0 \\ -\text{sen}(\delta - \alpha) \\ \cos(\delta - \alpha) \end{bmatrix} + R_e \begin{bmatrix} i_0 \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix} + L_e \begin{bmatrix} \dot{i}_0 \\ \dot{i}_d \\ \dot{i}_q \end{bmatrix} - \omega L_e \begin{bmatrix} 0 \\ -i_q \\ i_d \end{bmatrix} \quad (\text{D.56})$$

El ángulo δ se relaciona con la velocidad angular por $\dot{\delta} = \omega - 1$ en pu, o por $\delta = \delta_0 + \int_0^t (\omega - \omega_R) dt$ en radianes. La ecuación (D.56) muestra la restricción que existe entre el voltaje en terminales v_{0dq} y la corriente del generador i_{0dq} cuando el generador se conecta a un bus infinito. Observe que existen dos no linealidades presentes en (D.56), la primera debida al término $\omega L_e i_{0dq}$ y la segunda debida a las funciones trigonométricas presentes en v_{0dq} . La ecuación dinámica $-L\dot{i} = (R + \omega N) i + v$ escrita en forma explícita es:

$$\begin{aligned}
-\begin{bmatrix} L_d & kM_F & kM_D & 0 & 0 \\ kM_F & L_F & M_R & 0 & 0 \\ kM_D & M_R & L_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_q & kM_Q \\ 0 & 0 & 0 & kM_Q & L_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_d \\ \dot{i}_F \\ \dot{i}_D \\ \dot{i}_q \\ \dot{i}_Q \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_Q \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & L_q & kM_Q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -L_d & -kM_F & -kM_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} i_d \\ i_F \\ i_D \\ i_q \\ i_Q \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} -K \text{sen}(\delta - \alpha) + R_e i_d + L_e \dot{i}_d - \omega L_e i_q \\ -v_F \\ 0 \\ K \text{cos}(\delta - \alpha) + R_e i_q + L_e \dot{i}_q - \omega L_e i_d \\ 0 \end{bmatrix} \tag{D.57}
\end{aligned}$$

donde $K = \sqrt{3}V_\infty$; La ecuación (D.57) puede escribirse como,

$$\begin{aligned}
-\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{L}_d & kM_F & kM_D & 0 & 0 \\ kM_F & L_F & M_R & 0 & 0 \\ kM_D & M_R & L_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{L}_q & kM_Q \\ 0 & 0 & 0 & kM_Q & L_Q \end{bmatrix}}_{\hat{L}} \begin{bmatrix} \dot{i}_d \\ \dot{i}_F \\ \dot{i}_D \\ \dot{i}_q \\ \dot{i}_Q \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{R}_s & 0 & 0 & \omega \hat{L}_q & \omega kM_Q \\ 0 & r_F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_D & 0 & 0 \\ -\omega \hat{L}_d & -\omega kM_F & -\omega kM_D & \hat{R}_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_Q \end{bmatrix}}_{\hat{R} + \omega \hat{N}} \begin{bmatrix} i_d \\ i_F \\ i_D \\ i_q \\ i_Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K \text{sen} \gamma \\ -v_F \\ 0 \\ K \text{cos} \gamma \\ 0 \end{bmatrix} \tag{D.58}
\end{aligned}$$

donde:

$$\hat{R}_s = r + R_e \quad \hat{L}_d = L_d + L_e \quad \hat{L}_q = L_q + L_e \quad \gamma = \delta - \alpha$$

premultiplicando (D.58) por $-\hat{L}$ y añadiendo las ecuaciones de $\dot{\omega}$ y $\dot{\delta}$ tenemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_d \\ \dot{i}_F \\ \dot{i}_D \\ \dot{i}_q \\ \dot{i}_Q \\ \dot{\omega} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ \hline \frac{-2L_d i_q}{3p\tau_j} & \frac{-2kM_F i_q}{3p\tau_j} & \frac{-2kM_D i_q}{3p\tau_j} & \frac{2L_q i_d}{3p\tau_j} & \frac{2kM_Q i_d}{3p\tau_j} & \frac{-D}{\tau_j} & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_F \\ i_D \\ i_q \\ i_Q \\ \omega \\ \delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ \hline 0 & 1 & 0 & & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K \text{sen} \gamma \\ -v_F \\ 0 \\ K \text{cos} \gamma \\ 0 \\ \frac{T_m u}{\tau_j} \\ -1 \end{bmatrix} \tag{D.59}$$

El modelo descrito por (D.59) está en la forma $\dot{x} = f(x, u, t)$, donde $x^T = [i_d \ i_F \ i_D \ i_q \ i_Q \ \omega \ \delta]$; v_f y T_m son las entradas del sistema. El efecto de la carga en la línea de transmisión ha sido incorporado en las matrices \hat{R} , \hat{L} y \hat{N} . El voltaje del bus infinito aparece en los términos $K \text{sen} \gamma$ y $K \text{cos} \gamma$, notese que estas funciones de δ y α no son entradas de control en el sistema.

D.2.6. Linealización del modelo del generador síncrono

En esta subsección se expone el procedimiento de linealización del generador síncrono conectado a un bus infinito. Cuando un generador síncrono trabaja en un determinado punto de operación y es sujeto a pequeñas perturbaciones en la carga este tiende a adquirir un nuevo punto de operación. Durante la transición del sistema desde un punto de operación inicial hacia un punto de operación final el comportamiento del sistema es oscilatorio.

Sea x el vector de variables de estado del generador síncrono,

$$x^T = [i_d \ i_F \ i_D \ i_q \ i_Q \ \omega \ \delta] \quad (\text{D.60})$$

y x_0 el vector de estados en condiciones iniciales

$$x^T(t_0) = x_0^T = [i_{d0} \ i_{F0} \ i_{D0} \ i_{q0} \ i_{Q0} \ \omega_0 \ \delta_0] \quad (\text{D.61})$$

Al ocurrir una pequeña perturbación en t_0 , el vector de estados x cambiará ligeramente de x_0 . es decir,

$$x = x_0 + x_\Delta \quad (\text{D.62})$$

donde x_Δ es un pequeño incremento en el vector de estados. El modelo en variables de estado es de la forma $\dot{x} = f(x, u, t)$. Una aproximación lineal de $f(x, u, t)$ valida en una región cercana a x_0 se puede obtener mediante la serie de Taylor (despreciando los términos de orden superior) de la siguiente manera:

$$f(x_0 + x_\Delta, u, t) = f(x_0, t) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{\substack{x = x_0 \\ u = u_0}} (x - x_0) + \left. \frac{df}{du} \right|_{\substack{x = x_0 \\ u = u_0}} (u - u_0) \quad (\text{D.63})$$

$$= f(x_0, t) + A(x_0, u_0)x_\Delta + B(x_0, u_0)u_\Delta \quad (\text{D.64})$$

Es más fácil realizar el proceso de linealización del generador síncrono linealizando (D.20) y (D.49) para después despejar \dot{i}_{dq} que linealizar (D.50) directamente. Las ecuaciones para los voltajes en eje directo y en eje en cuadratura son:

$$v_d = -ri_d - \omega L_q i_q - \omega k M_Q i_Q - L_d \dot{i}_d - k M_F \dot{i}_F - k M_D \dot{i}_D \quad (\text{D.65})$$

$$v_q = \omega L_d i_d + \omega k M_F i_F + \omega k M_D i_D - ri_q - L_q \dot{i}_q - k M_Q \dot{i}_Q \quad (\text{D.66})$$

Para linealizar v_d se realiza el siguiente procedimiento

$$\begin{aligned}
v_{d0} + v_{d\Delta} &= -r(i_{d0} + i_{d\Delta}) - (\omega_0 + \omega_\Delta) L_q(i_{q0} + i_{q\Delta}) - (\omega_0 + \omega_\Delta) kM_Q(i_{Q0} + i_{Q\Delta}) \\
&\quad - L_d(\dot{i}_{d0} + \dot{i}_{d\Delta}) - kM_F(\dot{i}_{F0} + \dot{i}_{F\Delta}) - kM_D(\dot{i}_{D0} + \dot{i}_{D\Delta}) \\
&= -ri_{d0} - ri_{d\Delta} - \omega_0 L_q i_{q0} - \omega_0 L_q i_{q\Delta} - \omega_\Delta L_q i_{q0} - \omega_\Delta L_q i_{q\Delta} - \omega_0 kM_Q i_{Q0} \\
&\quad - \omega_0 kM_Q i_{Q\Delta} - \omega_\Delta kM_Q i_{Q0} - \omega_\Delta kM_Q i_{Q\Delta} - L_d \dot{i}_{d0} - L_d \dot{i}_{d\Delta} - kM_F \dot{i}_{F0} \\
&\quad - kM_F \dot{i}_{F\Delta} - kM_D \dot{i}_{D0} - kM_D \dot{i}_{D\Delta} \\
&= - \underbrace{(ri_{d0} + \omega_0 L_q i_{q0} + \omega_0 kM_Q i_{Q0} + L_d \dot{i}_{d0} + kM_F \dot{i}_{F0} + kM_D \dot{i}_{D0})}_{v_{d0}} \\
&\quad - ri_{d\Delta} - \omega_0 L_q i_{q\Delta} - L_q i_{q0} \omega_\Delta - L_q i_{q\Delta} \omega_\Delta - \omega_0 kM_Q i_{Q\Delta} - kM_Q i_{Q0} \omega_\Delta \\
&\quad - kM_Q i_{Q\Delta} \omega_\Delta - L_d \dot{i}_{d\Delta} - kM_F \dot{i}_{F\Delta} - kM_D \dot{i}_{D\Delta}
\end{aligned}$$

Despreciando los términos que involucran multiplicación entre variables de estado linealizadas (i.e. aquellas variables cuyo subíndice es Δ)

$$v_{d\Delta} = -ri_{d\Delta} - \omega_0 L_q i_{q\Delta} - \omega_0 kM_Q i_{Q\Delta} - (L_q i_{q0} + kM_Q i_{Q0}) \omega_\Delta - L_d \dot{i}_{d\Delta} - kM_F \dot{i}_{F\Delta} - kM_D \dot{i}_{D\Delta} \quad (\text{D.67})$$

recordando que $\lambda_q = L_q i_q + kM_Q i_Q$, entonces podemos escribir (D.67) como:

$$v_{d\Delta} = -ri_{d\Delta} - \omega_0 L_q i_{q\Delta} - \omega_0 kM_Q i_{Q\Delta} - \lambda_{q0} \omega_\Delta - L_d \dot{i}_{d\Delta} - kM_F \dot{i}_{F\Delta} - kM_D \dot{i}_{D\Delta}$$

Para linealizar v_q se realiza un procedimiento similar al anterior

$$\begin{aligned}
v_{q0} + v_{q\Delta} &= (\omega_0 + \omega_\Delta) L_d(i_{d0} + i_{d\Delta}) + (\omega_0 + \omega_\Delta) kM_F(i_{F0} + i_{F\Delta}) + (\omega_0 + \omega_\Delta) kM_D(i_{D0} + i_{D\Delta}) \\
&\quad - r(i_{q0} + i_{q\Delta}) - L_q(\dot{i}_{q0} + \dot{i}_{q\Delta}) - kM_Q(\dot{i}_{Q0} + \dot{i}_{Q\Delta}) \\
&= \omega_0 L_d i_{d0} + \omega_0 L_d i_{d\Delta} + \omega_\Delta L_d i_{d0} + L_d \omega_\Delta i_{d\Delta} + \omega_0 kM_F i_{F0} + \omega_0 kM_F i_{F\Delta} + kM_F i_{F0} \omega_\Delta \\
&\quad + kM_F \omega_\Delta i_{F\Delta} + \omega_0 kM_D i_{D0} + \omega_0 kM_D i_{D\Delta} + kM_D i_{D0} \omega_\Delta + kM_D \omega_\Delta i_{D\Delta} - ri_{q0} - ri_{q\Delta} \\
&\quad - L_q \dot{i}_{q0} - L_q \dot{i}_{q\Delta} - kM_Q \dot{i}_{Q0} - kM_Q \dot{i}_{Q\Delta} \\
&= \underbrace{\omega_0 L_d i_{d0} + \omega_0 kM_F i_{F0} + \omega_0 kM_D i_{D0} - ri_{q0} - L_q \dot{i}_{q0} - kM_Q \dot{i}_{Q0}}_{v_{q0}} + \omega_0 L_d i_{d\Delta} + \omega_\Delta L_d i_{d0} \\
&\quad + L_d \omega_\Delta i_{d\Delta} + \omega_0 kM_F i_{F\Delta} + kM_F i_{F0} \omega_\Delta + kM_F \omega_\Delta i_{F\Delta} + \omega_0 kM_D i_{D\Delta} + kM_D i_{D0} \omega_\Delta \\
&\quad + kM_D \omega_\Delta i_{D\Delta} - ri_{q\Delta} - L_q \dot{i}_{q\Delta} - kM_Q \dot{i}_{Q\Delta}
\end{aligned}$$

Despreciando los términos que involucran multiplicación entre variables de estado linealizadas (i.e. aquellas variables cuyo subíndice es Δ)

$$v_{q\Delta} = \omega_0 L_d i_{d\Delta} + \omega_0 kM_F i_{F\Delta} + \omega_0 kM_D i_{D\Delta} + (L_d i_{d0} + kM_F i_{F0} + kM_D i_{D0}) \omega_\Delta - ri_{q\Delta} - L_q \dot{i}_{q\Delta} - kM_Q \dot{i}_{Q\Delta} \quad (\text{D.68})$$

recordando que $\lambda_d = L_d i_d + kM_F i_F + kM_D i_D$, entonces podemos escribir (D.68) como:

$$v_{q\Delta} = \omega_0 L_d i_{d\Delta} + \omega_0 k M_F i_{F\Delta} + \omega_0 k M_D i_{D\Delta} + \lambda_{d0} \omega_\Delta - r i_{q\Delta} - L_q \dot{i}_{q\Delta} - k M_Q \dot{i}_{Q\Delta} \quad (\text{D.69})$$

en el voltaje del campo de excitación $-v_F = r_F i_F - k M_F \dot{i}_d - L_F \dot{i}_F - M_R \dot{i}_D$ cambiando las variables de estado por pequeños incrementos, es decir

$$-v_{F\Delta} = r_F i_{F\Delta} - k M_F \dot{i}_{d\Delta} - L_F \dot{i}_{F\Delta} - M_R \dot{i}_{D\Delta} \quad (\text{D.70})$$

En estado estable $v_D = -r_D i_D - k M_D \dot{i}_d - M_R \dot{i}_F - L_D \dot{i}_D = v_Q = -r_Q i_Q - k M_Q \dot{i}_q - L_Q \dot{i}_Q = 0$ cambiando las variables de estados por pequeños incrementos, entonces tenemos:

$$0 = -r_D i_{D\Delta} - k M_D \dot{i}_{d\Delta} - M_R \dot{i}_{F\Delta} - L_D \dot{i}_{D\Delta} \quad (\text{D.71})$$

$$0 = -r_Q i_{Q\Delta} - k M_Q \dot{i}_{q\Delta} - L_Q \dot{i}_{Q\Delta} \quad (\text{D.72})$$

Si el generador es conectado a un bus infinito como se muestra en la Figura D.6, entonces, las ecuaciones para los voltajes en eje directo y en eje en cuadratura son:

$$v_d = -K \text{sen}(\delta - \alpha) + R_e i_d + L_e \dot{i}_d + \omega L_e i_q \quad (\text{D.73})$$

$$v_q = K \text{cos}(\delta - \alpha) + R_e i_q + L_e \dot{i}_q - \omega L_e i_d \quad (\text{D.74})$$

donde $K = \sqrt{3}V_\infty$ y α es el angulo de \bar{V}_∞ . (D.73) se linealiza de la siguiente manera:

$$v_{d0} + v_{d\Delta} = -K \text{sen}(\delta_0 + \delta_\Delta - \alpha) + R_e (i_{d0} + i_{d\Delta}) + L_e (\dot{i}_{d0} + \dot{i}_{d\Delta}) + (\omega_0 + \omega_\Delta) L_e (i_{q0} + i_{q\Delta})$$

usando la identidad trigonométrica

$$\begin{aligned} \text{sen}(\delta_0 - \alpha + \delta_\Delta) &= \text{sen}(x \pm y) = \text{sen}(x)\text{cos}(y) \pm \text{cos}(x)\text{sen}(y) \\ &= \text{sen}(\delta_0 - \alpha)\text{cos}(\delta_\Delta) + \text{cos}(\delta_0 - \alpha)\text{sen}(\delta_\Delta) \end{aligned}$$

podemos escribir:

$$\begin{aligned} v_{d0} + v_{d\Delta} &= -K \text{sen}(\delta_0 - \alpha)\text{cos}(\delta_\Delta) - K \text{cos}(\delta_0 - \alpha)\text{sen}(\delta_\Delta) + R_e i_{d0} + R_e i_{d\Delta} \\ &\quad + L_e \dot{i}_{d0} + L_e \dot{i}_{d\Delta} + \omega_0 L_e i_{q0} + \omega_0 L_e i_{q\Delta} + \omega_\Delta L_e i_{q0} \\ &= \underbrace{-K \text{sen}(\delta_0 - \alpha) + R_e i_{d0} + L_e \dot{i}_{d0} + \omega L_e i_{q0}}_{v_{d0}} \\ &\quad - K \text{cos}(\delta_0 - \alpha)\delta_\Delta + R_e i_{d\Delta} + L_e \dot{i}_{d\Delta} + \omega_0 L_e i_{q\Delta} + L_e i_{q0}\omega_\Delta \end{aligned}$$

entonces:

$$v_{d\Delta} = -K \text{cos}(\delta_0 - \alpha)\delta_\Delta + R_e i_{d\Delta} + L_e \dot{i}_{d\Delta} + \omega_0 L_e i_{q\Delta} + L_e i_{q0}\omega_\Delta \quad (\text{D.75})$$

(D.74) se linealiza de la siguiente manera:

$$v_{q0} + v_{q\Delta} = K \text{cos}(\delta_0 + \delta_\Delta - \alpha) + R_e (i_{q0} + i_{q\Delta}) + L_e (\dot{i}_{q0} + \dot{i}_{q\Delta}) - (\omega_0 + \omega_\Delta) L_e (i_{d0} + i_{d\Delta})$$

usando la identidad trigonométrica

$$\begin{aligned}\cos(\delta_0 - \alpha + \delta_\Delta) &= \cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y) \\ &= \cos(\delta_0 - \alpha)\cos(\delta_\Delta) - \sin(\delta_0 - \alpha)\sin(\delta_\Delta)\end{aligned}$$

podemos escribir:

$$\begin{aligned}v_{q0} + v_{q\Delta} &= \underbrace{K\cos(\delta_0 - \alpha) + R_e\dot{i}_{q0} + L_e\dot{i}_{q0} - \omega L_e\dot{i}_{d0}}_{v_{q0}} \\ &\quad - K\sin(\delta_0 - \alpha)\delta_\Delta + R_e\dot{i}_{q\Delta} + L_e\dot{i}_{q\Delta} - \omega_0 L_e\dot{i}_{d\Delta} - L_e\dot{i}_{d0}\omega_\Delta\end{aligned}$$

entonces:

$$v_{q\Delta} = -K\sin(\delta_0 - \alpha)\delta_\Delta + R_e\dot{i}_{q\Delta} + L_e\dot{i}_{q\Delta} - \omega_0 L_e\dot{i}_{d\Delta} - L_e\dot{i}_{d0}\omega_\Delta \quad (\text{D.76})$$

sustituyendo (D.68) en (D.75) tenemos,

$$\begin{aligned}-r\dot{i}_{d\Delta} - \omega_0 L_q\dot{i}_{q\Delta} - \omega_0 kM_Q\dot{i}_{Q\Delta} - \lambda_{q0}\omega_\Delta - L_d\dot{i}_{d\Delta} - kM_F\dot{i}_{F\Delta} - kM_D\dot{i}_{D\Delta} \\ = -K\cos(\delta_0 - \alpha)\delta_\Delta + R_e\dot{i}_{d\Delta} + L_e\dot{i}_{d\Delta} + \omega_0 L_e\dot{i}_{q\Delta} + L_e\dot{i}_{q0}\omega_\Delta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 &= (r + R_e)\dot{i}_{d\Delta} + \omega_0(L_q + L_e)\dot{i}_{q\Delta} + (\lambda_{q0} + L_e\dot{i}_{q0})\omega_\Delta + (L_d + L_e)\dot{i}_{d\Delta} \\ &\quad + kM_F\dot{i}_{F\Delta} + kM_D\dot{i}_{D\Delta} + \omega_0 kM_Q\dot{i}_{Q\Delta} - K\cos(\delta_0 - \alpha)\delta_\Delta\end{aligned} \quad (\text{D.77})$$

sustituyendo (D.69) en (D.76) tenemos,

$$\begin{aligned}\omega_0 L_d\dot{i}_{d\Delta} + \omega_0 kM_F\dot{i}_{F\Delta} + \omega_0 kM_D\dot{i}_{D\Delta} + \lambda_{d0}\omega_\Delta - r\dot{i}_{q\Delta} - L_q\dot{i}_{q\Delta} - kM_Q\dot{i}_{Q\Delta} \\ = -K\sin(\delta_0 - \alpha)\delta_\Delta + R_e\dot{i}_{q\Delta} + L_e\dot{i}_{q\Delta} - \omega_0 L_e\dot{i}_{d\Delta} - L_e\dot{i}_{d0}\omega_\Delta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 &= -\omega_0(L_d + L_e)\dot{i}_{d\Delta} + (r + R_e)\dot{i}_{q\Delta} - (\lambda_{d0} + L_e\dot{i}_{d0})\omega_\Delta + (L_q + L_e)\dot{i}_{q\Delta} \\ &\quad - \omega_0 kM_F\dot{i}_{F\Delta} - \omega_0 kM_D\dot{i}_{D\Delta} + kM_Q\dot{i}_{Q\Delta} - K\sin(\delta_0 - \alpha)\delta_\Delta\end{aligned} \quad (\text{D.78})$$

Sustituyendo,

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_{d0} &= \lambda_{d0} + L_e\dot{i}_{d0} = (L_d + L_e)\dot{i}_{d0} + kM_F\dot{i}_{F\Delta} + kM_D\dot{i}_{D\Delta} \\ \hat{\lambda}_{q0} &= \lambda_{q0} + L_e\dot{i}_{q0} = (L_q + L_e)\dot{i}_{q0} + kM_Q\dot{i}_{Q\Delta} \\ \hat{L}_d &= L_d + L_e \\ \hat{L}_q &= L_q + L_e \\ \hat{R}_s &= r + R_e\end{aligned}$$

en (D.77) y (D.78) tenemos:

$$\begin{aligned}0 &= \hat{R}_s\dot{i}_{d\Delta} + \omega_0\hat{L}_q\dot{i}_{q\Delta} + \hat{\lambda}_{q0}\omega_\Delta + \hat{L}_d\dot{i}_{d\Delta} + kM_F\dot{i}_{F\Delta} + kM_D\dot{i}_{D\Delta} + \omega_0 kM_Q\dot{i}_{Q\Delta} - K\cos(\delta_0 - \alpha)\delta_\Delta \\ 0 &= -\omega_0\hat{L}_d\dot{i}_{d\Delta} - \omega_0 kM_F\dot{i}_{F\Delta} - \omega_0 kM_D\dot{i}_{D\Delta} + \hat{R}_s\dot{i}_{q\Delta} - \hat{\lambda}_{d0}\omega_\Delta + \hat{L}_q\dot{i}_{q\Delta} + kM_Q\dot{i}_{Q\Delta} - K\sin(\delta_0 - \alpha)\delta_\Delta\end{aligned}$$

Para la ecuación del torque,

$$\begin{aligned}
\tau_j \dot{\omega} &= T_m - D\omega + \frac{1}{3} (-L_d i_q i_d - kM_F i_q i_F - kM_D i_q i_D + L_q i_d i_q + kM_Q i_d i_Q) \\
\tau_j (\dot{\omega}_0 + \dot{\omega}_\Delta) &= T_{m0} + T_{m\Delta} - D(\omega_0 + \omega_\Delta) + \frac{1}{3} (-L_d (i_{q0} + i_{q\Delta}) (i_{d0} + i_{d\Delta}) \\
&\quad - kM_F (i_{q0} + i_{q\Delta}) (i_{F0} + i_{F\Delta}) - kM_D (i_{q0} + i_{q\Delta}) (i_{D0} + i_{D\Delta}) + L_q (i_{d0} + i_{d\Delta}) (i_{q0} + i_{q\Delta}) \\
&\quad + kM_Q (i_{d0} + i_{d\Delta}) (i_{Q0} + i_{Q\Delta})) \\
\tau_j \dot{\omega}_0 + \tau_j \dot{\omega}_\Delta &= \underbrace{T_{m0} - D\omega_0 + \frac{1}{3} (-L_d i_{q0} i_{d0} - kM_F i_{q0} i_{F0} - kM_D i_{q0} i_{D0} + L_q i_{d0} i_{q0} + kM_Q i_{d0} i_{Q0})}_{\tau_j \dot{\omega}_0} \\
&\quad + T_{m\Delta} - D\omega_\Delta + \frac{1}{3} (-L_d i_{q0} i_{d\Delta} - L_d i_{q\Delta} i_{d0} - L_d i_{q\Delta} i_{d\Delta} - kM_F i_{q0} i_{F\Delta} - kM_F i_{q\Delta} i_{F0} \\
&\quad - kM_F i_{q\Delta} i_{F\Delta} - kM_D i_{q0} i_{D\Delta} - kM_D i_{q\Delta} i_{D0} - kM_D i_{q\Delta} i_{D\Delta} + L_q i_{d0} i_{q\Delta} + L_q i_{d\Delta} i_{q0} \\
&\quad + L_q i_{d\Delta} i_{q\Delta} + kM_Q i_{d0} i_{Q\Delta} + kM_Q i_{d\Delta} i_{Q0} + kM_Q i_{d\Delta} i_{Q\Delta})
\end{aligned}$$

Despreciando los términos que involucran multiplicación entre variables de estado linealizadas (i.e. aquellas variables cuyo subíndice es Δ)

$$\begin{aligned}
\tau_j \dot{\omega}_\Delta &= T_{m\Delta} - D\omega_\Delta + \frac{1}{3} (-L_d i_{q0} i_{d\Delta} - L_d i_{d0} i_{q\Delta} - kM_F i_{q0} i_{F\Delta} - kM_F i_{F0} i_{q\Delta} - kM_D i_{q0} i_{D\Delta} \\
&\quad - kM_D i_{D0} i_{q\Delta} + L_q i_{d0} i_{q\Delta} + L_q i_{q0} i_{d\Delta} + kM_Q i_{d0} i_{Q\Delta} + kM_Q i_{Q0} i_{d\Delta}) \\
&= T_{m\Delta} - D\omega_\Delta + \frac{1}{3} (- (L_d i_{q0} - L_q i_{q0} - kM_Q i_{Q0}) i_{d\Delta} - (L_d i_{d0} + kM_F i_{F0} + kM_D i_{D0} - L_q i_{d0}) i_{q\Delta} \\
&\quad - kM_F i_{q0} i_{F\Delta} - kM_D i_{q0} i_{D\Delta} + kM_Q i_{d0} i_{Q\Delta})
\end{aligned}$$

recordando que $\lambda_q = L_q i_q + kM_Q i_Q$ y $\lambda_d = L_d i_d + kM_F i_F + kM_D i_D$ entonces

$$\begin{aligned}
\tau_j \dot{\omega}_\Delta &= T_{m\Delta} - D\omega_\Delta - \frac{1}{3} (L_d i_{q0} - \lambda_{q0}) i_{d\Delta} + \frac{1}{3} (L_q i_{d0} - \lambda_{d0}) i_{q\Delta} - \frac{1}{3} kM_F i_{q0} i_{F\Delta} \\
&\quad - \frac{1}{3} kM_D i_{q0} i_{D\Delta} + \frac{1}{3} kM_Q i_{d0} i_{Q\Delta} \\
T_{m\Delta} &= \frac{1}{3} (L_d i_{q0} - \lambda_{q0}) i_{d\Delta} + \frac{1}{3} kM_F i_{q0} i_{F\Delta} + \frac{1}{3} kM_D i_{q0} i_{D\Delta} - \frac{1}{3} (L_q i_{d0} - \lambda_{d0}) i_{q\Delta} \\
&\quad - \frac{1}{3} kM_Q i_{d0} i_{Q\Delta} + D\omega_\Delta + \tau_j \dot{\omega}_\Delta
\end{aligned}$$

Finalmente $\dot{\delta}_\Delta = \omega_\Delta$. Con el objetivo de resumir, podemos escribir las siguientes ecuaciones que describen la dinámica del generador síncrono en una vecindad del punto de equilibrio

x_0 .

$$0 = \hat{R}_s i_{d\Delta} + \omega_0 \hat{L}_q i_{q\Delta} + \hat{L}_d i_{d\Delta} + kM_F i_{F\Delta} + kM_D i_{D\Delta} + \omega_0 kM_Q i_{Q\Delta} + (L_q + L_e) i_{q0} \omega_\Delta + kM_Q i_{Q0} \omega_\Delta - K \cos(\delta_0 - \alpha) \delta_\Delta \quad (\text{D.79})$$

$$-v_{F\Delta} = r_F i_{F\Delta} - kM_F i_{d\Delta} - L_F i_{F\Delta} - M_R i_{D\Delta} \quad (\text{D.80})$$

$$0 = -r_D i_{D\Delta} - kM_D i_{d\Delta} - M_R i_{F\Delta} - L_D i_{D\Delta} \quad (\text{D.81})$$

$$0 = -\omega_0 \hat{L}_d i_{d\Delta} - \omega_0 kM_F i_{F\Delta} - \omega_0 kM_D i_{D\Delta} + \hat{R}_s i_{q\Delta} - \hat{\lambda}_{d0} \omega_\Delta + \hat{L}_q i_{q\Delta} + kM_Q i_{Q\Delta} - K \sin(\delta_0 - \alpha) \delta_\Delta \quad (\text{D.82})$$

$$0 = -r_Q i_{Q\Delta} - kM_Q i_{q\Delta} - L_Q i_{Q\Delta} \quad (\text{D.83})$$

$$T_{m\Delta} = \frac{1}{3} (L_d i_{q0} - \lambda_{q0}) i_{d\Delta} + \frac{1}{3} kM_F i_{q0} i_{F\Delta} + \frac{1}{3} kM_D i_{q0} i_{D\Delta} - \frac{1}{3} (L_q i_{d0} - \lambda_{d0}) i_{q\Delta} - \frac{1}{3} kM_Q i_{d0} i_{Q\Delta} + D \omega_\Delta + \tau_j \dot{\omega}_\Delta \quad (\text{D.84})$$

$$0 = \omega_\Delta - \dot{\delta}_\Delta \quad (\text{D.85})$$

escribiendo las ecuaciones anteriores en forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -v_{F\Delta} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_{m\Delta} \\ 0 \end{bmatrix}}_v = - \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{R}_s & 0 & 0 & \omega_0 \hat{L}_q & \omega_0 kM_Q & \hat{\lambda}_{q0} & -K \cos(\delta_0 - \alpha) \\ 0 & r_F & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_0 \hat{L}_d & -\omega_0 kM_F & -\omega_0 kM_D & \hat{R}_s & 0 & -\hat{\lambda}_{d0} & -K \sin(\delta_0 - \alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_Q & 0 & 0 \\ \frac{\lambda_{q0} - L_d i_{q0}}{3} & -\frac{kM_F i_{q0}}{3} & -\frac{kM_D i_{q0}}{3} & \frac{L_q i_{d0} - \lambda_{d0}}{3} & \frac{kM_Q i_{d0}}{3} & -D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_K \underbrace{\begin{bmatrix} i_{d\Delta} \\ i_{F\Delta} \\ i_{D\Delta} \\ i_{q\Delta} \\ i_{Q\Delta} \\ \omega_\Delta \\ \dot{\delta}_\Delta \end{bmatrix}}_x \quad (\text{D.86})$$

$$- \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{L}_d & kM_F & kM_D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ kM_F & L_F & M_R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ kM_D & M_R & L_D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{L}_q & kM_Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & kM_Q & L_Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_M \underbrace{\begin{bmatrix} i_{d\Delta} \\ i_{F\Delta} \\ i_{D\Delta} \\ i_{q\Delta} \\ i_{Q\Delta} \\ \dot{\omega}_\Delta \\ \dot{\delta}_\Delta \end{bmatrix}}_x$$

Para encontrar la representación deseada despejar el vector de estados, es decir

$$\dot{x} = -M^{-1}Kx - M^{-1}v = Ax + Bu$$

donde

$$M = \left[\begin{array}{c|c|c} M_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & M_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & M_3 \end{array} \right] \quad K = \left[\begin{array}{c|c|c} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ \hline K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ \hline K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{array} \right]$$

Entonces:

$$M^{-1} = \left[\begin{array}{c|c|c} M_1^{-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & M_2^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & M_3^{-1} \end{array} \right]$$

$$A = -M^{-1}K = - \left[\begin{array}{c|c|c} M_1^{-1}K_{11} & M_1^{-1}K_{12} & M_1^{-1}K_{13} \\ \hline M_2^{-1}K_{21} & M_2^{-1}K_{22} & M_2^{-1}K_{23} \\ \hline M_3^{-1}K_{31} & M_3^{-1}K_{32} & M_3^{-1}K_{33} \end{array} \right]$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} \hat{L}_d & kM_F & kM_D \\ kM_F & L_F & M_R \\ kM_D & M_R & L_D \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} \hat{L}_q & kM_Q \\ kM_Q & L_Q \end{bmatrix} \quad M_3 = \begin{bmatrix} -\tau_j & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_{11} = \begin{bmatrix} \hat{R}_s & 0 & 0 \\ 0 & r_F & 0 \\ 0 & 0 & r_D \end{bmatrix}$$

$$K_{12} = \begin{bmatrix} \omega_0 \hat{L}_q & \omega_0 kM_Q \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{13} = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_{q0} & -K \cos(\delta_0 - \alpha) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{21} = \begin{bmatrix} -\omega_0 \hat{L}_d & -\omega_0 kM_F & -\omega_0 kM_D \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{22} = \begin{bmatrix} \hat{R}_s & 0 \\ 0 & r_Q \end{bmatrix}$$

$$K_{23} = \begin{bmatrix} -\hat{\lambda}_{d0} & -K \sin(\delta_0 - \alpha) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{31} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_{q0} - L_d i_{q0}}{3} & -\frac{kM_F i_{q0}}{3} & -\frac{kM_D i_{q0}}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{32} = \begin{bmatrix} \frac{L_q i_{d0} - \lambda_{d0}}{3} & \frac{kM_Q i_{d0}}{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{33} = \begin{bmatrix} -D & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para obtener M^{-1} , calculamos lo siguiente:

$$M_1^{-1} = \frac{1}{d_1} \begin{bmatrix} M_R^2 - L_F L_D & kM_F L_D - kM_R M_D & kL_F M_D - kM_F M_R \\ kM_F L_D - kM_R M_D & k^2 M_D^2 - \hat{L}_d L_D & M_R \hat{L}_d - k^2 M_F M_D \\ kL_F M_D - kM_F M_R & M_R \hat{L}_d - k^2 M_F M_D & k^2 M_F^2 - L_F \hat{L}_d \end{bmatrix}$$

donde $d_1 = L_D k^2 M_F^2 - 2k^2 M_F M_R M_D + L_F k^2 M_D^2 + \hat{L}_d M_R^2 - L_F \hat{L}_d L_D$.

$$M_2^{-1} = \frac{1}{d_2} \begin{bmatrix} -L_Q & kM_Q \\ kM_Q & -\hat{L}_q \end{bmatrix}$$

donde $d_2 = k^2 M_Q^2 - L_Q \hat{L}_q$

$$M_3^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora podemos calcular $A = -M^{-1}K$ y $B = M^{-1}v$ calculando lo siguiente:

$$M_1^{-1}K_{11} = \frac{1}{d_1} \begin{bmatrix} \hat{R}_s (M_R^2 - L_F L_D) & r_F (kM_F L_D - kM_R M_D) & r_D (kL_F M_D - kM_F M_R) \\ \hat{R}_s (kM_F L_D - kM_R M_D) & r_F (k^2 M_D^2 - \hat{L}_d L_D) & r_D (M_R \hat{L}_d - k^2 M_F M_D) \\ \hat{R}_s (kL_F M_D - kM_F M_R) & r_F (M_R \hat{L}_d - k^2 M_F M_D) & r_D (k^2 M_F^2 - L_F \hat{L}_d) \end{bmatrix}$$

$$M_1^{-1}K_{12} = \frac{\omega_0}{d_1} \begin{bmatrix} \hat{L}_q (M_R^2 - L_F L_D) & kM_Q (M_R^2 - L_F L_D) \\ \hat{L}_q (kM_F L_D - kM_R M_D) & kM_Q (kM_F L_D - kM_R M_D) \\ \hat{L}_q (kL_F M_D - kM_F M_R) & kM_Q (kL_F M_D - kM_F M_R) \end{bmatrix}$$

$$M_1^{-1}K_{13} = \frac{1}{d_1} \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_{q0} (M_R^2 - L_F L_D) & K \cos(\delta_0 - \alpha) (L_F L_D - M_R^2) \\ \hat{\lambda}_{q0} (kM_F L_D - kM_R M_D) & K \cos(\delta_0 - \alpha) (kM_R M_D - kM_F L_D) \\ \hat{\lambda}_{q0} (kL_F M_D - kM_F M_R) & K \cos(\delta_0 - \alpha) (kM_F M_R - kL_F M_D) \end{bmatrix}$$

$$M_2^{-1}K_{21} = \frac{\omega_0}{d_2} \begin{bmatrix} L_Q \hat{L}_d & kM_F L_Q & kM_D L_Q \\ -kM_Q \hat{L}_d & -k^2 M_F M_Q & -k^2 M_Q M_D \end{bmatrix}$$

$$M_2^{-1}K_{22} = \frac{1}{d_2} \begin{bmatrix} -\hat{R}_s L_Q & r_Q kM_Q \\ \hat{R}_s kM_Q & -r_Q \hat{L}_q \end{bmatrix}$$

$$M_2^{-1}K_{23} = \frac{1}{d_2} \begin{bmatrix} L_Q \hat{\lambda}_{d0} & L_Q K \text{sen}(\delta_0 - \alpha) \\ -kM_Q \hat{\lambda}_{d0} & -kM_Q K \text{sen}(\delta_0 - \alpha) \end{bmatrix}$$

$$M_3^{-1}K_{31} = \frac{1}{3\tau_j} \begin{bmatrix} L_d i_{q0} - \lambda_{q0} & kM_F i_{q0} & kM_D i_{q0} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_3^{-1}K_{32} = \frac{1}{3\tau_j} \begin{bmatrix} \lambda_{d0} - L_q i_{d0} & -kM_Q i_{d0} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_3^{-1}K_{33} = \begin{bmatrix} \frac{D}{\tau_j} & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1}v = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} (M_R^2 - L_F L_D) & \frac{1}{d_1} (kM_F L_D - kM_R M_D) & \frac{1}{d_1} (kL_F M_D - kM_F M_R) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{d_1} (kM_F L_D - kM_R M_D) & \frac{1}{d_1} (k^2 M_D^2 - \hat{L}_d L_D) & \frac{1}{d_1} (M_R \hat{L}_d - k^2 M_F M_D) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{d_1} (kL_F M_D - kM_F M_R) & \frac{1}{d_1} (M_R \hat{L}_d - k^2 M_F M_D) & \frac{1}{d_1} (k^2 M_F^2 - L_F \hat{L}_d) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{d_2} L_Q & \frac{1}{d_2} kM_Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d_2} kM_Q & -\frac{1}{d_2} \hat{L}_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\tau_j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -v_{F\Delta} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_{m\Delta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-v_{F\Delta}}{d_1} (kM_F L_D - kM_R M_D) \\ \frac{-v_{F\Delta}}{d_1} (k^2 M_D^2 - \hat{L}_d L_D) \\ \frac{-v_{F\Delta}}{d_1} (M_R \hat{L}_d - k^2 M_F M_D) \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-T_{m\Delta}}{\tau_j} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{d_1} (kM_F L_D - kM_R M_D) & 0 \\ \frac{-1}{d_1} (k^2 M_D^2 - \hat{L}_d L_D) & 0 \\ \frac{-1}{d_1} (M_R \hat{L}_d - k^2 M_F M_D) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\tau_j} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{F\Delta} \\ T_{m\Delta} \end{bmatrix}$$

El modelo linealizado resultante en p.u. es:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{i}_d \\ \dot{i}_F \\ \dot{i}_D \\ \dot{i}_q \\ \dot{i}_Q \\ \dot{\omega} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} \frac{\hat{R}_s(M_R^2 - L_F L_D)}{d_1} & \frac{r_F k(M_F L_D - M_R M_D)}{d_1} & \frac{r_D k(L_F M_D - M_F M_R)}{d_1} & \frac{\omega_0 \hat{L}_q (M_R^2 - L_F L_D)}{d_1} & \frac{\omega_0 k M_Q (M_R^2 - L_F L_D)}{d_1} & \frac{\hat{\lambda}_{q0} (M_R^2 - L_F L_D)}{d_1} & \frac{K \cos(\delta_0 - \alpha) k (M_R M_D - M_F L_D)}{d_1} \\ \frac{\hat{R}_s k (M_F L_D - M_R M_D)}{d_1} & \frac{r_F (k^2 M_D^2 - \hat{L}_d L_D)}{d_1} & \frac{r_D (M_R \hat{L}_d - k^2 M_F M_D)}{d_1} & \frac{\omega_0 \hat{L}_q k (M_F L_D - M_R M_D)}{d_1} & \frac{\omega_0 k^2 M_Q (M_F L_D - M_R M_D)}{d_1} & \frac{\hat{\lambda}_{q0} k (M_F L_D - M_R M_D)}{d_1} & \frac{K \cos(\delta_0 - \alpha) (\hat{L}_d L_D - k^2 M_D^2)}{d_1} \\ \frac{\hat{R}_s k (L_F M_D - M_F M_R)}{d_1} & \frac{r_F (M_R \hat{L}_d - k^2 M_F M_D)}{d_1} & \frac{r_D (k^2 M_F^2 - L_F \hat{L}_d)}{d_1} & \frac{\omega_0 \hat{L}_q k (L_F M_D - M_F M_R)}{d_1} & \frac{\omega_0 k^2 M_Q (L_F M_D - M_F M_R)}{d_1} & \frac{\hat{\lambda}_{q0} k (L_F M_D - M_F M_R)}{d_1} & \frac{K \cos(\delta_0 - \alpha) (k^2 M_F M_D - M_R \hat{L}_d)}{d_1} \\ \frac{\omega_0 L_Q \hat{L}_d}{d_2} & \frac{\omega_0 k M_F L_Q}{d_2} & \frac{\omega_0 k M_D L_Q}{d_2} & -\frac{r L_Q}{d_2} & \frac{r_Q k M_Q}{d_2} & \frac{L_Q \lambda_{d0}}{d_2} & \frac{L_Q K \text{sen}(\delta_0 - \alpha)}{d_2} \\ -\frac{\omega_0 k M_Q \hat{L}_d}{d_2} & -\frac{\omega_0 k^2 M_F M_Q}{d_2} & -\frac{\omega_0 k^2 M_Q M_D}{d_2} & \frac{r k M_Q}{d_2} & -\frac{r_Q \hat{L}_q}{d_2} & -\frac{k M_Q \lambda_{d0}}{d_2} & -\frac{k M_Q K \text{sen}(\delta_0 - \alpha)}{d_2} \\ \frac{L_d i_{q0} - \lambda_{q0}}{3\tau_j} & \frac{k M_F i_{q0}}{3\tau_j} & \frac{k M_D i_{q0}}{3\tau_j} & \frac{\lambda_{d0} - L_q i_{d0}}{3\tau_j} & -\frac{k M_Q i_{d0}}{3\tau_j} & \frac{D}{\tau_j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_F \\ i_D \\ i_q \\ i_Q \\ \omega \\ \delta \end{bmatrix} \\
 & - \begin{bmatrix} \frac{-k}{d_1} (M_F L_D - M_R M_D) & 0 \\ \frac{-1}{d_1} (k^2 M_D^2 - \hat{L}_d L_D) & 0 \\ \frac{-1}{d_1} (M_R \hat{L}_d - k^2 M_F M_D) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\tau_j} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_F \\ T_m \end{bmatrix} \quad (\text{D.87})
 \end{aligned}$$

(el subíndice Δ es omitido dado que todas las variables presentes en el sistema han sido linealizadas). Siguiendo un procedimiento similar podemos obtener el modelo linealizado del sistema en unidades convencionales:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{i}_d \\ \dot{i}_F \\ \dot{i}_D \\ \dot{i}_q \\ \dot{i}_Q \\ \dot{\omega} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} \frac{\hat{R}_s(M_R^2 - L_F L_D)}{d_1} & \frac{r_F k(M_F L_D - M_R M_D)}{d_1} & \frac{r_D k(L_F M_D - M_F M_R)}{d_1} & \frac{\omega_0 \hat{L}_q (M_R^2 - L_F L_D)}{d_1} & \frac{\omega_0 k M_Q (M_R^2 - L_F L_D)}{d_1} & \frac{\hat{\lambda}_{q0} (M_R^2 - L_F L_D)}{d_1} & \frac{K \cos(\delta_0 - \alpha) k (M_R M_D - M_F L_D)}{d_1} \\ \frac{\hat{R}_s k (M_F L_D - M_R M_D)}{d_1} & \frac{r_F (k^2 M_D^2 - \hat{L}_d L_D)}{d_1} & \frac{r_D (M_R \hat{L}_d - k^2 M_F M_D)}{d_1} & \frac{\omega_0 \hat{L}_q k (M_F L_D - M_R M_D)}{d_1} & \frac{\omega_0 k^2 M_Q (M_F L_D - M_R M_D)}{d_1} & \frac{\hat{\lambda}_{q0} k (M_F L_D - M_R M_D)}{d_1} & \frac{K \cos(\delta_0 - \alpha) (\hat{L}_d L_D - k^2 M_D^2)}{d_1} \\ \frac{\hat{R}_s k (L_F M_D - M_F M_R)}{d_1} & \frac{r_F (M_R \hat{L}_d - k^2 M_F M_D)}{d_1} & \frac{r_D (k^2 M_F^2 - L_F \hat{L}_d)}{d_1} & \frac{\omega_0 \hat{L}_q k (L_F M_D - M_F M_R)}{d_1} & \frac{\omega_0 k^2 M_Q (L_F M_D - M_F M_R)}{d_1} & \frac{\hat{\lambda}_{q0} k (L_F M_D - M_F M_R)}{d_1} & \frac{K \cos(\delta_0 - \alpha) (k^2 M_F M_D - M_R \hat{L}_d)}{d_1} \\ \frac{\omega_0 L_Q \hat{L}_d}{d_2} & \frac{\omega_0 k M_F L_Q}{d_2} & \frac{\omega_0 k M_D L_Q}{d_2} & -\frac{r L_Q}{d_2} & \frac{r_Q k M_Q}{d_2} & \frac{L_Q \lambda_{d0}}{d_2} & \frac{L_Q K \text{sen}(\delta_0 - \alpha)}{d_2} \\ -\frac{\omega_0 k M_Q \hat{L}_d}{d_2} & -\frac{\omega_0 k^2 M_F M_Q}{d_2} & -\frac{\omega_0 k^2 M_Q M_D}{d_2} & \frac{r k M_Q}{d_2} & -\frac{r_Q \hat{L}_q}{d_2} & -\frac{k M_Q \lambda_{d0}}{d_2} & -\frac{k M_Q K \text{sen}(\delta_0 - \alpha)}{d_2} \\ \frac{p(L_d i_{q0} - \lambda_{q0})}{2J} & \frac{p k M_F i_{q0}}{2J} & \frac{p k M_D i_{q0}}{2J} & \frac{p(\lambda_{d0} - L_q i_{d0})}{2J} & -\frac{p k M_Q i_{d0}}{2J} & \frac{p}{2J} D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_F \\ i_D \\ i_q \\ i_Q \\ \omega \\ \delta \end{bmatrix} \\
 & - \begin{bmatrix} \frac{-k}{d_1} (M_F L_D - M_R M_D) & 0 \\ \frac{-1}{d_1} (k^2 M_D^2 - \hat{L}_d L_D) & 0 \\ \frac{-1}{d_1} (M_R \hat{L}_d - k^2 M_F M_D) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{p}{2J} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_F \\ T_m \end{bmatrix} \quad (\text{D.88})
 \end{aligned}$$

El modelo (D.87) esta en la forma adecuada para el análisis de estabilidad y síntesis de controlador utilizando las técnicas de control lineal. Una simplificación al modelo anterior consiste en despreciar las dinámicas de los devanados de amortiguamiento, en tal caso el modelo linealizado es:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_d \\ \dot{i}_F \\ \dot{i}_q \\ \dot{\omega} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_F(r+R_e)}{d_1} & \frac{-kM_F r_F}{d_1} & \frac{\omega_0 L_F(L_q+L_e)}{d_1} & \frac{L_F(L_q+L_e)i_{q0}}{d_1} & \frac{-L_F K \cos(\delta_0-\alpha)}{d_1} \\ \frac{-kM_F(r+R_e)}{d_1} & \frac{(L_d+L_e)r_F}{d_1} & \frac{-\omega_0 kM_F(L_q+L_e)}{d_1} & \frac{-kM_F(L_q+L_e)i_{q0}}{d_1} & \frac{kM_F K \cos(\delta_0-\alpha)}{d_1} \\ \frac{\omega_0(L_d+L_e)}{L_q+L_e} & \frac{\omega_0 kM_F}{L_q+L_e} & \frac{-(r+R_e)}{L_q+L_e} & \frac{(L_d+L_e)i_{d0}+kM_F i_{F0}}{L_q+L_e} & \frac{K \text{sen}(\delta_0-\alpha)}{L_q+L_e} \\ \frac{(L_q-L_d)i_{q0}}{3\tau_j} & \frac{-kM_F i_{q0}}{3\tau_j} & \frac{(L_q-L_d)i_{d0}-kM_F i_{F0}}{3\tau_j} & -\frac{D}{\tau_j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_F \\ i_q \\ \omega \\ \delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{kM_F}{d_1} & 0 \\ -\frac{L_q+L_e}{d_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau_j} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_F \\ T_m \end{bmatrix} \quad (\text{D.89})$$

donde

$$d_1 = k^2 M_F^2 - L_F(L_d + L_e) \quad (\text{D.90})$$

En este trabajo de tesis se asume que el punto de operación está dado por funciones variantes en el tiempo, en este caso $x_0^T(t) = [i_{d0}(t) \ i_{F0}(t) \ i_{q0}(t) \ \omega_0(t) \ \delta_0(t)]$. Acomodando las variables de estado en un forma más conveniente tenemos el siguiente sistema LPV,

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_d \\ \dot{i}_q \\ \dot{i}_F \\ \dot{\omega} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_F(r+R_e)}{d_1} & \frac{p_4(t)L_F(L_q+L_e)}{d_1} & \frac{-kM_F r_F}{d_1} & \frac{L_F(L_q+L_e)p_2(t)}{d_1} & \frac{-L_F K \cos(p_5(t)-\alpha)}{d_1} \\ \frac{p_4(t)(L_d+L_e)}{L_q+L_e} & \frac{-(r+R_e)}{L_q+L_e} & \frac{p_4(t)kM_F}{L_q+L_e} & \frac{(L_d+L_e)p_1(t)+kM_F p_3(t)}{L_q+L_e} & \frac{K \text{sen}(p_5(t)-\alpha)}{L_q+L_e} \\ \frac{-kM_F(r+R_e)}{d_1} & \frac{-p_4(t)kM_F(L_q+L_e)}{d_1} & \frac{(L_d+L_e)r_F}{d_1} & \frac{-kM_F(L_q+L_e)p_2(t)}{d_1} & \frac{kM_F K \cos(p_5(t)-\alpha)}{d_1} \\ \frac{(L_q-L_d)p_2(t)}{3\tau_j} & \frac{(L_q-L_d)p_1(t)-kM_F p_3(t)}{3\tau_j} & \frac{-kM_F p_2(t)}{3\tau_j} & -\frac{D}{\tau_j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_F \\ \omega \\ \delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{kM_F}{d_1} & 0 \\ -\frac{L_q+L_e}{d_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau_j} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_F \\ T_m \end{bmatrix} \quad (\text{D.91})$$

donde $p_1(t) = i_{d0}(t)$, $p_2(t) = i_{q0}(t)$, $p_3(t) = i_{F0}(t)$, $p_4(t) = \omega_0(t)$ y $p_5(t) = \delta_0(t)$. Se asume que las trayectorias de estado son acotadas, es decir, $p_i(t) \in [p_i, \bar{p}_i] \forall i = 1, \dots, 5$. Notese la presencia de las funciones con dependencia paramétrica no lineal $\cos(p_5(t) - \alpha)$ y $\text{sen}(p_5(t) - \alpha)$ las cuales se deben a la conexión del generador a un bus infinito; se propone interpretar el efecto de estas funciones no lineales como perturbaciones al sistema de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_d \\ \dot{i}_q \\ \dot{i}_F \\ \dot{\omega} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_F(r+R_e)}{d_1} & \frac{p_4(t)L_F(L_q+L_e)}{d_1} & \frac{-kM_F r_F}{d_1} & \frac{L_F(L_q+L_e)p_2(t)}{d_1} & 0 \\ \frac{p_4(t)(L_d+L_e)}{L_q+L_e} & \frac{-(r+R_e)}{L_q+L_e} & \frac{p_4(t)kM_F}{L_q+L_e} & \frac{(L_d+L_e)p_1(t)+kM_F p_3(t)}{L_q+L_e} & 0 \\ \frac{-kM_F(r+R_e)}{d_1} & \frac{-p_4(t)kM_F(L_q+L_e)}{d_1} & \frac{(L_d+L_e)r_F}{d_1} & \frac{-kM_F(L_q+L_e)p_2(t)}{d_1} & 0 \\ \frac{(L_q-L_d)p_2(t)}{3\tau_j} & \frac{(L_q-L_d)p_1(t)-kM_F p_3(t)}{3\tau_j} & \frac{-kM_F p_2(t)}{3\tau_j} & -\frac{D}{\tau_j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_F \\ \omega \\ \delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{kM_F}{d_1} & 0 \\ -\frac{L_q+L_e}{d_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau_j} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_F \\ T_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{L_F}{d_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_q+L_e} \\ \frac{kM_F}{d_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

donde $w_1 = K p_5(t) \cos(p_5(t) - \alpha)$ y $w_2 = K p_5(t) \text{sen}(p_5(t) - \alpha)$ son entradas de perturbación acotadas si $\omega(t)$ permanece en el punto de operación. Asumiendo información completa del

estado tenemos el sistema en la forma de

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(p)x(t) + B_1u(t) + B_2w(t) \\ z(t) &= x(t)\end{aligned}$$

siendo posible el uso de técnicas de control LPV. En este apéndice fue mostrado el procedimiento de modelado para un generador síncrono conectado a un bus infinito.

Apéndice E

Archivos de Simulación

E.1. Sistema de Dos Carros (Two Cart System)

E.1.1. tcsqs_sintesis1.m

En este programa de MATLAB se realiza la síntesis de un controlador robusto LTI que garantiza estabilidad cuadrática para todas las trayectorias de $m_1(t)$ en el sistema de dos carros.

```
%Eduardo Martínez Zambrano
%Facultad de Ingeniería Mecánica y Electrica UANL
%eduardomz@hotmail.com

clc
close all

%           Importante
%   Escribir el programa que
%   se use para abrir pdf
%           |
%           | v |
dos('taskkill /F /IM PDFXCview.exe') %cierra los archivos pdf
dos('taskkill /F /IM acroRd32.exe')

%Ejemplo de Two cart system
%Datos Propuestos
m1_inferior=20/21; %cota inferior de la masa 1
m1_superior=30/19; %cota superior de la masa 1
m2=2; %masa 2
k=3; %constante del resorte
b=2; %constante del amortiguador

h=1; %cota maxima de la tasa de variacion
%de los vertices

%vertice 1
m1=m1_inferior;

AV1=[ 0 0 1 0;
      0 0 0 1;
      -k/m2 k/m2 -b/m2 b/m2;
      k/m1 -k/m1 b/m1 -b/m1];

B2V1 = [0;
        0;
        0;
        1/m1];
```

```

%vertice 2
m1=m1_superior;

AV2=[ 0 0 1 0;
      0 0 0 1;
      -k/m2 k/m2 -b/m2 b/m2;
      k/m1 -k/m1 b/m1 -b/m1];

B2V2 = [0;
        0;
        0;
        1/m1];

%Entrada de perturbacion

B1 = [0;
      0;
      1/m2;
      0];

%Salida de interes

C=[1 0 0 0];

AV1_hat=[AV1 zeros(4,1);-C 0];
AV2_hat=[AV2 zeros(4,1);-C 0];

B2V1_hat=[B2V1;0];
B2V2_hat=[B2V2;0];

B1_hat=[B1;0];

t = cputime;
m=0.01;
Q=sdpvar(5,5);
V=sdpvar(1,5);
gammac=sdpvar(1,1);

H = set( [Q*AV1_hat'+AV1_hat*Q+V'*B2V1_hat'+B2V1_hat*V+m*eye(5) B1_hat Q*eye(5);
         B1_hat' -gammac zeros(1,5);
         Q*eye(5) zeros(5,1) -eye(5)]+m*eye(11)<0);

H = H+set( [Q*AV2_hat'+AV2_hat*Q+V'*B2V2_hat'+B2V2_hat*V+m*eye(5) B1_hat Q*eye(5);
         B1_hat' -gammac zeros(1,5);
         Q*eye(5) zeros(5,1) -eye(5)]+m*eye(11)<0);

H = H+set(Q>0.01*eye(5));

H = H+set(gammac<15);

solvesdp(H)
diagnostico1=solvesdp(H);
Q=double(Q);
V=double(V);
e = cputime-t; %e=0.4992
gamma=sqrt(double(gammac));
K=V/Q;

F=K(1:4);
kI=K(5);

open_system('tcsqs1') %Abre el archivo de Simulink tcsqs2.mdl

tf=10; %stop time
ts=0.01; %paso de integraci3n
tf=num2str(tf);
ts=num2str(ts);

```

```

set_param(bdroot,'stop time',tf);
set_param(bdroot,'FixedStep',ts);
set_param('tcsqs1/Manual Switch 1','sw','0'); %Ajusta el parametro 'sw' del bloque

sim('tcsqs1') %Corre la simulación de msqs2.mdl

print -dpdf -r300 -s tcsqs1.pdf %Genera un archivo pdf del diagrama en msqs2.mdl

winopen('tcsqs1.pdf') %abre el archivo pdf generado anteriormente

ts=str2double(ts);
tf=str2double(tf);
tfp=1; %tiempo de simulación para x0(t)

if tfp>tf
    tfp=tf;
end

Fig1=figure(1); %genera la figura F1
maxfig(Fig1,1); %maximiza la figura F1

cg=0.3; %variable utilizada para acotar los graficos.
plot(t(1:tfp/ts),m1_s1(1:tfp/ts),'LineWidth',2);
if abs(max(m1_s1)-min(m1_s1))~=0
    axis([0 tfp min(m1_s1)-cg*abs(max(m1_s1)-min(m1_s1)) max(m1_s1)+cg*abs(max(m1_s1)-min(m1_s1))]);
else
    axis([0 tfp m1_s1(1)-cg*abs(m1_s1(1)) m1_s1(1)+cg*abs(m1_s1(1))]);
end
grid;
ylabel(['$' 'm_{1}(t)' '$'],'interpreter','latex');
plottedit on

set(gcf, 'PaperUnits', 'centimeters');
set(gcf, 'PaperSize', [12 8]);
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'manual');
set(gcf, 'PaperPosition', [0 0 12 8]);
print( gcf, '-dpdf', strcat('tcsqs_sintesis1_m1'))

winopen('tcsqs_sintesis1_m1.pdf')

Fig2=figure(2); %genera la figura F1
maxfig(Fig2,1); %maximiza la figura F1

cg=0.3; %variable utilizada para acotar los graficos.
plot(t(1:tf/ts),x2_s1(1:tf/ts),t(1:tf/ts),ref(1:tf/ts),'LineWidth',2);
if abs(max(x2_s1)-min(x2_s1))~=0
    axis([0 tf min(x2_s1)-cg*abs(max(x2_s1)-min(x2_s1)) max(x2_s1)+cg*abs(max(x2_s1)-min(x2_s1))]);
else
    axis([0 tf x2_s1(1)-cg*abs(x2_s1(1)) m1(1)+cg*abs(x2_s1(1))]);
end
grid;
ylabel(['$' 'x_{2}(t)' '$'],'interpreter','latex');
plottedit on

set(gcf, 'PaperUnits', 'centimeters');
set(gcf, 'PaperSize', [12 8]);
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'manual');
set(gcf, 'PaperPosition', [0 0 12 8]);
print( gcf, '-dpdf', strcat('tcsqs_sintesis1_x1'))

winopen('tcsqs_sintesis1_x1.pdf')
.

```

E.1.2. tcsqs_sintesis2.m

En este programa de MATLAB se realiza la síntesis de un controlador robusto politopico que garantiza estabilidad cuadratica para todas las trayectorias de $m_1(t)$ en el sistema de dos carros.

```

%Eduardo Martínez Zambrano
%Facultad de Ingeniería Mecánica y Electrica UANL
%eduardomz@hotmail.com

clc
close all

%           Importante
%   Escribir el programa que
%   se use para abrir pdf
%           |
%           | v |
dos('taskkill /F /IM PDFXCview.exe') %cierra los archivos pdf
dos('taskkill /F /IM acroRd32.exe')

%Ejemplo de Two cart system
%Datos Propuestos
% m1_inferior=10/11; %cota inferior de la masa 1
% m1_superior=5/3;  %cota superior de la masa 1

m1_inferior=20/21; %cota inferior de la masa 1
m1_superior=30/19; %cota superior de la masa 1

m2=2;           %masa 2
k=3;           %constante del resorte
b=2;           %constante del amortiguador

%vertice 1
m1=m1_inferior;

AV1=[ 0    0    1    0;
      0    0    0    1;
     -k/m2  k/m2 -b/m2  b/m2;
      k/m1 -k/m1  b/m1 -b/m1];

B2V1 = [0;
        0;
        0;
        1/m1];

%vertice 2
m1=m1_superior;

AV2=[ 0    0    1    0;
      0    0    0    1;
     -k/m2  k/m2 -b/m2  b/m2;
      k/m1 -k/m1  b/m1 -b/m1];

B2V2 = [0;
        0;
        0;
        1/m1];

%Entrada de perturbacion

B1 = [0;
      0;
      1/m2;
      0];

%Salida de interes

C=[1 0 0 0];

AV1_hat=[AV1 zeros(4,1);-C 0];
AV2_hat=[AV2 zeros(4,1);-C 0];

B2V1_hat=[B2V1;0];
B2V2_hat=[B2V2;0];

```

```

B1_hat=[B1;0];

J=[-1.8,-1.8,-2,-2,-2];

K1=-acker(AV1_hat,B2V1_hat,J);
K2=-acker(AV2_hat,B2V2_hat,J);

Ac11=[AV1+B2V1*K1(1:4) B2V1*K1(5);-C 0];
Ac12=[AV2+B2V2*K2(1:4) B2V2*K2(5);-C 0];

t = cputime;
m=0.01;
Q=sdpvar(5,5);
gammac=sdpvar(1,1);

H = set( [Ac11*Q+Q*Ac11'+m*eye(5)    B1_hat        Q*eye(5);
         B1_hat'                    -gammac      zeros(1,5);
         Q*eye(5)                   zeros(5,1)    -eye(5)]+m*eye(11)<0);

H = H+set( [Ac12*Q+Q*Ac12'+m*eye(5)    B1_hat        Q*eye(5);
           B1_hat'                    -gammac      zeros(1,5);
           Q*eye(5)                   zeros(5,1)    -eye(5)]+m*eye(11)<0);

H = H+set(Q>0.01*eye(5));

H = H+set(gammac>0.01)+set(gammac<5);

solvesdp(H)
diagnostico1=solvesdp(H);
Q=double(Q);
gamma=sqrt(double(gammac));
e = cputime-t; %e=0.4992

open_system('tcsqs2')                %Abre el archivo de Simulink tcsqs2.mdl

tf=10; %stop time
ts=0.01; %paso de integración
tf=num2str(tf);
ts=num2str(ts);
set_param(bdroot,'stop time',tf);
set_param(bdroot,'FixedStep',ts);
set_param('tcsqs2/Manual Switch 1','sw','0'); %Ajusta el parametro 'sw' del bloque

sim('tcsqs2')                          %Corre la simulación de msqs2.mdl

print -dpdf -r300 -s tcsqs2.pdf         %Genera un archivo pdf del diagrama en msqs2.mdl

winopen('tcsqs2.pdf')                  %abre el archivo pdf generado anteriormente

ts=str2double(ts);
tf=str2double(tf);
tfp=1; %tiempo de simulación para x0(t)

if tfp>tf
    tfp=tf;
end

Fig1=figure(1); %genera la figura F1
maxfig(Fig1,1); %maximiza la figura F1

cg=0.3; %variable utilizada para acotar los graficos.
plot(t(1:tfp/ts),m1_s2(1:tfp/ts),'LineWidth',2);
if abs(max(m1_s2)-min(m1_s2))~=0
    axis([0 tfp min(m1_s2)-cg*abs(max(m1_s2)-min(m1_s2)) max(m1_s2)+cg*abs(max(m1_s2)-min(m1_s2))]);

```

```

else
    axis([0 tfp m1(1)-cg*abs(m1_s2(1)) m1(1)+cg*abs(m1_s2(1))]);
end
grid;
ylabel(['\$', 'm_{1}(t)' '\$'],'interpreter','latex');
plottedit on

set(gcf, 'PaperUnits', 'centimeters');
set(gcf, 'PaperSize', [12 8]);
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'manual');
set(gcf, 'PaperPosition', [0 0 12 8]);
print( gcf, '-dpdf', strcat('tcsqs_sintesis2_m1'))

winopen('tcsqs_sintesis2_m1.pdf')

Fig2=figure(2);      %genera la figura F1
maxfig(Fig2,1);     %maximiza la figura F1

cg=0.3; %variable utilizada para acotar los graficos.
plot(t(1:tf/ts),x2_s2(1:tf/ts),t(1:tf/ts),ref(1:tf/ts),'LineWidth',2);
if abs(max(x2_s2)-min(x2_s2))~=0
    axis([0 tf min(x2_s2)-cg*abs(max(x2_s2)-min(x2_s2)) max(x2_s2)+cg*abs(max(x2_s2)-min(x2_s2))]);
else
    axis([0 tf x2_s2(1)-cg*abs(x2_s2(1)) m1(1)+cg*abs(x2_s2(1))]);
end
grid;
ylabel(['\$', 'x_{2}(t)' '\$'],'interpreter','latex');
plottedit on

set(gcf, 'PaperUnits', 'centimeters');
set(gcf, 'PaperSize', [12 8]);
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'manual');
set(gcf, 'PaperPosition', [0 0 12 8]);
print( gcf, '-dpdf', strcat('tcsqs_sintesis2_x2'))

winopen('tcsqs_sintesis2_x2.pdf')

```

E.1.3. tcsqs1.mdl

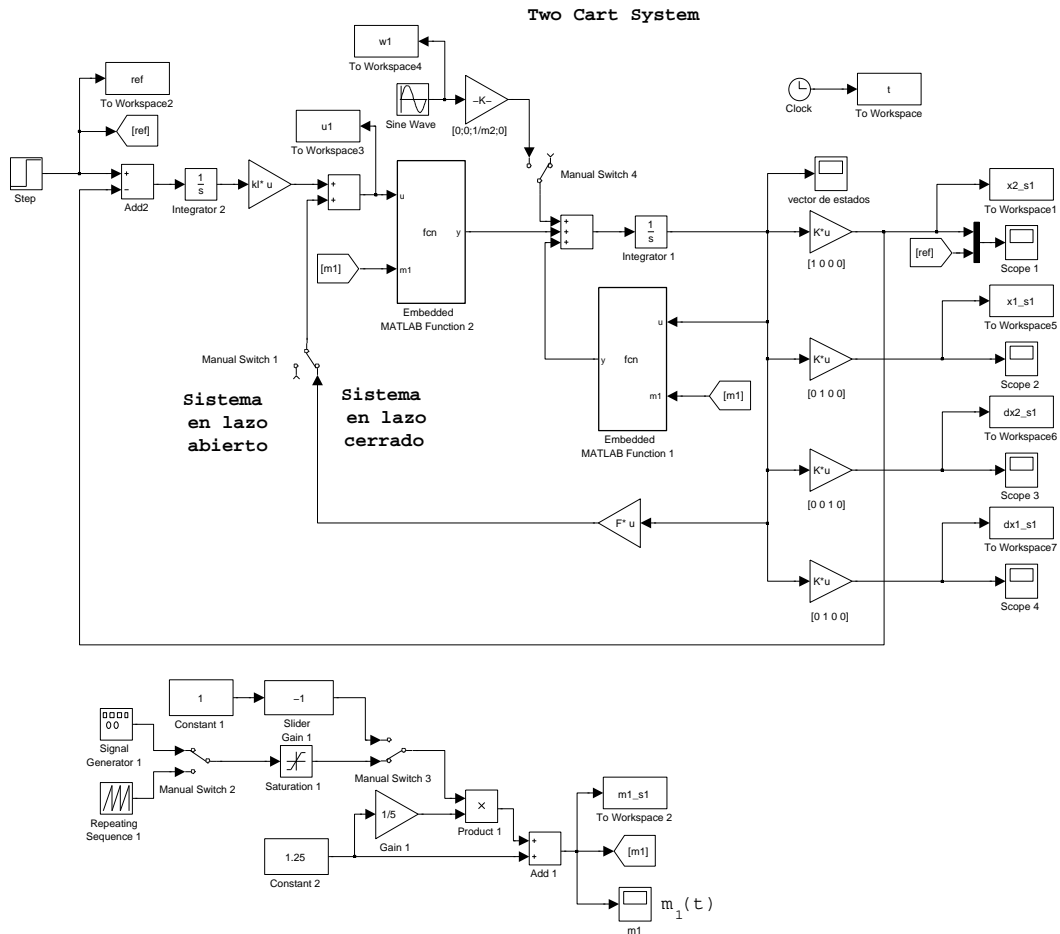


Figure E.1: Simulación del sistema de dos carros en lazo cerrado utilizando una ley de control robusta LTI que garantiza QS.

Embedded MATLAB Function 1 tcsqs1

```
function y = fcn(u,m1,m2,k,b)
```

```
Ap=[ 0    0    1    0;
      0    0    0    1;
     -k/m2  k/m2  -b/m2  b/m2;
      k/m1  -k/m1  b/m1  -b/m1];
```

```
y = Ap*u;
```

Embedded MATLAB Function 2 tcsqs1

```
function y = fcn(u,m1)
```

```
B2p=[ 0;
       0;
       0;
       1/m1];
```

```
y = B2p*u;
```

E.1.4. tcsqs2.mdl

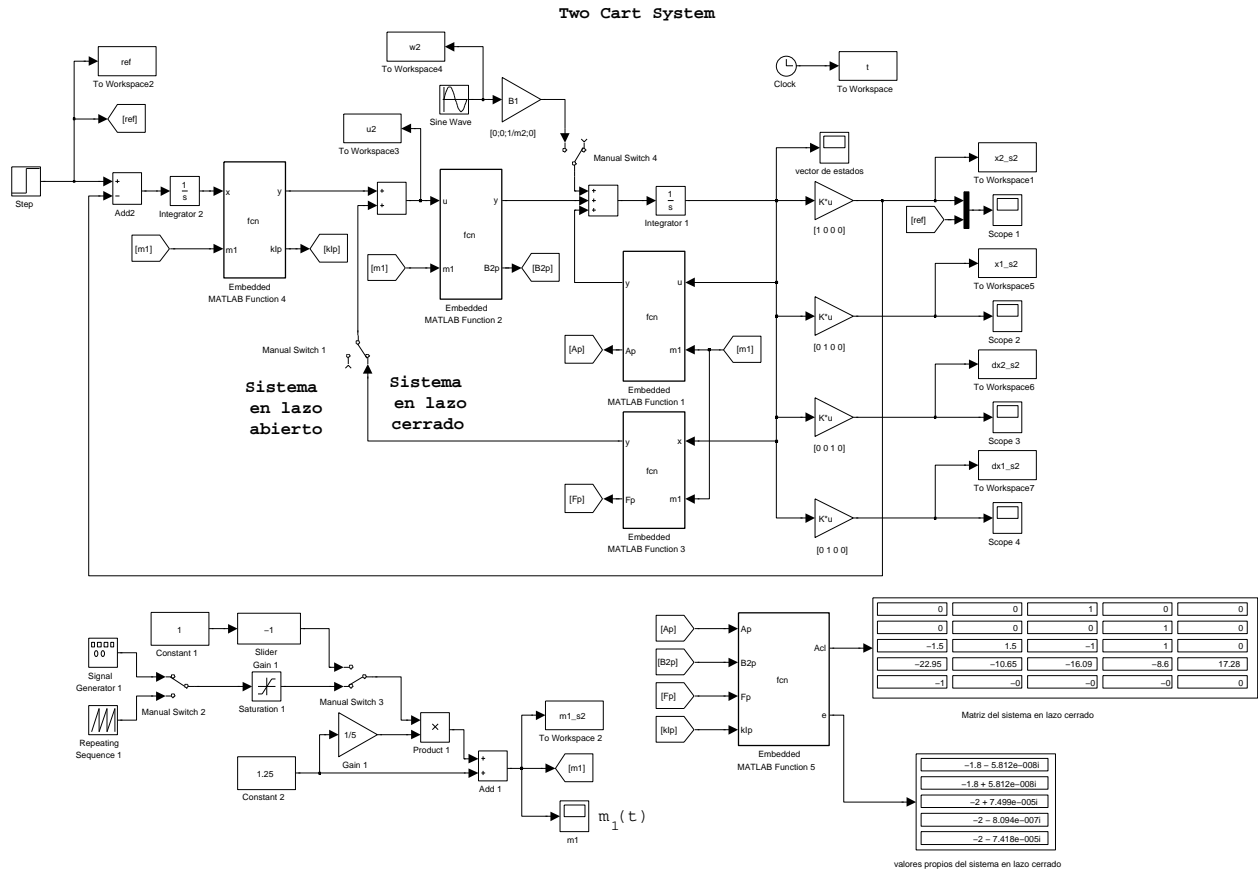


Figure E.2: Simulación del sistema de dos carros en lazo cerrado utilizando una ley de control politópica que garantiza QS.

Embedded MATLAB Function 1 tcsqs2

```
function [y,Ap] = fcn(u,m1,m2,k,b)
```

```
Ap=[ 0    0    1    0;
     0    0    0    1;
    -k/m2  k/m2  -b/m2  b/m2;
     k/m1  -k/m1  b/m1  -b/m1];
```

```
y = Ap*u;
```

Embedded MATLAB Function 2 tcsqs2

```
function [y,B2p] = fcn(u,m1)
```

```
B2p=[ 0;
      0;
      0;
      1/m1];
```

```
y = B2p*u;
```


Embedded MATLAB Function 3 tcsqs2

```
function [y,Fp] = fcn(x,K1,K2,m1,m1_inferior,m1_superior)

gammai=1/(m1_superior-m1_inferior);
a1=gammai*(m1_superior-m1);
a2=gammai*(m1-m1_inferior);

Fp=a1*K1(1:4)+a2*K2(1:4);

y = Fp*x;
```

Embedded MATLAB Function 4 tcsqs2

```
function [y,kIp] = fcn(x,K1,K2,m1,m1_inferior,m1_superior)

gammai=1/(m1_superior-m1_inferior);
a1=gammai*(m1_superior-m1);
a2=gammai*(m1-m1_inferior);

kIp=a1*K1(5)+a2*K2(5);

y = kIp*x;
```

Embedded MATLAB Function 5 tcsqs2

```
function [Ac1,e] = fcn(Ap,B2p,C,Fp,kIp)

Ac1=[Ap+B2p*Fp B2p*kIp;-C 0];

e=eig(Ac1);
```

E.2. Generador Síncrono

E.2.1. datos_del_sistema.m

```
%Datos en pu del generador síncrono del ejemplo 4.1 del libro de Anderson

Ld=1.7;           %Inductancia en eje directo
Lq=1.64;         %Inductancia en eje en cuadratura
LF=1.651;        %Inductancia en el devanado del rotor
Le=0.4;          %Inductancia en la línea de transmisión

rF=0.000742;     %Resistencia en el devanado del rotor
r=0.001096;      %Resistencia en el estator
Re=0.02;         %Resistencia en la línea de transmisión

k=sqrt(3/2);     %cte definida

MF=1.26557;      %Inductancia mutua entre el estator y el rotor

% tau=1786.94;   %tau=2*H*wB donde H es una constante asociada
                %a la energía cinética del rotor a velocidad mecánica nominal
                %y wB es la frecuencia base la cual es igual a la
                %frecuencia eléctrica nominal

tau=50;
D=0.1;           %Constante de Amortiguamiento
```

```

Rg=r+Re;      %Terminos definidos con el objetivo de simplificar la expresi3n del modelo
Ldg=Ld+Le;
Lqg=Lq+Le;
d1=k^2*MF^2-LF*Ldg;

% K=sqrt(3)*7170.687; %Constante asociada al voltaje del bus infinito
K=sqrt(3)*0.828;
%****punto de operaci3n nominal****

id0n=-1.591;
iq0n=0.701;
iF0n=2.826;
w0n=1;

%*****

%****Cotas superior e inferior del punto de operaci3n****

id0_inf=id0n+(0.05)*id0n;
id0_sup=id0n-(0.05)*id0n;

iq0_inf=iq0n-(0.05)*iq0n;
iq0_sup=iq0n+(0.05)*iq0n;

iF0_inf=iF0n-(0.03)*iF0n;
iF0_sup=iF0n+(0.03)*iF0n;

w0_inf=w0n-0.1*w0n;
w0_sup=w0n+0.1*w0n;

%*****

%Matriz de entradas controladas

B2 = [ k*MF/d1    0;
       0         0;
      -Lqg/d1    0;
       0        1/tau;
       0         0];

%Matriz de entradas de perturbaci3n

B1 = [ -LF/d1    0;
       k*MF/d1  0;
       0        1/Lqg;
       0         0;
       0         0];

%Matriz de salida

C=[0 0 0 1 0];

%%%%%%%%%%vertices%%%%%%%%%%

%vertice 1

w0=w0_inf;  iF0=iF0_inf;  iq0=iq0_inf;  id0=id0_inf;

A1 = [   LF*Rg/d1           w0*LF*Lqg/d1           -k*MF*rF/d1           LF*Lqg*iq0           0;
        w0*Ldg/Lqg         -Rg/Lqg                 w0*k*MF/Lqg         (Ldg*id0+k*MF*iF0)/Lqg         0;
        -k*MF*Rg/d1        -w0*k*MF*Lqg/d1         Ldg*rF/d1           -k*MF*Lqg*iq0           0;
        (Lq-Ld)*iq0/(3*tau)  ((Lq-Ld)*id0-k*MF*iF0)/(3*tau)  -k*MF*iq0/(3*tau)  -D/tau           0;
        0                   0                       0                   1                       0];

```

%vertice 2

w0=w0_inf; iF0=iF0_inf; iq0=iq0_inf; id0=id0_sup;

```
A2 = [   LF*Rg/d1           w0*LF*Lqg/d1           -k*MF*rF/d1           LF*Lqg*iq0           0;
        w0*Ldg/Lqg        -Rg/Lqg                w0*k*MF/Lqg          (Ldg*id0+k*MF*iF0)/Lqg  0;
        -k*MF*Rg/d1       -w0*k*MF*Lqg/d1        Ldg*rF/d1           -k*MF*Lqg*iq0         0;
        (Lq-Ld)*iq0/(3*tau) ((Lq-Ld)*id0-k*MF*iF0)/(3*tau) -k*MF*iq0/(3*tau)   -D/tau                 0;
        0                  0                  0                  1                  0];
```

%vertice 3

w0=w0_inf; iF0=iF0_inf; iq0=iq0_sup; id0=id0_inf;

```
A3 = [   LF*Rg/d1           w0*LF*Lqg/d1           -k*MF*rF/d1           LF*Lqg*iq0           0;
        w0*Ldg/Lqg        -Rg/Lqg                w0*k*MF/Lqg          (Ldg*id0+k*MF*iF0)/Lqg  0;
        -k*MF*Rg/d1       -w0*k*MF*Lqg/d1        Ldg*rF/d1           -k*MF*Lqg*iq0         0;
        (Lq-Ld)*iq0/(3*tau) ((Lq-Ld)*id0-k*MF*iF0)/(3*tau) -k*MF*iq0/(3*tau)   -D/tau                 0;
        0                  0                  0                  1                  0];
```

%vertice 4

w0=w0_inf; iF0=iF0_inf; iq0=iq0_sup; id0=id0_sup;

```
A4 = [   LF*Rg/d1           w0*LF*Lqg/d1           -k*MF*rF/d1           LF*Lqg*iq0           0;
        w0*Ldg/Lqg        -Rg/Lqg                w0*k*MF/Lqg          (Ldg*id0+k*MF*iF0)/Lqg  0;
        -k*MF*Rg/d1       -w0*k*MF*Lqg/d1        Ldg*rF/d1           -k*MF*Lqg*iq0         0;
        (Lq-Ld)*iq0/(3*tau) ((Lq-Ld)*id0-k*MF*iF0)/(3*tau) -k*MF*iq0/(3*tau)   -D/tau                 0;
        0                  0                  0                  1                  0];
```

%vertice 5

w0=w0_inf; iF0=iF0_sup; iq0=iq0_inf; id0=id0_inf;

```
A5 = [   LF*Rg/d1           w0*LF*Lqg/d1           -k*MF*rF/d1           LF*Lqg*iq0           0;
        w0*Ldg/Lqg        -Rg/Lqg                w0*k*MF/Lqg          (Ldg*id0+k*MF*iF0)/Lqg  0;
        -k*MF*Rg/d1       -w0*k*MF*Lqg/d1        Ldg*rF/d1           -k*MF*Lqg*iq0         0;
        (Lq-Ld)*iq0/(3*tau) ((Lq-Ld)*id0-k*MF*iF0)/(3*tau) -k*MF*iq0/(3*tau)   -D/tau                 0;
        0                  0                  0                  1                  0];
```

%vertice 6

w0=w0_inf; iF0=iF0_sup; iq0=iq0_inf; id0=id0_sup;

```
A6 = [   LF*Rg/d1           w0*LF*Lqg/d1           -k*MF*rF/d1           LF*Lqg*iq0           0;
        w0*Ldg/Lqg        -Rg/Lqg                w0*k*MF/Lqg          (Ldg*id0+k*MF*iF0)/Lqg  0;
        -k*MF*Rg/d1       -w0*k*MF*Lqg/d1        Ldg*rF/d1           -k*MF*Lqg*iq0         0;
        (Lq-Ld)*iq0/(3*tau) ((Lq-Ld)*id0-k*MF*iF0)/(3*tau) -k*MF*iq0/(3*tau)   -D/tau                 0;
        0                  0                  0                  1                  0];
```

%vertice 7

w0=w0_inf; iF0=iF0_sup; iq0=iq0_sup; id0=id0_inf;

```
A7 = [   LF*Rg/d1           w0*LF*Lqg/d1           -k*MF*rF/d1           LF*Lqg*iq0           0;
        w0*Ldg/Lqg        -Rg/Lqg                w0*k*MF/Lqg          (Ldg*id0+k*MF*iF0)/Lqg  0;
        -k*MF*Rg/d1       -w0*k*MF*Lqg/d1        Ldg*rF/d1           -k*MF*Lqg*iq0         0;
        (Lq-Ld)*iq0/(3*tau) ((Lq-Ld)*id0-k*MF*iF0)/(3*tau) -k*MF*iq0/(3*tau)   -D/tau                 0;
        0                  0                  0                  1                  0];
```

%vertice 8

w0=w0_inf; iF0=iF0_sup; iq0=iq0_sup; id0=id0_sup;

```
A8 = [   LF*Rg/d1           w0*LF*Lqg/d1           -k*MF*rF/d1           LF*Lqg*iq0           0;
        w0*Ldg/Lqg        -Rg/Lqg                w0*k*MF/Lqg          (Ldg*id0+k*MF*iF0)/Lqg  0;
        -k*MF*Rg/d1       -w0*k*MF*Lqg/d1        Ldg*rF/d1           -k*MF*Lqg*iq0         0;
        (Lq-Ld)*iq0/(3*tau) ((Lq-Ld)*id0-k*MF*iF0)/(3*tau) -k*MF*iq0/(3*tau)   -D/tau                 0;
```

```

0 0 0 1 0];

%vertice 9
w0=w0_sup; iF0=iF0_inf; iq0=iq0_inf; id0=id0_inf;

A9 = [ LF*Rg/d1 w0*LF*Lqg/d1 -k*MF*rF/d1 LF*Lqg*iq0 0;
w0*Ldg/Lqg -Rg/Lqg w0*k*MF/Lqg (Ldg*id0+k*MF*iF0)/Lqg 0;
-k*MF*Rg/d1 -w0*k*MF*Lqg/d1 Ldg*rF/d1 -k*MF*Lqg*iq0 0;
(Lq-Ld)*iq0/(3*tau) ((Lq-Ld)*id0-k*MF*iF0)/(3*tau) -k*MF*iq0/(3*tau) -D/tau 0;
0 0 0 1 0];

%vertice 10
w0=w0_sup; iF0=iF0_inf; iq0=iq0_inf; id0=id0_sup;

A10 = [ LF*Rg/d1 w0*LF*Lqg/d1 -k*MF*rF/d1 LF*Lqg*iq0 0;
w0*Ldg/Lqg -Rg/Lqg w0*k*MF/Lqg (Ldg*id0+k*MF*iF0)/Lqg 0;
-k*MF*Rg/d1 -w0*k*MF*Lqg/d1 Ldg*rF/d1 -k*MF*Lqg*iq0 0;
(Lq-Ld)*iq0/(3*tau) ((Lq-Ld)*id0-k*MF*iF0)/(3*tau) -k*MF*iq0/(3*tau) -D/tau 0;
0 0 0 1 0];

%vertice 11
w0=w0_sup; iF0=iF0_inf; iq0=iq0_sup; id0=id0_inf;

A11 = [ LF*Rg/d1 w0*LF*Lqg/d1 -k*MF*rF/d1 LF*Lqg*iq0 0;
w0*Ldg/Lqg -Rg/Lqg w0*k*MF/Lqg (Ldg*id0+k*MF*iF0)/Lqg 0;
-k*MF*Rg/d1 -w0*k*MF*Lqg/d1 Ldg*rF/d1 -k*MF*Lqg*iq0 0;
(Lq-Ld)*iq0/(3*tau) ((Lq-Ld)*id0-k*MF*iF0)/(3*tau) -k*MF*iq0/(3*tau) -D/tau 0;
0 0 0 1 0];

%vertice 12
w0=w0_sup; iF0=iF0_inf; iq0=iq0_sup; id0=id0_sup;

A12 = [ LF*Rg/d1 w0*LF*Lqg/d1 -k*MF*rF/d1 LF*Lqg*iq0 0;
w0*Ldg/Lqg -Rg/Lqg w0*k*MF/Lqg (Ldg*id0+k*MF*iF0)/Lqg 0;
-k*MF*Rg/d1 -w0*k*MF*Lqg/d1 Ldg*rF/d1 -k*MF*Lqg*iq0 0;
(Lq-Ld)*iq0/(3*tau) ((Lq-Ld)*id0-k*MF*iF0)/(3*tau) -k*MF*iq0/(3*tau) -D/tau 0;
0 0 0 1 0];

%vertice 13
w0=w0_sup; iF0=iF0_sup; iq0=iq0_inf; id0=id0_inf;

A13 = [ LF*Rg/d1 w0*LF*Lqg/d1 -k*MF*rF/d1 LF*Lqg*iq0 0;
w0*Ldg/Lqg -Rg/Lqg w0*k*MF/Lqg (Ldg*id0+k*MF*iF0)/Lqg 0;
-k*MF*Rg/d1 -w0*k*MF*Lqg/d1 Ldg*rF/d1 -k*MF*Lqg*iq0 0;
(Lq-Ld)*iq0/(3*tau) ((Lq-Ld)*id0-k*MF*iF0)/(3*tau) -k*MF*iq0/(3*tau) -D/tau 0;
0 0 0 1 0];

%vertice 14
w0=w0_sup; iF0=iF0_sup; iq0=iq0_inf; id0=id0_sup;

A14 = [ LF*Rg/d1 w0*LF*Lqg/d1 -k*MF*rF/d1 LF*Lqg*iq0 0;
w0*Ldg/Lqg -Rg/Lqg w0*k*MF/Lqg (Ldg*id0+k*MF*iF0)/Lqg 0;
-k*MF*Rg/d1 -w0*k*MF*Lqg/d1 Ldg*rF/d1 -k*MF*Lqg*iq0 0;
(Lq-Ld)*iq0/(3*tau) ((Lq-Ld)*id0-k*MF*iF0)/(3*tau) -k*MF*iq0/(3*tau) -D/tau 0;
0 0 0 1 0];

%vertice 15
w0=w0_sup; iF0=iF0_sup; iq0=iq0_sup; id0=id0_inf;

A15 = [ LF*Rg/d1 w0*LF*Lqg/d1 -k*MF*rF/d1 LF*Lqg*iq0 0;
w0*Ldg/Lqg -Rg/Lqg w0*k*MF/Lqg (Ldg*id0+k*MF*iF0)/Lqg 0;

```

```

-k*MF*Rg/d1      -w0*k*MF*Lqg/d1      Ldg*rF/d1      -k*MF*Lqg*iq0      0;
(Lq-Ld)*iq0/(3*tau)  ((Lq-Ld)*id0-k*MF*if0)/(3*tau)  -k*MF*iq0/(3*tau)  -D/tau      0;
0                0                0                1                0];

%vertice 16

w0=w0_sup;  if0=if0_sup;  iq0=iq0_sup;  id0=id0_sup;

A16 = [   LF*Rg/d1      w0*LF*Lqg/d1      -k*MF*rF/d1      LF*Lqg*iq0      0;
          w0*Ldg/Lqg      -Rg/Lqg      w0*k*MF/Lqg      (Ldg*id0+k*MF*if0)/Lqg      0;
          -k*MF*Rg/d1      -w0*k*MF*Lqg/d1      Ldg*rF/d1      -k*MF*Lqg*iq0      0;
          (Lq-Ld)*iq0/(3*tau)  ((Lq-Ld)*id0-k*MF*if0)/(3*tau)  -k*MF*iq0/(3*tau)  -D/tau      0;
          0                0                0                1                0];

```

E.2.2. msqs_analisis.m

En este programa de MATLAB se prueba que el generador síncrono es QS en lazo abierto.

```

%Síntesis de un controlador invariante en el tiempo que garantiza desempeño
%robusto en un generador sincrónico
%Se toman los datos del ejemplo 4.1 del libro de Anderson segunda edición

```

```

clc
close all

%           Importante
%   Escribir el programa que
%   se use para abrir pdf
%           |
%           | v |
dos('taskkill /F /IM PDFXCview.exe') %cierra los archivos pdf
dos('taskkill /F /IM acroRd32.exe')

run('datos_del_sistema');

t = cputime;
Q=sdpvar(5,5);

%El generador síncrono es QS en lazo abierto dado que el siguiente conjunto
%de LMI's es factible.

H = set(Q>0);
H = H+set(A1*Q+Q*A1'<0);
H = H+set(A2*Q+Q*A2'<0);
H = H+set(A3*Q+Q*A3'<0);
H = H+set(A4*Q+Q*A4'<0);
H = H+set(A5*Q+Q*A5'<0);
H = H+set(A6*Q+Q*A6'<0);
H = H+set(A7*Q+Q*A7'<0);
H = H+set(A8*Q+Q*A8'<0);
H = H+set(A9*Q+Q*A9'<0);
H = H+set(A10*Q+Q*A10'<0);
H = H+set(A11*Q+Q*A11'<0);
H = H+set(A12*Q+Q*A12'<0);
H = H+set(A13*Q+Q*A13'<0);
H = H+set(A14*Q+Q*A14'<0);
H = H+set(A15*Q+Q*A15'<0);
H = H+set(A16*Q+Q*A16'<0);

solvesdp(H)
Q=double(Q);
e = cputime-t; %e=0.4992

%El sistema ya es QS en lazo abierto, sin embargo, su desempeño no es muy
%bueno y es necesario diseñar un controlador que garantice una respuesta
%dinámica mejor.

```

```

open_system('msqs1')
tf=3000; %stop time
ts=0.05; %paso de integración
tf=num2str(tf);
ts=num2str(ts);
set_param('msqs1/Manual Switch','sw','0');
set_param('msqs1/Manual Switch p','sw','0');
set_param(bdroot,'stop time',tf);
set_param(bdroot,'FixedStep',ts);
F=zeros(2,5);
sim('msqs1')

print -dpdf -r300 -s msqs1.pdf
winopen('msqs1.pdf')

ts=str2double(ts);
tf=str2double(tf);
tfp=5; %tiempo de simulación para x0(t)

if tfp>tf
    tfp=tf;
end

Fig1=figure(1);
maxfig(Fig1,1)

cg=0.3; %variable utilizada para acotar los graficos.
subplot(5,1,1); plot(t(1:tfp/ts),id0(1:tfp/ts),'LineWidth',2);
if abs(max(id0)-min(id0))~=0
    axis([0 tfp min(id0)-cg*abs(max(id0)-min(id0)) max(id0)+cg*abs(max(id0)-min(id0))]);
else
    axis([0 tfp id0(1)-cg*abs(id0(1)) id0(1)+cg*abs(id0(1))]);
end
grid;
ylabel(['$' 'i_{d0}(t)' '$'],'interpreter','latex')

subplot(5,1,2); plot(t(1:tfp/ts),iq0(1:tfp/ts),'LineWidth',2);
if abs(max(iq0)-min(iq0))~=0
    axis([0 tfp min(iq0)-cg*abs(max(iq0)-min(iq0)) max(iq0)+cg*abs(max(iq0)-min(iq0))]);
else
    axis([0 tfp iq0(1)-cg*abs(iq0(1)) iq0(1)+cg*abs(iq0(1))]);
end
grid;
ylabel(['$' 'i_{q0}(t)' '$'],'interpreter','latex')

subplot(5,1,3); plot(t(1:tfp/ts),iF0(1:tfp/ts),'LineWidth',2);
if abs(max(iF0)-min(iF0))~=0
    axis([0 tfp min(iF0)-cg*abs(max(iF0)-min(iF0)) max(iF0)+cg*abs(max(iF0)-min(iF0))]);
else
    axis([0 tfp iF0(1)-cg*abs(iF0(1)) iF0(1)+cg*abs(iF0(1))]);
end
grid;
ylabel(['$' 'i_{F0}(t)' '$'],'interpreter','latex')

subplot(5,1,4); plot(t(1:tfp/ts),w0(1:tfp/ts),'LineWidth',2);
if abs(max(w0)-min(w0))~=0
    axis([0 tfp min(w0)-cg*abs(max(w0)-min(w0)) max(w0)+cg*abs(max(w0)-min(w0))]);
else
    axis([0 tfp w0(1)-cg*abs(w0(1)) w0(1)+cg*abs(w0(1))]);
end
grid;
ylabel(['$' '\omega_{0}(t)' '$'],'interpreter','latex')

subplot(5,1,5); plot(t(1:tfp/ts),delta0(1:tfp/ts),'LineWidth',2);
if abs(max(delta0)-min(delta0))~=0
    axis([0 tfp min(delta0)-cg*abs(max(delta0)-min(delta0)) max(delta0)+cg*abs(max(delta0)-min(delta0))]);
else

```

```

        axis([0 tfp delta0(1)-cg*abs(delta0(1)) delta0(1)+cg*abs(delta0(1))]);
end
grid;
ylabel(['\delta_{0}(t)' '$'], 'interpreter', 'latex')
xlabel(['t (s)' '$'], 'interpreter', 'latex')

plottedit on

set(gcf, 'PaperUnits', 'centimeters');
set(gcf, 'PaperSize', [18 25]);
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'manual');
set(gcf, 'PaperPosition', [0 0 18 25]);
print( gcf, '-dpdf', strcat('grafica_analisis1') )

winopen('grafica_analisis1.pdf')
%%%%%%%%%%%%%%

set(gcf, 'PaperUnits', 'centimeters');
set(gcf, 'PaperSize', [30 20]);
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'manual');
set(gcf, 'PaperPosition', [0 0 30 20]);
print( gcf, '-dpdf', strcat('presentacion_punto_de_op') )

winopen('presentacion_punto_de_op.pdf')
%%%%%%%%%%%%%%

Fig2=figure(2);
maxfig(Fig2,1)

subplot(5,1,1); plot(t,id1,'LineWidth',2);
if abs(max(id1)-min(id1))~=0
    axis([0 tf min(id1)-cg*abs(max(id1)-min(id1)) max(id1)+cg*abs(max(id1)-min(id1))]);
else
    axis([0 tf id1(1)-cg*abs(id1(1)) id1(1)+cg*abs(id1(1))]);
end
grid;
ylabel(['i_d(t)' '$'], 'interpreter', 'latex')

subplot(5,1,2); plot(t,iq1,'LineWidth',2);
if abs(max(iq1)-min(iq1))~=0
    axis([0 tf min(iq1)-cg*abs(max(iq1)-min(iq1)) max(iq1)+cg*abs(max(iq1)-min(iq1))]);
else
    axis([0 tf iq1(1)-cg*abs(iq1(1)) iq1(1)+cg*abs(iq1(1))]);
end
grid;
ylabel(['i_q(t)' '$'], 'interpreter', 'latex')

subplot(5,1,3); plot(t,iF1,'LineWidth',2);
if abs(max(iF1)-min(iF1))~=0
    axis([0 tf min(iF1)-cg*abs(max(iF1)-min(iF1)) max(iF1)+cg*abs(max(iF1)-min(iF1))]);
else
    axis([0 tf iF1(1)-cg*abs(iF1(1)) iF1(1)+cg*abs(iF1(1))]);
end
grid;
ylabel(['i_F(t)' '$'], 'interpreter', 'latex')

subplot(5,1,4); plot(t,w1,'LineWidth',2);
if abs(max(w1)-min(w1))~=0
    axis([0 tf min(w1)-cg*abs(max(w1)-min(w1)) max(w1)+cg*abs(max(w1)-min(w1))]);
else
    axis([0 tf w1(1)-cg*abs(w1(1)) w2(1)+cg*abs(w1(1))]);
end
grid;
ylabel(['\omega(t)' '$'], 'interpreter', 'latex')

subplot(5,1,5); plot(t,delta1,'LineWidth',2);
if abs(max(delta1)-min(delta1))~=0
    axis([0 tf min(delta1)-cg*abs(max(delta1)-min(delta1)) max(delta1)+cg*abs(max(delta1)-min(delta1))]);

```

```

else
    axis([0 tf delta1(1)-cg*abs(delta1(1)) delta1(1)+cg*abs(delta1(1))]);
end
grid;
ylabel(['\delta(t) '\$'],'interpreter','latex')
xlabel(['t (s) '\$'],'interpreter','latex')

plottedit on

set(gcf, 'PaperUnits', 'centimeters');
set(gcf, 'PaperSize', [18 25]);
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'manual');
set(gcf, 'PaperPosition', [0 0 18 25]);
print( gcf, '-dpdf', strcat('grafica_analisis2') )

winopen('grafica_analisis2.pdf')
matlab2tex('C:\Users\Eduardo\Documents\maestria\Tesis\Simulaciones\msqs_analisis.m')
.

```

E.2.3. msqs_sintesis1.m

En este programa de MATLAB se calcula un controlador Lineal Invariante en el Tiempo que garantiza QS para todas las trayectorias del vector de parámetros dentro de las cotas especificadas.

```

%Sintesis de un controlador invariante en el tiempo que garantiza desempeño
%robusto en un generador sincrono
%Se toman los datos del ejemplo 4.1 del libro de Anderson segunda edición

```

```

clc
close all

%           Importante
%   Escribir el programa que
%   se use para abrir pdf
%           |
%           | v |
dos('taskkill /F /IM PDFXView.exe') %cierra los archivos pdf
dos('taskkill /F /IM acroRd32.exe')

run('datos_del_sistema');

t = cputime;
Q=sdpvar(5,5);
V=sdpvar(2,5);
gammac=6.2;
m=0.4;
H = set(Q>0);
H = H+set([ A1*Q+Q*A1'+B2*V+V'*B2'+m*eye(5)      B1      Q*C';
           B1'      -gammac*eye(2)      zeros(2,1);
           C*Q      zeros(1,2)      -1]<0);
H = H+set([ A2*Q+Q*A2'+B2*V+V'*B2'+m*eye(5)      B1      Q*C';
           B1'      -gammac*eye(2)      zeros(2,1);
           C*Q      zeros(1,2)      -1]<0);
H = H+set([ A3*Q+Q*A3'+B2*V+V'*B2'+m*eye(5)      B1      Q*C';
           B1'      -gammac*eye(2)      zeros(2,1);
           C*Q      zeros(1,2)      -1]<0);
H = H+set([ A4*Q+Q*A4'+B2*V+V'*B2'+m*eye(5)      B1      Q*C';
           B1'      -gammac*eye(2)      zeros(2,1);
           C*Q      zeros(1,2)      -1]<0);
H = H+set([ A5*Q+Q*A5'+B2*V+V'*B2'+m*eye(5)      B1      Q*C';
           B1'      -gammac*eye(2)      zeros(2,1);
           C*Q      zeros(1,2)      -1]<0);
H = H+set([ A6*Q+Q*A6'+B2*V+V'*B2'+m*eye(5)      B1      Q*C';
           B1'      -gammac*eye(2)      zeros(2,1);
           C*Q      zeros(1,2)      -1]<0);
H = H+set([ A7*Q+Q*A7'+B2*V+V'*B2'+m*eye(5)      B1      Q*C';
           B1'      -gammac*eye(2)      zeros(2,1);
           C*Q      zeros(1,2)      -1]<0);

```



```

H = H+set([ A8*Q+Q*A8'+B2*V+V'*B2'+m*eye(5)      B1      Q*C';
           B1'      -gammac*eye(2)  zeros(2,1);
           C*Q      zeros(1,2)      -1]<0);
H = H+set([ A9*Q+Q*A9'+B2*V+V'*B2'+m*eye(5)      B1      Q*C';
           B1'      -gammac*eye(2)  zeros(2,1);
           C*Q      zeros(1,2)      -1]<0);
H = H+set([ A10*Q+Q*A10'+B2*V+V'*B2'+m*eye(5)    B1      Q*C';
           B1'      -gammac*eye(2)  zeros(2,1);
           C*Q      zeros(1,2)      -1]<0);
H = H+set([ A11*Q+Q*A11'+B2*V+V'*B2'+m*eye(5)    B1      Q*C';
           B1'      -gammac*eye(2)  zeros(2,1);
           C*Q      zeros(1,2)      -1]<0);
H = H+set([ A12*Q+Q*A12'+B2*V+V'*B2'+m*eye(5)    B1      Q*C';
           B1'      -gammac*eye(2)  zeros(2,1);
           C*Q      zeros(1,2)      -1]<0);
H = H+set([ A13*Q+Q*A13'+B2*V+V'*B2'+m*eye(5)    B1      Q*C';
           B1'      -gammac*eye(2)  zeros(2,1);
           C*Q      zeros(1,2)      -1]<0);
H = H+set([ A14*Q+Q*A14'+B2*V+V'*B2'+m*eye(5)    B1      Q*C';
           B1'      -gammac*eye(2)  zeros(2,1);
           C*Q      zeros(1,2)      -1]<0);
H = H+set([ A15*Q+Q*A15'+B2*V+V'*B2'+m*eye(5)    B1      Q*C';
           B1'      -gammac*eye(2)  zeros(2,1);
           C*Q      zeros(1,2)      -1]<0);
H = H+set([ A16*Q+Q*A16'+B2*V+V'*B2'+m*eye(5)    B1      Q*C';
           B1'      -gammac*eye(2)  zeros(2,1);
           C*Q      zeros(1,2)      -1]<0);

obj=trace(Q);
solvesdp(H)
Q=double(Q);
V=double(V);
e = cputime-t; %e=1.7004
F=V/Q;

open_system('msqs1')

tf=1000; %stop time
ts=0.01; %paso de integración
tf=num2str(tf);
ts=num2str(ts);
set_param('msqs1/Manual Switch','sw','1');
set_param('msqs1/Manual Switch p','sw','1');
set_param(bdroot,'stop time',tf);
set_param(bdroot,'FixedStep',ts);
sim('msqs1')

print -dpdf -r300 -s msqs1.pdf
winopen('msqs1.pdf')

ts=str2double(ts);
tf=str2double(tf);
tfp=5; %tiempo de simulación para x0(t)

if tfp>tf
    tfp=tf;
end

Fig1=figure(1);
maxfig(Fig1,1)

cg=0.3; %variable utilizada para acotar los graficos.
subplot(5,1,1); plot(t(1:tfp/ts),id0(1:tfp/ts),'LineWidth',2);
if abs(max(id0)-min(id0))~=0
    axis([0 tfp min(id0)-cg*abs(max(id0)-min(id0)) max(id0)+cg*abs(max(id0)-min(id0))]);
else
    axis([0 tfp id0(1)-cg*abs(id0(1)) id0(1)+cg*abs(id0(1))]);
end

```

```

grid;
ylabel(['\$', 'i_{d0}(t)' '\$'], 'interpreter', 'latex')

subplot(5,1,2); plot(t(1:tfp/ts), iq0(1:tfp/ts), 'LineWidth', 2);
if abs(max(iq0)-min(iq0))~=0
    axis([0 tfp min(iq0)-cg*abs(max(iq0)-min(iq0)) max(iq0)+cg*abs(max(iq0)-min(iq0))]);
else
    axis([0 tfp iq0(1)-cg*abs(iq0(1)) iq0(1)+cg*abs(iq0(1))]);
end
grid;
ylabel(['\$', 'i_{q0}(t)' '\$'], 'interpreter', 'latex')

subplot(5,1,3); plot(t(1:tfp/ts), iF0(1:tfp/ts), 'LineWidth', 2);
if abs(max(iF0)-min(iF0))~=0
    axis([0 tfp min(iF0)-cg*abs(max(iF0)-min(iF0)) max(iF0)+cg*abs(max(iF0)-min(iF0))]);
else
    axis([0 tfp iF0(1)-cg*abs(iF0(1)) iF0(1)+cg*abs(iF0(1))]);
end
grid;
ylabel(['\$', 'i_{F0}(t)' '\$'], 'interpreter', 'latex')

subplot(5,1,4); plot(t(1:tfp/ts), w0(1:tfp/ts), 'LineWidth', 2);
if abs(max(w0)-min(w0))~=0
    axis([0 tfp min(w0)-cg*abs(max(w0)-min(w0)) max(w0)+cg*abs(max(w0)-min(w0))]);
else
    axis([0 tfp w0(1)-cg*abs(w0(1)) w0(1)+cg*abs(w0(1))]);
end
grid;
ylabel(['\$', '\omega_{0}(t)' '\$'], 'interpreter', 'latex')

subplot(5,1,5); plot(t(1:tfp/ts), delta0(1:tfp/ts), 'LineWidth', 2);
if abs(max(delta0)-min(delta0))~=0
    axis([0 tfp min(delta0)-cg*abs(max(delta0)-min(delta0)) max(delta0)+cg*abs(max(delta0)-min(delta0))]);
else
    axis([0 tfp delta0(1)-cg*abs(delta0(1)) delta0(1)+cg*abs(delta0(1))]);
end
grid;
ylabel(['\$', '\delta_{0}(t)' '\$'], 'interpreter', 'latex')
xlabel(['\$', 't (s)' '\$'], 'interpreter', 'latex')

plottedit on

set(gcf, 'PaperUnits', 'centimeters');
set(gcf, 'PaperSize', [18 25]);
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'manual');
set(gcf, 'PaperPosition', [0 0 18 25]);
print( gcf, '-dpdf', strcat('grafical_sintesis1') )

winopen('grafical_sintesis1.pdf')

Fig2=figure(2);
maxfig(Fig2,1)

subplot(5,1,1); plot(t, id1, 'LineWidth', 2);
if abs(max(id1)-min(id1))~=0
    axis([0 tf min(id1)-cg*abs(max(id1)-min(id1)) max(id1)+cg*abs(max(id1)-min(id1))]);
else
    axis([0 tf id1(1)-cg*abs(id1(1)) id1(1)+cg*abs(id1(1))]);
end
grid;
ylabel(['\$', 'i_d(t)' '\$'], 'interpreter', 'latex')

subplot(5,1,2); plot(t, iq1, 'LineWidth', 2);
if abs(max(iq1)-min(iq1))~=0
    axis([0 tf min(iq1)-cg*abs(max(iq1)-min(iq1)) max(iq1)+cg*abs(max(iq1)-min(iq1))]);
else
    axis([0 tf iq1(1)-cg*abs(iq1(1)) iq1(1)+cg*abs(iq1(1))]);
end

```

```

grid;
ylabel(['\$' 'i_q(t)' '$'],'interpreter','latex')

subplot(5,1,3); plot(t,iF1,'LineWidth',2);
if abs(max(iF1)-min(iF1))~=0
    axis([0 tf min(iF1)-cg*abs(max(iF1)-min(iF1)) max(iF1)+cg*abs(max(iF1)-min(iF1))]);
else
    axis([0 tf iF1(1)-cg*abs(iF1(1)) iF1(1)+cg*abs(iF1(1))]);
end
grid;
ylabel(['\$' 'i_F(t)' '$'],'interpreter','latex')

subplot(5,1,4); plot(t,w1,'LineWidth',2);
if abs(max(w1)-min(w1))~=0
    axis([0 4 min(w1)-cg*abs(max(w1)-min(w1)) max(w1)+cg*abs(max(w1)-min(w1))]);
else
    axis([0 4 w1(1)-cg*abs(w1(1)) w2(1)+cg*abs(w1(1))]);
end
grid;
ylabel(['\$' '\omega(t)' '$'],'interpreter','latex')

subplot(5,1,5); plot(t,delta1,'LineWidth',2);
if abs(max(delta1)-min(delta1))~=0
    axis([0 tf min(delta1)-cg*abs(max(delta1)-min(delta1)) max(delta1)+cg*abs(max(delta1)-min(delta1))]);
else
    axis([0 tf delta1(1)-cg*abs(delta1(1)) delta1(1)+cg*abs(delta1(1))]);
end
grid;
ylabel(['\$' '\delta(t)' '$'],'interpreter','latex')
xlabel(['\$' 't (s)' '$'],'interpreter','latex')

plottedit on

set(gcf, 'PaperUnits', 'centimeters');
set(gcf, 'PaperSize', [18 25]);
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'manual');
set(gcf, 'PaperPosition', [0 0 18 25]);
print( gcf, '-dpdf', strcat('grafica2_sintesis1') )

winopen('grafica2_sintesis1.pdf')

%%%%%%%%%%
set(gcf, 'PaperUnits', 'centimeters');
set(gcf, 'PaperSize', [30 20]);
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'manual');
set(gcf, 'PaperPosition', [0 0 30 20]);
print( gcf, '-dpdf', strcat('presentacion_sintesis1') )

winopen('presentacion_sintesis1.pdf')
%%%%%%%%%%

```

E.2.4. msqs_sintesis2.m

En este programa de MATLAB se calcula un controlador politópico que garantiza QS para todas las trayectorias del vector de parámetros dentro de las cotas especificadas.

```

%Sintesis de un controlador politopico que garantiza desempeño
%robusto en un generador sincrónico
%Se toman los datos del ejemplo 4.1 del libro de Anderson segunda edición

clc
close all

%           Importante
%   Escribir el programa que
%   se use para abrir pdf
%           |
%           | v |
dos('taskkill /F /IM PDFXCview.exe') %cierra los archivos pdf

```

```

dos('taskkill /F /IM acroRd32.exe')

run('datos_del_sistema');

J=[-2.7 -2.7 -2.5 -0.1 -2.5]; %Polos de lazo cerrado propuestos

%Se utiliza el comando place para la asignación de polos en cada vértice
F1=-place(A1,B2,J);
F2=-place(A2,B2,J);
F3=-place(A3,B2,J);
F4=-place(A4,B2,J);
F5=-place(A5,B2,J);
F6=-place(A6,B2,J);
F7=-place(A7,B2,J);
F8=-place(A8,B2,J);
F9=-place(A1,B2,J);
F10=-place(A10,B2,J);
F11=-place(A11,B2,J);
F12=-place(A12,B2,J);
F13=-place(A13,B2,J);
F14=-place(A14,B2,J);
F15=-place(A15,B2,J);
F16=-place(A16,B2,J);

%Sistema en lazo cerrado en cada vértice
A1c1=A1+B2*F1;
A2c1=A2+B2*F2;
A3c1=A3+B2*F3;
A4c1=A4+B2*F4;
A5c1=A5+B2*F5;
A6c1=A6+B2*F6;
A7c1=A7+B2*F7;
A8c1=A8+B2*F8;
A9c1=A9+B2*F9;
A10c1=A10+B2*F10;
A11c1=A11+B2*F11;
A12c1=A12+B2*F12;
A13c1=A13+B2*F13;
A14c1=A14+B2*F14;
A15c1=A15+B2*F15;
A16c1=A16+B2*F16;

t = cputime; %Variable utilizada para conocer el tiempo que toma
            %resolver el problema de factibilidad
Q=sdpvar(5,5); %Variable matricial de desición
gammac=11; %gammac=gamma^2
m=0.01;
H = set(Q>0); %H es una variable en la que se almacenan todas las
            %restricciones del problema de factibilidad

H = H+set([ A1c1*Q+Q*A1c1'      B1      Q*C';
           B1'      -gammac*eye(2)  zeros(2,1);
           C*Q      zeros(1,2)      -1]<0);
H = H+set([ A2c1*Q+Q*A2c1'      B1      Q*C';
           B1'      -gammac*eye(2)  zeros(2,1);
           C*Q      zeros(1,2)      -1]<0);
H = H+set([ A3c1*Q+Q*A3c1'      B1      Q*C';
           B1'      -gammac*eye(2)  zeros(2,1);
           C*Q      zeros(1,2)      -1]<0);
H = H+set([ A4c1*Q+Q*A4c1'      B1      Q*C';
           B1'      -gammac*eye(2)  zeros(2,1);
           C*Q      zeros(1,2)      -1]<0);
H = H+set([ A5c1*Q+Q*A5c1'      B1      Q*C';
           B1'      -gammac*eye(2)  zeros(2,1);
           C*Q      zeros(1,2)      -1]<0);
H = H+set([ A6c1*Q+Q*A6c1'      B1      Q*C';
           B1'      -gammac*eye(2)  zeros(2,1);
           C*Q      zeros(1,2)      -1]<0);

```

```

H = H+set([ A7c1*Q+Q*A7c1'      B1      Q*C';
           B1'      -gammac*eye(2)  zeros(2,1);
           C*Q      zeros(1,2)      -1]<0);
H = H+set([ A8c1*Q+Q*A8c1'      B1      Q*C';
           B1'      -gammac*eye(2)  zeros(2,1);
           C*Q      zeros(1,2)      -1]<0);
H = H+set([ A9c1*Q+Q*A9c1'      B1      Q*C';
           B1'      -gammac*eye(2)  zeros(2,1);
           C*Q      zeros(1,2)      -1]<0);
H = H+set([ A10c1*Q+Q*A10c1'     B1      Q*C';
           B1'      -gammac*eye(2)  zeros(2,1);
           C*Q      zeros(1,2)      -1]<0);
H = H+set([ A11c1*Q+Q*A11c1'     B1      Q*C';
           B1'      -gammac*eye(2)  zeros(2,1);
           C*Q      zeros(1,2)      -1]<0);
H = H+set([ A12c1*Q+Q*A12c1'     B1      Q*C';
           B1'      -gammac*eye(2)  zeros(2,1);
           C*Q      zeros(1,2)      -1]<0);
H = H+set([ A13c1*Q+Q*A13c1'     B1      Q*C';
           B1'      -gammac*eye(2)  zeros(2,1);
           C*Q      zeros(1,2)      -1]<0);
H = H+set([ A14c1*Q+Q*A14c1'     B1      Q*C';
           B1'      -gammac*eye(2)  zeros(2,1);
           C*Q      zeros(1,2)      -1]<0);
H = H+set([ A15c1*Q+Q*A15c1'     B1      Q*C';
           B1'      -gammac*eye(2)  zeros(2,1);
           C*Q      zeros(1,2)      -1]<0);
H = H+set([ A16c1*Q+Q*A16c1'     B1      Q*C';
           B1'      -gammac*eye(2)  zeros(2,1);
           C*Q      zeros(1,2)      -1]<0);

solvesdp(H)          %Este comando resuelve el problema de factibilidad

Q=double(Q);
e = cputime-t; %e=0.4992

open_system('msqs2') %Abre el archivo de Simulink msqs2.mdl

tf=30; %stop time
ts=0.01; %paso de integración
tf=num2str(tf);
ts=num2str(ts);
set_param('msqs2/Manual Switch','sw','1'); %Ajusta el parametro 'sw' del bloque
set_param(bdroot,'stop time',tf);
set_param(bdroot,'FixedStep',ts); %'Manual Switch 9' en el archivo msqs2.mdl a'1'

sim('msqs2') %Corre la simulación de msqs2.mdl

print -dpdf -r300 -s msqs2.pdf %Genera un archivo pdf del diagrama en msqs2.mdl

winopen('msqs2.pdf') %abre el archivo pdf generado anteriormente

ts=str2double(ts);
tf=str2double(tf);
tfp=10; %tiempo de simulación para x0(t)

if tfp>tf
    tfp=tf;
end

Fig1=figure(1); %genera la figura F1
maxfig(Fig1,1); %maximiza la figura F1

cg=0.3; %variable utilizada para acotar de manera adecuada el eje vertical en los graficos.

%Generación de los graficos del punto de operación dinámico
subplot(5,1,1); plot(t(1:tfp/ts),id0(1:tfp/ts),'LineWidth',2);

```

```

if abs(max(id0)-min(id0))~=0
    axis([0 tfp min(id0)-cg*abs(max(id0)-min(id0)) max(id0)+cg*abs(max(id0)-min(id0))]);
else
    axis([0 tfp id0(1)-cg*abs(id0(1)) id0(1)+cg*abs(id0(1))]);
end
grid;
ylabel(['$' 'i_{d0}(t)' '$'],'interpreter','latex')

subplot(5,1,2); plot(t(1:tfp/ts),iq0(1:tfp/ts),'LineWidth',2);
if abs(max(iq0)-min(iq0))~=0
    axis([0 tfp min(iq0)-cg*abs(max(iq0)-min(iq0)) max(iq0)+cg*abs(max(iq0)-min(iq0))]);
else
    axis([0 tfp iq0(1)-cg*abs(iq0(1)) iq0(1)+cg*abs(iq0(1))]);
end
grid;
ylabel(['$' 'i_{q0}(t)' '$'],'interpreter','latex')

subplot(5,1,3); plot(t(1:tfp/ts),iF0(1:tfp/ts),'LineWidth',2);
if abs(max(iF0)-min(iF0))~=0
    axis([0 tfp min(iF0)-cg*abs(max(iF0)-min(iF0)) max(iF0)+cg*abs(max(iF0)-min(iF0))]);
else
    axis([0 tfp iF0(1)-cg*abs(iF0(1)) iF0(1)+cg*abs(iF0(1))]);
end
grid;
ylabel('i_F0(t)');
ylabel(['$' 'i_{F0}(t)' '$'],'interpreter','latex')

subplot(5,1,4); plot(t(1:tfp/ts),w0(1:tfp/ts),'LineWidth',2);
if abs(max(w0)-min(w0))~=0
    axis([0 tfp min(w0)-cg*abs(max(w0)-min(w0)) max(w0)+cg*abs(max(w0)-min(w0))]);
else
    axis([0 tfp w0(1)-cg*abs(w0(1)) w0(1)+cg*abs(w0(1))]);
end
grid;
ylabel(['$' '\omega_{0}(t)' '$'],'interpreter','latex')

subplot(5,1,5); plot(t(1:tfp/ts),delta0(1:tfp/ts),'LineWidth',2);
if abs(max(delta0)-min(delta0))~=0
    axis([0 tfp min(delta0)-cg*abs(max(delta0)-min(delta0)) max(delta0)+cg*abs(max(delta0)-min(delta0))]);
else
    axis([0 tfp delta0(1)-cg*abs(delta0(1)) delta0(1)+cg*abs(delta0(1))]);
end
grid;
ylabel(['$' '\delta_{0}(t)' '$'],'interpreter','latex')
xlabel(['$' 't (s)' '$'],'interpreter','latex')

plottedit on

%%Generación del archivo pdf en el que se muestra la dinámica del punto de operación%%

set(gcf, 'PaperUnits', 'centimeters');
set(gcf, 'PaperSize', [18 25]);
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'manual');
set(gcf, 'PaperPosition', [0 0 18 25]);
print( gcf, '-dpdf', strcat('grafica1_sintesis2') )

winopen('grafica1_sintesis2.pdf') %abre el archivo pdf anteriormente generado

Fig2=figure(2); %genera la figura F2
maxfig(Fig2,1); %maximiza la figura F2

% Generación de los graficos de la dinámica del sistema linealizado
% en un punto de operación dinámico

subplot(5,1,1); plot(t,id2,'LineWidth',2);
if abs(max(id2)-min(id2))~=0
    axis([0 tf min(id2)-cg*abs(max(id2)-min(id2)) max(id2)+cg*abs(max(id2)-min(id2))]);
else

```

```

        axis([0 tf id2(1)-cg*abs(id2(1)) id2(1)+cg*abs(id2(1))]);
    end
    grid;
    ylabel(['\$' 'i_d(t)' '$'],'interpreter','latex')

    subplot(5,1,2); plot(t,iq2,'LineWidth',2);
    if abs(max(iq2)-min(iq2))~=0
        axis([0 tf min(iq2)-cg*abs(max(iq2)-min(iq2)) max(iq2)+cg*abs(max(iq2)-min(iq2))]);
    else
        axis([0 tf iq2(1)-cg*abs(iq2(1)) iq2(1)+cg*abs(iq2(1))]);
    end
    grid;
    ylabel(['\$' 'i_q(t)' '$'],'interpreter','latex')

    subplot(5,1,3); plot(t,iF2,'LineWidth',2);
    if abs(max(iF2)-min(iF2))~=0
        axis([0 tf min(iF2)-cg*abs(max(iF2)-min(iF2)) max(iF2)+cg*abs(max(iF2)-min(iF2))]);
    else
        axis([0 tf iF2(1)-cg*abs(iF2(1)) iF2(1)+cg*abs(iF2(1))]);
    end
    grid;
    ylabel(['\$' 'i_F(t)' '$'],'interpreter','latex')

    subplot(5,1,4); plot(t,w2,'LineWidth',2);
    if abs(max(w2)-min(w2))~=0
        axis([0 tf min(w2)-cg*abs(max(w2)-min(w2)) max(w2)+cg*abs(max(w2)-min(w2))]);
    else
        axis([0 tf w2(1)-cg*abs(w2(1)) w2(1)+cg*abs(w2(1))]);
    end
    grid;
    ylabel(['\$' '\omega(t)' '$'],'interpreter','latex')

    subplot(5,1,5); plot(t,delta2,'LineWidth',2);
    if abs(max(delta2)-min(delta2))~=0
        axis([0 tf min(delta2)-cg*abs(max(delta2)-min(delta2)) max(delta2)+cg*abs(max(delta2)-min(delta2))]);
    else
        axis([0 tf delta2(1)-cg*abs(delta2(1)) delta2(1)+cg*abs(delta2(1))]);
    end
    grid;
    ylabel(['\$' '\delta(t)' '$'],'interpreter','latex')
    xlabel(['\$' 't (s)' '$'],'interpreter','latex')

    plottedit on

    %Generación del archivo pdf en el que se muestra la dinámica del
    % sistema en un punto de operación dinámico

    set(gcf, 'PaperUnits', 'centimeters');
    set(gcf, 'PaperSize', [18 25]);
    set(gcf, 'PaperPositionMode', 'manual');
    set(gcf, 'PaperPosition', [0 0 18 25]);
    print( gcf, '-dpdf', strcat('grafica2_sintesis2') )

    winopen('grafica2_sintesis2.pdf') %abre el archivo pdf anteriormente generado

    %%%%%%%%%%%
    set(gcf, 'PaperUnits', 'centimeters');
    set(gcf, 'PaperSize', [30 20]);
    set(gcf, 'PaperPositionMode', 'manual');
    set(gcf, 'PaperPosition', [0 0 30 20]);
    print( gcf, '-dpdf', strcat('presentacion_sintesis2') )

    winopen('presentacion_sintesis2.pdf')
    %%%%%%%%%%%

```

E.2.5. msqs1.mdl

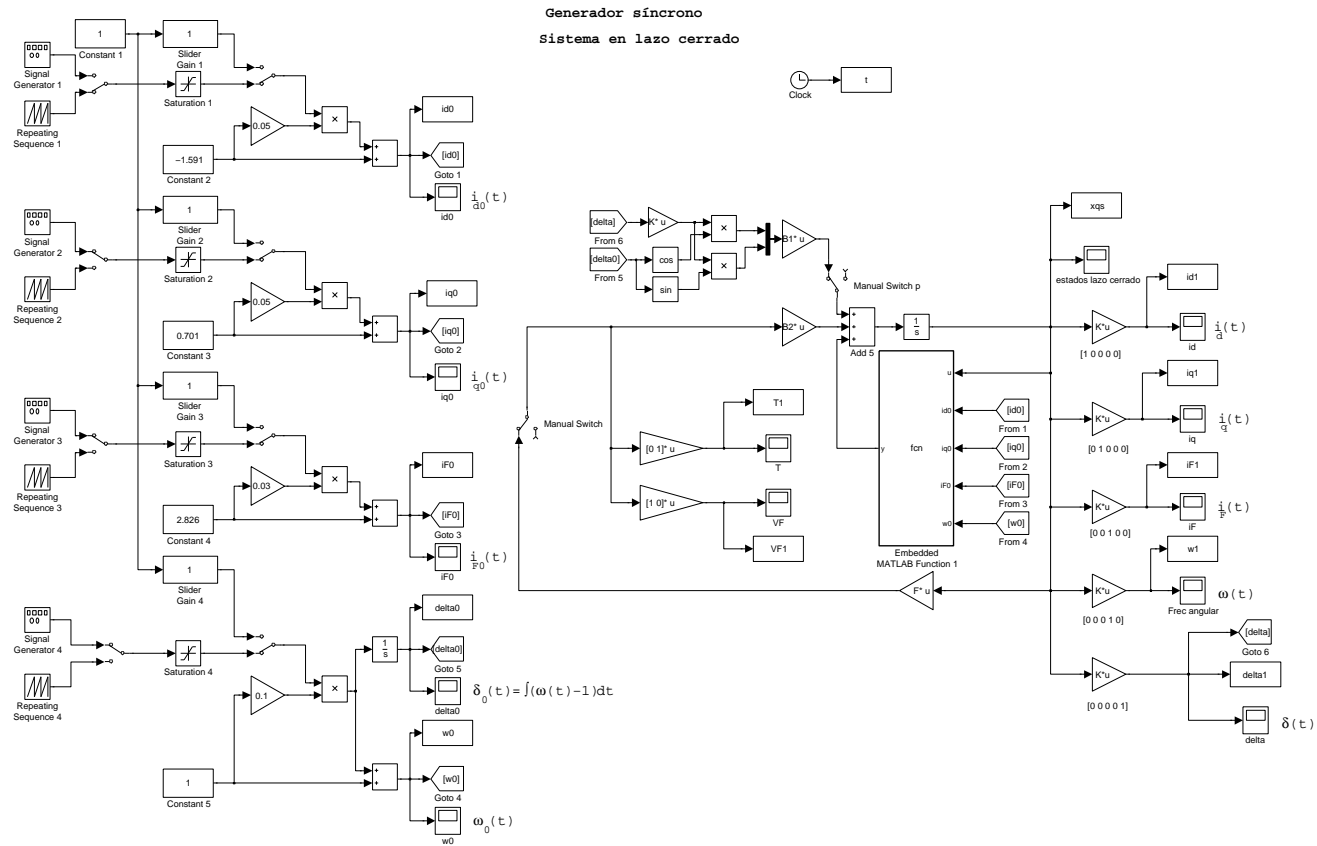


Figure E.3: Simulación en Simulink del generador síncrono en lazo cerrado con un controlador robusto LTI que garantiza QS.

E.2.6. msqs2.mdl

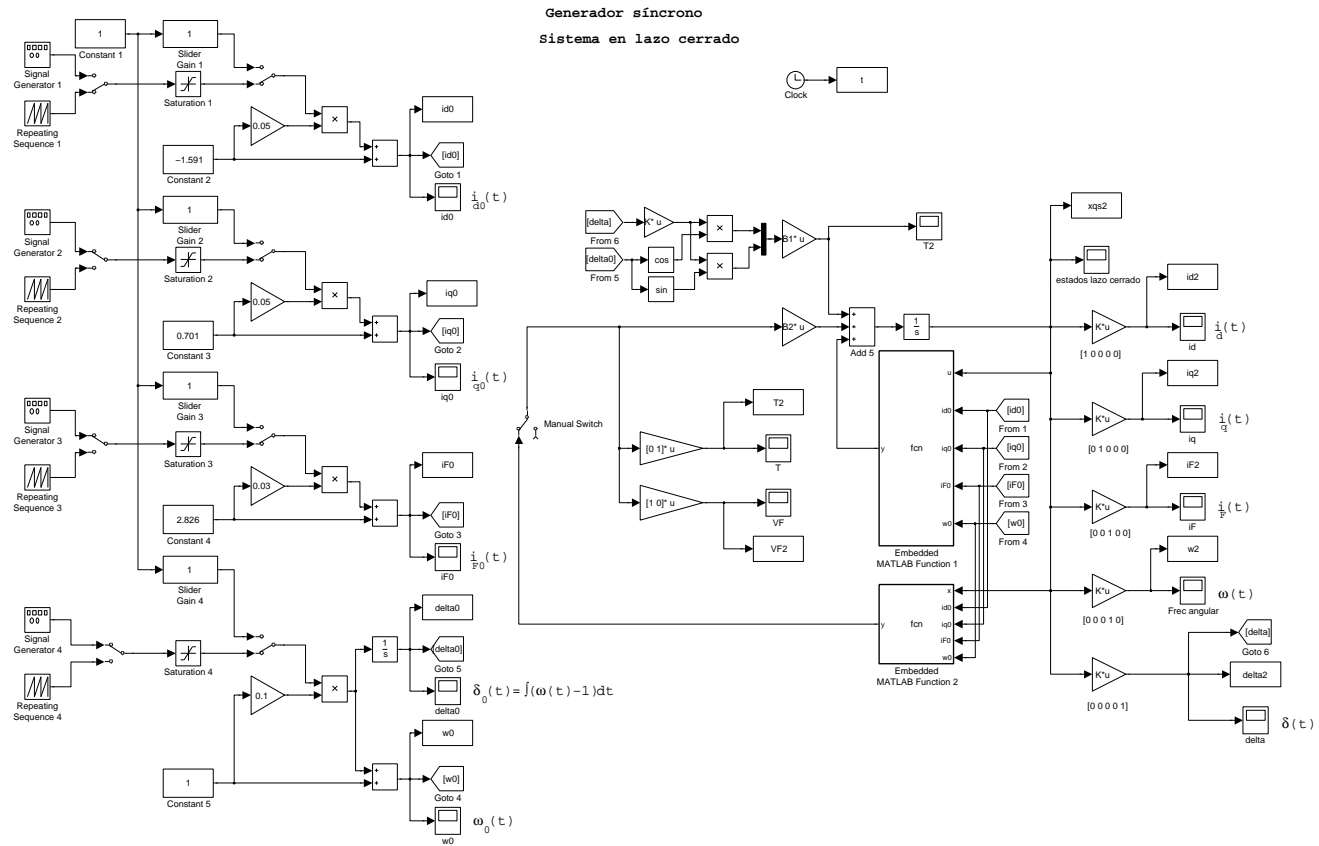


Figure E.4: Simulación en Simulink del generador síncrono en lazo cerrado con un controlador politopico que garantiza QS.

Embedded MATLAB Function 1

```
function y = fcn(u,id0,iq0,iF0,w0,Ld,Lq,LF,rF,k,MF,tau,D,Rg,Ldg,Lqg,d1)

y = [    LF*Rg/d1          w0*LF*Lqg/d1          -k*MF*rF/d1          LF*Lqg*iq0          0;
      w0*Ldg/Lqg          -Rg/Lqg          w0*k*MF/Lqg          (Ldg*id0+k*MF*iF0)/Lqg          0;
      -k*MF*Rg/d1          -w0*k*MF*Lqg/d1          Ldg*rF/d1          -k*MF*Lqg*iq0          0;
      (Lq-Ld)*iq0/(3*tau)  ((Lq-Ld)*id0-k*MF*iF0)/(3*tau)  -k*MF*iq0/(3*tau)  -D/tau          0;
      0                    0                    0                    1                    0]*u;
```

Embedded MATLAB Function 2

```
function y = fcn(x,F1,F2,F3,F4,F5,F6,F7,F8,F9,F10,F11,F12,F13,F14,F15,F16,...
                id0,iq0,iF0,w0,id0_inf,id0_sup,iq0_inf,iq0_sup,iF0_inf,iF0_sup,w0_inf,w0_sup)
```

```
%Componentes politopicas
gammai=1/((w0_sup-w0_inf)*(iF0_sup-iF0_inf)*(iq0_sup-iq0_inf)*(id0_sup-id0_inf));
a1=gammai*(w0_sup-w0)*(iF0_sup-iF0)*(iq0_sup-iq0)*(id0_sup-id0);
a2=gammai*(w0_sup-w0)*(iF0_sup-iF0)*(iq0_sup-iq0)*(id0-id0_inf);
a3=gammai*(w0_sup-w0)*(iF0_sup-iF0)*(iq0-iq0_inf)*(id0_sup-id0);
a4=gammai*(w0_sup-w0)*(iF0_sup-iF0)*(iq0-iq0_inf)*(id0-id0_inf);
a5=gammai*(w0_sup-w0)*(iF0-iF0_inf)*(iq0_sup-iq0)*(id0_sup-id0);
a6=gammai*(w0_sup-w0)*(iF0-iF0_inf)*(iq0_sup-iq0)*(id0-id0_inf);
a7=gammai*(w0_sup-w0)*(iF0-iF0_inf)*(iq0-iq0_inf)*(id0_sup-id0);
a8=gammai*(w0_sup-w0)*(iF0-iF0_inf)*(iq0-iq0_inf)*(id0-id0_inf);
a9=gammai*(w0-w0_inf)*(iF0_sup-iF0)*(iq0_sup-iq0)*(id0_sup-id0);
a10=gammai*(w0-w0_inf)*(iF0_sup-iF0)*(iq0_sup-iq0)*(id0-id0_inf);
a11=gammai*(w0-w0_inf)*(iF0_sup-iF0)*(iq0-iq0_inf)*(id0_sup-id0);
a12=gammai*(w0-w0_inf)*(iF0_sup-iF0)*(iq0-iq0_inf)*(id0-id0_inf);
a13=gammai*(w0-w0_inf)*(iF0-iF0_inf)*(iq0_sup-iq0)*(id0_sup-id0);
a14=gammai*(w0-w0_inf)*(iF0-iF0_inf)*(iq0_sup-iq0)*(id0-id0_inf);
a15=gammai*(w0-w0_inf)*(iF0-iF0_inf)*(iq0-iq0_inf)*(id0_sup-id0);
a16=gammai*(w0-w0_inf)*(iF0-iF0_inf)*(iq0-iq0_inf)*(id0-id0_inf);

y = (a1*F1+a2*F2+a3*F3+a4*F4...
     +a5*F5+a6*F6+a7*F7+a8*F8...
     +a9*F9+a10*F10+a11*F11+a12*F12...
     +a13*F13+a14*F14+a15*F15+a16*F16)*x;
```

Apéndice F

Publicación de resultados

Quadratic Stability Methodology by Parameter Dependent State Feedback for LPV Systems

Sometido al 9th International Conference on Electrical Engineering,
Computing Science and Automatic Control, CCE 2012.

Quadratic Stability Methodology by Parameter Dependent State Feedback for LPV Systems

E. Martínez and R. Galindo

Department of Electrical and Mechanical Engineering, Autonomus University of Nuevo Leon, Mexico
Phone 8183294020 ext. 5773. E-mail: eduardomtza@gmail.com, E-mail: rgalindo@gama.fime.uanl.mx

Abstract—This paper presents an alternative methodology to solve the quadratic stabilization problem via parameter dependent state feedback. Sufficient conditions for Quadratic Stability by parameter dependent state feedback are given, the LPV control law is gotten by a parameter dependent interpolation of LTI controllers (one for each vertex) solving the regulation problem. This technique is proved using an upper bound of the parameter dependent Lyapunov function of the system. The results are illustrated by a simulation example of a two-cart system.

Keywords: Lyapunov’s stability, Quadratic Stabilization by state feedback, Linear Parameter Varying Systems (LPV Systems), Linear Matrix Inequalities (LMI’s).

I. INTRODUCTION

The robust control for Linear Parameter Varying systems (LPV) is an actual and active area of research. These control techniques are based on Lyapunov’s stability theory and their results are usually in the form of feasibility problems for a set of Linear Matrix Inequalities (LMI’s), see [3]. There exist MATLAB Toolboxes such as the LMI Control toolbox and YALMIP (see [4] and [5] respectively for more information) that allows to solve feasibility problems typically occurring in control theory.

A procedure to calculate a Linear Time Invariant (LTI) full state feedback that guaranties Quadratic Stability (QS) is shown in [1], [3] and [6]; in this case a dual Lyapunov Function of the closed loop system is used because it has some computational advantages.

QS by parameter dependent linear output feedback with H_∞ performance have been studied in [7], [8], their approach consists in calculating an LTI controller using the Bounded Real Lemma in each vertex of the polytope for the closed loop system with the same performance measure, then the LPV controller is obtained interpolating those LTI controllers in each vertex.

In this paper an alternative approach to achieve QS via parameter dependent state feedback control for LPV systems is presented, this approach consists basically of designing an LTI stabilizing controller at each vertex such that the closed loop system dynamic is equal at each vertex, in this case if the considered closed loop LPV system lies on a convex

polytope, then its dynamic remains invariant for all variations in the bounded parameters, and a parameter dependent control law can be obtained by a smooth interpolation of the LTI controllers. A review of some basic concepts is given in section II. The problem statement is established in section III. The main results are given in section IV. In section V a simulation example of a two cart system illustrate the proposed results, and finally in the last section conclusions are given.

II. BACKGROUND

From the well known Lyapunov stability theory arises the following definitions:

Definition 1: (see [2], [1]) System $\dot{x}(t) = A(p)x(t)$ is Quadratically Stable (QS) in H if and only if there exists a positive definite matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ such that for all $p \in R$

$$A^T(p)P + PA(p) < 0 \quad (1)$$

Definition 2: (see [1]) System $\dot{x}(t) = A(p(t))x(t)$ is QS via Parameter Dependent Lyapunov Function (PDLF) in H if and only if there exists a positive definite matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ such that for all $p \in H$

$$A^T(p)P(p) + P(p)A(p) + \dot{P}(p) < 0 \quad (2)$$

In general, Definitions 1 and 2 require the solution of a feasibility problem subject to an infinite number of Linear Matrix Inequalities (LMI’s) (one for each $p \in H$); in the case of a QS test via PDLF results a dynamical feasibility problem with infinite number of LMI’s. Vertex Lemma shown in [10] allows to perform a QS test of an LPV system solving a feasibility problem subject to a finite number of LMI’s; this approach to perform stability test based on LMI’s conditions is also used for the control synthesis problem.

III. PROBLEM STATEMENT

Consider the state space description of an LPV system

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(p)x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0_{n-m \times m} \\ \tilde{B}(p) \end{bmatrix}}_{B(p)} u(t) \\ y(t) &= x(t) \end{aligned} \quad (3)$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $p(\cdot) = [p_1(\cdot) \ p_2(\cdot) \ \cdots \ p_q(\cdot)]^T : \mathbb{R}^+ \mapsto R$ is a vector valued function whose elements are the q time-varying parameters, being H an hyperbox in the parameter space, that is, a set of the form:

$$H := [\underline{p}_1, \bar{p}_1] \times [\underline{p}_2, \bar{p}_2] \times \cdots \times [\underline{p}_q, \bar{p}_q] \quad (4)$$

$A(\cdot) : \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(\cdot) : \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^{n \times m}$, are continuous and differentiable multi-affine matrix valued functions of $p(t)$, where $\check{B}(\cdot) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ is an invertible matrix $\forall p \in H$, n is the dimension of the state space and m is the dimension of the input space. H^v denotes the set whose elements are the vertexes of H , that is:

$$H^v := \left\{ p_j(t) : p_j(t) = \underline{p}_j \oplus p_j(t) = \bar{p}_j \ \forall j = 1, \dots, q \right\} \quad (5)$$

For simplicity, time dependency is omitted in notation and functions evaluated at the vertexes have a subscripts with the number of vertex in brackets, that is:

$$A_{(i)} = A(p_{(i)}) \quad B_{(i)} = B(p_{(i)}) \quad \forall i = 1, \dots, 2^q \quad (6)$$

where $p_{(i)}$ is the parameter vector evaluated in the i -th vertex, it is

$$p_{(i)} = [p_{1(i)} \ p_{2(i)} \ \cdots \ p_{q(i)}]^T \quad \forall i = 1, \dots, 2^q \quad (7)$$

where $p_{j(i)}$ is either \underline{p}_j or \bar{p}_j , $\forall j = 1, 2, \dots, q$. being i denotes the i -th vertex and j denotes the j -th parameter.

The aim of this paper is to present an alternative approach to achieve quadratic stabilization via parameter dependent state feedback with $u(t) = F(p)x(t)$ for systems in the form of (3) where full state stabilizability for all $p \in H$ is assumed.

An important concept used in this paper is the polytopic form of an LPV system, it consists basically in representing the system as a linear combination of its vertexes, to explain it let us represent the system matrix functions $A(\cdot)$ and $B(\cdot)$ as

$$S(p) := [A(p) \ B(p)] \quad (8)$$

assuming multiaffine parameter dependency, then $S(p)$ may be expressed as a set delimited by a convex hull of its vertexes, that is:

$$\begin{aligned} S(p) &\in \text{convex} \{S_{(1)}, \dots, S_{(2^q)}\} \\ &:= \left\{ \sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(p) S_{(i)} : \alpha_i(p) \geq 0, \sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(p) = 1 \right\} \\ &\quad \forall p \in H \quad (9) \end{aligned}$$

In this paper it is assumed that system matrices $A(\cdot)$ and $B(\cdot)$, may be expressed as the ratio of a multiaffine matrix valued function of p and a multi-affine polynomial of p , under this assumption $A(p)$ may be written in the following form:

$$A(p) = \frac{N_A(p)}{d_A(p)} = \frac{\sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(p) A_{(i)} p_{1(i)}^{k_1} p_{2(i)}^{k_2} \cdots p_{q(i)}^{k_q}}{\sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(p) p_{1(i)}^{k_1} p_{2(i)}^{k_2} \cdots p_{q(i)}^{k_q}} \quad (10)$$

where k_j is either 0 or 1, $\forall j = 1, \dots, q$.

If there is general non linear parameter dependency in an LPV system, the polytopic covering technique is an alternative in stability analysis and controller synthesis (see [1]). In the next section the main results are presented.

IV. MAIN RESULTS

In this section an alternative approach to achieve quadratic stabilization via parameter dependent state feedback control for LPV systems is presented. First, in order to define $\alpha_i(p)$ $\forall i = 1, \dots, 2^q$ in (9) a slightly improved version of the smooth interpolation procedure proposed in [9] is used, this procedure is as follows:

- Assign Vertexes of the LPV system $S(p)$ in (9) as shown below

$$S_{(1)} := S(\underline{p}_q, \underline{p}_{q-1}, \dots, \underline{p}_2, \underline{p}_1) \quad (11)$$

$$S_{(2)} := S(\underline{p}_q, \underline{p}_{q-1}, \dots, \underline{p}_2, \bar{p}_1)$$

$$S_{(3)} := S(\underline{p}_q, \underline{p}_{q-1}, \dots, \bar{p}_2, \underline{p}_1)$$

$$S_{(4)} := S(\underline{p}_q, \underline{p}_{q-1}, \dots, \bar{p}_2, \bar{p}_1)$$

⋮

$$S_{(q-1)} := S(\bar{p}_q, \bar{p}_{q-1}, \dots, \bar{p}_2, \underline{p}_1)$$

$$S_{(q)} := S(\bar{p}_q, \bar{p}_{q-1}, \dots, \bar{p}_2, \bar{p}_1)$$

Note that the above vertexes assignation is similar to a binary code.

- Let define Γ as the measure of the size of the hyper-box region in parameter space,

$$\Gamma = \prod_{i=1}^q \Delta_i \quad (12)$$

where $\Delta_i = \bar{p}_i - \underline{p}_i$, $\bar{p}_i > \underline{p}_i$ $\forall i = 1, \dots, q$, then $\Delta_i \in \mathbb{R}^+$

- Also, let define,

$$\bar{\Delta}_i(t) = \bar{p}_i - p_i(t) \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, q, \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (13)$$

$$\underline{\Delta}_i(t) = p_i(t) - \underline{p}_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, q, \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (14)$$

then,

$$\begin{aligned}
\alpha_1(p) &= \frac{\overline{\Delta}_q(t)\overline{\Delta}_{q-1}(t)\cdots\overline{\Delta}_2(t)\overline{\Delta}_1(t)}{\Gamma} \\
\alpha_2(p) &= \frac{\overline{\Delta}_q(t)\overline{\Delta}_{q-1}(t)\cdots\overline{\Delta}_2(t)\underline{\Delta}_1(t)}{\Gamma} \\
\alpha_3(p) &= \frac{\overline{\Delta}_q(t)\overline{\Delta}_{q-1}(t)\cdots\underline{\Delta}_2(t)\overline{\Delta}_1(t)}{\Gamma} \\
\alpha_4(p) &= \frac{\overline{\Delta}_q(t)\overline{\Delta}_{q-1}(t)\cdots\underline{\Delta}_2(t)\underline{\Delta}_1(t)}{\Gamma} \\
&\vdots \\
\alpha_{2^{q-1}}(p) &= \frac{\underline{\Delta}_q(t)\underline{\Delta}_{q-1}(t)\cdots\underline{\Delta}_2(t)\overline{\Delta}_1(t)}{\Gamma} \\
\alpha_{2^q}(p) &= \frac{\underline{\Delta}_q(t)\underline{\Delta}_{q-1}(t)\cdots\underline{\Delta}_2(t)\underline{\Delta}_1(t)}{\Gamma}
\end{aligned} \tag{15}$$

In order to illustrate the above consider a two parameter hyper-box, vertexes are assigned as in (11), that is, $S_{(1)} = S(\underline{p}_2, \underline{p}_1)$, $S_{(2)} = S(\underline{p}_2, \overline{p}_1)$, $S_{(3)} = S(\overline{p}_2, \underline{p}_1)$ and $S_{(4)} = S(\overline{p}_2, \overline{p}_1)$. The Figure (1) shows that as the operating point approaches the vertex i (where $i = 1, 2, 3, 4$) then the region $\alpha_i(p)$ increases. from (15) we have:

$$\begin{aligned}
\alpha_1(p) &= \frac{\overline{\Delta}_2(t)\overline{\Delta}_1(t)}{\Gamma} = \frac{(\overline{p}_2 - p_2(t))(\overline{p}_1 - p_1(t))}{\Gamma} \\
\alpha_2(p) &= \frac{\overline{\Delta}_2(t)\underline{\Delta}_1(t)}{\Gamma} = \frac{(\overline{p}_2 - p_2(t))(p_1(t) - \underline{p}_1)}{\Gamma} \\
\alpha_3(p) &= \frac{\underline{\Delta}_2(t)\overline{\Delta}_1(t)}{\Gamma} = \frac{(p_2(t) - \underline{p}_2)(\overline{p}_1 - p_1(t))}{\Gamma} \\
\alpha_4(p) &= \frac{\underline{\Delta}_2(t)\underline{\Delta}_1(t)}{\Gamma} = \frac{(p_2(t) - \underline{p}_2)(p_1(t) - \underline{p}_1)}{\Gamma}
\end{aligned} \tag{16}$$

where $\Gamma = (\overline{p}_2 - \underline{p}_2)(\overline{p}_1 - \underline{p}_1)$.

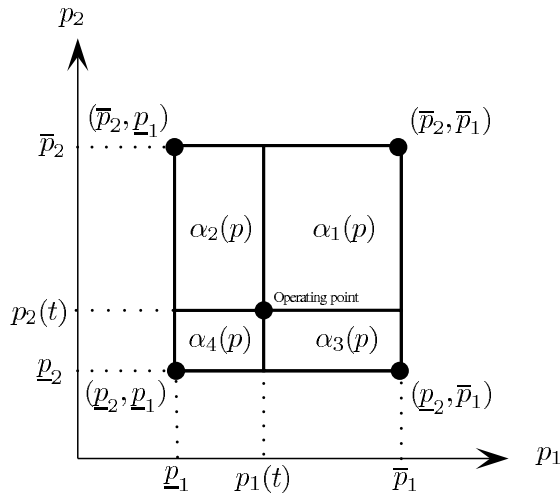


Fig. 1. Two parameter hyper-box.

From (15) each $\alpha_i(t)$ can be written in general as,

$$\alpha_i(t) = \frac{1}{\Gamma} (b_q(t)b_{q-1}(t), \dots, b_2(t)b_1(t)) \quad i = 1, \dots, 2^q \tag{17}$$

where $b_i(t)$ is either $\overline{\Delta}_i(t)$ or $\underline{\Delta}_i(t)$, $i = 1, \dots, 2^q$;

In order to simplify the writing of $\alpha_i(t)$ in general let introduce the following sets,

$$\overline{b} = \{k : b_k(t) = \overline{\Delta}_k(t)\} \tag{18}$$

$$\underline{b} = \{k : b_k(t) = \underline{\Delta}_k(t)\} \quad k = 1, \dots, q \tag{19}$$

To illustrate the above let consider a three parameter hyper-box, following the vertex assignment in (11), then $\alpha_6(t)$ is written as

$$\alpha_6(p) = \frac{1}{\Gamma} (b_3(t)b_2(t)b_1(t)) = \frac{1}{\Gamma} \left(\underbrace{\underline{\Delta}_3(t)}_{b_3} \underbrace{\overline{\Delta}_2(t)}_{b_2} \underbrace{\underline{\Delta}_1(t)}_{b_1} \right)$$

where $\overline{b} = \{2\}$ and $\underline{b} = \{1, 3\}$. Then $\alpha_i(t)$ may be written in general in the following form:

$$\alpha_i(p) = \frac{1}{\Gamma} \left(\prod_{k \in \overline{b}} \overline{\Delta}_k(t) \prod_{k \in \underline{b}} \underline{\Delta}_k(t) \right) \tag{20}$$

The polytopic representation of $P(p)$ in (2) is considered in the following results, that is

$$P(p) = \sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(p) P_{(i)} \tag{21}$$

The following Lemma will be useful later in this section to obtain an upper bound of a Lyapunov inequality in (2) that gives sufficient conditions for QS via parameter dependent state feedback.

Lemma 1: An upper-bound of the matrix parameter dependent function $\dot{P}(p) = \sum_{i=1}^{2^q} \dot{\alpha}_i(p) P_{(i)}$ is $hP_{(i)} \forall i = 1, \dots, 2^q, \forall p \in H$, where

$$h := \sum_{k=1}^q \frac{d_k}{\Delta_k} \geq |\dot{\alpha}_i(p)| \tag{22}$$

$$\Delta_k := \overline{p}_k - \underline{p}_k \in \mathbb{R}^+, \tag{23}$$

$$d_k := \sup |\dot{p}_k(t)|, \quad \forall k = 1, \dots, q \tag{24}$$

Proof 1: Consider the time derivative of $\alpha_i(p)$ in (20)

$$\dot{\alpha}_i(p) = \frac{1}{\Gamma} \left(\sum_{k \in \bar{b}} \dot{\bar{\Delta}}_k(t) \prod_{\substack{j \in \bar{b} \\ j \neq k}} \bar{\Delta}_j(t) \prod_{j \in \underline{b}} \underline{\Delta}_j(t) + \sum_{k \in \underline{b}} \dot{\underline{\Delta}}_k(t) \prod_{j \in \bar{b}} \bar{\Delta}_j(t) \prod_{\substack{j \in \underline{b} \\ j \neq k}} \underline{\Delta}_j(t) \right) \quad (25)$$

where:

$$\dot{\bar{\Delta}}_k(t) = \frac{d}{dt} (\bar{p}_k - p_k(t)) = -\dot{p}_k(t) \quad k \in \bar{b} \quad (26)$$

$$\dot{\underline{\Delta}}_k(t) = \frac{d}{dt} (p_k(t) - \underline{p}_k) = \dot{p}_k(t) \quad k \in \underline{b} \quad (27)$$

considering the absolute value of the variation rate of the k -th parameter, that is:

$$|\dot{\bar{\Delta}}_k(t)| = |\dot{p}_k(t)| \quad k \in \bar{b} \quad (28)$$

$$|\dot{\underline{\Delta}}_k(t)| = |\dot{p}_k(t)| \quad k \in \underline{b} \quad (29)$$

defining d_k as the upper bound of the absolute value of the k -th parameter:

$$d_k := \begin{cases} \sup |\dot{\bar{\Delta}}_k(t)| \geq |\dot{p}_k(t)| & k \in \bar{b} \\ \sup |\dot{\underline{\Delta}}_k(t)| \geq |\dot{p}_k(t)| & k \in \underline{b} \end{cases} \quad k = 1, \dots, q \quad (30)$$

$\dot{\alpha}_i$ in (25) is maximum iff $\bar{\Delta}_{j \in \bar{b}}(t) = \Delta_j$, $\underline{\Delta}_{j \in \underline{b}}(t) = \Delta_j$, $|\dot{\bar{\Delta}}_{k \in \bar{b}}(t)| = |\dot{p}_k(t)| = d_k$ and $|\dot{\underline{\Delta}}_{k \in \underline{b}}(t)| = |\dot{p}_k(t)| = d_k$ where $j, k = 1, \dots, q$, then we may write

$$|\dot{\alpha}_i(p)| \leq \frac{1}{\Gamma} \sum_{k=1}^q d_k \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^q \Delta_j \quad (31)$$

$$\leq \frac{\sum_{k=1}^q d_k \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^q \Delta_j}{\prod_{j=1}^{2^q} \Delta_j} \quad (32)$$

$$|\dot{\alpha}_i(p)| \leq \sum_{k=1}^q \frac{d_k}{\Delta_k} \quad (33)$$

then we can define h in the following form

$$h := \sum_{k=1}^q \frac{d_k}{\Delta_k} \geq |\dot{\alpha}_i(p)|$$

The procedure shown at the beginning of this section allows to perform a smooth interpolation of the LTI controllers at each vertex in real time using parameter measurements; nevertheless it is technically difficult to obtain accurate measurements in most of the applications, which may have an

adverse effect on quadratic stabilization using this approach; for this reason it is convenient to assure that closed loop LPV system is QS despite errors in measurements. Let denote p_r and p_m as the real parameter vector and the measured parameter vector respectively,

$$p_{ri}(t) = (1 + \gamma_i(t)) p_{mi}(t) \quad (34)$$

where $\gamma_i(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow [\underline{\gamma}_i, \bar{\gamma}_i] \in \mathbb{R}$ is a time function associated with the dynamical error (assumed to be slower than parameter variations) in measurement of the i -th parameter $\forall i = 1, \dots, q$; p is used to denote the parameter vector in general and may refer p_r or p_m . It is important to mention that full state stabilizability is assumed in the LPV system for all $p \in H$.

The following Lemma gives sufficient conditions for QS via parameter dependent state feedback control for LPV systems assuming dynamical error in measurements of the parameters.

Lemma 2: The LPV system given in (3) is quadratically stabilizable via linear state feedback control by $u(t) = \hat{F}(p_m)x(t)$, where the relation between p_r and p_m is given by (34), $\hat{F}(p_m) = [0_{m \times n-m} \quad \check{B}^{-1}(p_m)] \sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(p_m) B_{(i)} F_{(i)}$, $0 \leq \alpha_i(p) \leq 1$ and $\sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(p) = 1 \quad \forall p \in H$ if

$$\max_{\substack{i=1, \dots, 2^q \\ k=1, \dots, n}} \left\{ \text{Re} \left\{ \lambda_k \left\{ A_{(i)} + \left(\frac{h}{2} + c_1 \right) I_n + B_{(i)} F_{(i)} \right\} \right\} \right\} < 0 \quad (35)$$

where h is an upper bound of the total rate of variation of the system (defined in Lemma 1) and $c_1 = \|\hat{A}_{cl}\|_2$.

Proof 2: The closed loop form of system given in (3) with $u(t) = \hat{F}(p_m)x(t)$ may be written as

$$A_{cl}(p_r, p_m) = A(p_r) + B(p_r) \hat{F}(p_m) = \bar{A}_{cl}(p_m) + \tilde{A}_{cl}(p_m, \gamma) = A_{cl}(p_m, \gamma) \quad (36)$$

where $\bar{A}_{cl}(p_m) = A(p_m) + B(p_m) \hat{F}(p_m)$ and $\tilde{A}_{cl}(p_m, \gamma) = A_\gamma(p_m, \gamma) + B_\gamma(p_m, \gamma) \hat{F}(p_m) \leq c_1 I_n$.

To proof that $\hat{F}(p_m)$ makes $\bar{A}_{cl}(p_m)$ to be convex consider the following

$$\begin{aligned} B(p_m) \hat{F}(p_m) &= \begin{bmatrix} 0_{n-m \times m} \\ \check{B}(p_m) \end{bmatrix} [0_{m \times n-m} \quad \check{B}^{-1}(p_m)] \sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(p_m) B_{(i)} F_{(i)} \\ &= \sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(p_m) \begin{bmatrix} 0_{n-m \times n-m} & 0_{n-m \times m} \\ 0_{m \times n-m} & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{n-m \times m} \\ \check{B}_{(i)} \end{bmatrix} F_{(i)} \\ &= \sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(p_m) B_{(i)} F_{(i)} \end{aligned} \quad (37)$$

Then $\bar{A}_{cl}(p_m) = \sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(p_m) (A_{(i)} + B_{(i)}F_{(i)})$ is a convex function and if the closed loop system dynamic is stable and it is equal for all $i = 1, \dots, 2^q$ then it is a Hurwitz time-invariant matrix, and $\tilde{A}_{cl}(p_m, \gamma) = A_\gamma(p_m, \gamma) + B_\gamma(p_m, \gamma) \sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(p) F_{(i)} \leq c_1 I_n$ is a bounded time-varying matrix, an upper bound of this matrix simplifies this proof. If matrix B is invariant then $F(p) = \sum_{j=1}^{2^q} \alpha_j(p) F_{(j)}$ makes $\bar{A}_{cl}(p_m)$ to be convex then (36) can be obtained directly.

A feasible solution of the Lyapunov inequality in (2) for the closed loop system $A_{cl}(p_m, \gamma)$ may be written as

$$P(p_m, \gamma) = \bar{P}(p_m) + \tilde{P}(p_m, \gamma), \quad (38)$$

where $\bar{P}(p_m)$ is a symmetric, invariant, positive definite matrix since $\bar{A}_{cl}(p_m)$ is a Hurwitz time invariant matrix and $\tilde{P}(p_m, \gamma)$ is a symmetric, bounded, time-varying matrix-valued function, then (omitting parameter dependency for brevity in notation)

$$L = (\bar{A}_{cl} + \tilde{A}_{cl})^T (\bar{P} + \tilde{P}) + (\bar{P} + \tilde{P}) (\bar{A}_{cl} + \tilde{A}_{cl}) + \dot{\tilde{P}} \quad (39)$$

It is assumed that dynamical error in sensors cause norm bounded variations in system matrices, then there exists two scalar numbers $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ such that

$$\begin{aligned} \|\bar{A}_{cl}\|_2 &\gg \|c_1 I_n\|_2 \geq \|\tilde{A}_{cl}\|_2 \\ \|\bar{P}\|_2 &\gg \|c_2 I_n\|_2 \geq \|\tilde{P}\|_2 \iff \dot{\tilde{P}} \leq h\bar{P} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

then

$$\begin{aligned} L &\leq (\bar{A}_{cl} + c_1 I_n)^T (\bar{P} + c_2 I_n) \\ &\quad + (\bar{P} + c_2 I_n) (\bar{A}_{cl} + c_1 I_n) + h\bar{P} \\ &\leq \bar{A}_{cl}^T \bar{P} + \bar{P} \bar{A}_{cl} + \bar{Q} \end{aligned} \quad (40)$$

where

$$\begin{aligned} \bar{A}_{cl} &= \bar{A}_{cl} + \left(\frac{1}{2}h + c_1\right) I_n \\ &= \sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(p_m) \left(A_{(i)} + \left(\frac{1}{2}h + c_1\right) I_n + B_{(i)}F_{(i)} \right) \end{aligned} \quad (41)$$

and

$$\bar{Q} = c_2 \left(\bar{A}_{cl}^T + \bar{A}_{cl} + 2c_1 I_n \right)$$

Adding a symmetric positive definite matrix $M = mI_n$, $m \in \mathbb{R}^+$ in both sides of (40), that is

$$L + mI_n \leq \bar{A}_{cl}^T \bar{P} + \bar{P} \bar{A}_{cl} + \bar{Q} = 0 \quad (42)$$

where $\bar{Q} = c_2 \left(\bar{A}_{cl}^T + \bar{A}_{cl} + 2c_1 I_n \right) + mI_n$. From Lyapunov stability theory, if \bar{A}_{cl} is Hurwitz, then for any symmetric matrix $\bar{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ there exists a symmetric positive definite matrix $\bar{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfying Lyapunov stability theorem.

V. EXAMPLE

Consider the two cart system shown in Figure (2), its state space model is:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_1(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k/m_2 & k/m_2 & -b/m_2 & b/m_2 \\ k/m_1 & -k/m_2 & b/m_1 & -b/m_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_1(t) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/m_2 \\ 1/m_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ d(t) \end{bmatrix} \\ y(t) &= x_2(t) \end{aligned} \quad (43)$$

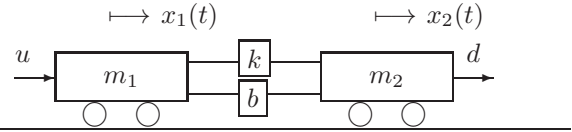


Fig. 2. two cart system

where:

$$\begin{aligned} m_1(t) &\in [1, 1.5] \text{ Kg} & d_1 &= \sup \left| \frac{d}{dt} m_1(t) \right| = 0.2 \text{ Kg/s} \\ m_2(t) &\in [2, 2.5] \text{ Kg} & d_2 &= \sup \left| \frac{d}{dt} m_2(t) \right| = 0.3 \text{ Kg/s} \\ k &= 1 \text{ N/s/m} & b &= 1 \text{ N/m}. \end{aligned}$$

the objective is to quadratically stabilize by state feedback. For simplicity, consider $p_r = p_m$, then $\|\tilde{A}_{cl}\|_2 = c_1 = 0$. Using the procedure to obtain an LTI controller or conventional technique we need to find a real positive definite matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and $V \in \mathbb{R}^{m \times n}$ such that for some $m \in \mathbb{R}^+$

$$QA_{(i)}^T + V^T B_{(i)}^T + A_{(i)}Q + B_{(i)}V + mI < 0 \quad \forall i < 2^q \quad (44)$$

Using YALMIP the set of LMI's given in (44) are solved for $m = 5$ and $Q > I_n$, and the result is:

$$F = \begin{bmatrix} -1 & -0.7214 & -1 & -0.883 \\ -2.3912 & -1 & -2.0517 & -1 \end{bmatrix}$$

On the other hand, by Lemma 1

$$h = \frac{d_2}{\Delta_2} + \frac{d_1}{\Delta_1} = \frac{0.3}{2.5 - 2} + \frac{0.2}{1.5 - 1} = 1$$

By Lemma 2 $F_{(i)}$ is calculated in each vertex such that eigenvalues of $A_{(i)} + \left(\frac{h}{2} + c_1\right) I_n + B_{(i)}F_{(i)}$ be -1.1 , -1.2 , -1.3 and -1.4 , that is,

$$F_1 = \begin{bmatrix} -1 & -2.42 & -1 & -2.7 \\ -3.8 & -1 & -5.2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} -1 & -2.42 & -1 & -2.7 \\ -5 & -1 & -6.75 & -1 \end{bmatrix}$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} -1 & -4.13 & -1 & -4.55 \\ -3.8 & -1 & -5.2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$F_4 = \begin{bmatrix} -1 & -4.13 & -1 & -4.55 \\ -5 & -1 & -6.75 & -1 \end{bmatrix}$$

In this case

$$\hat{F}(p) = \begin{bmatrix} 0_{m \times n-m} & \check{B}^{-1}(p) \end{bmatrix} \sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(p) B_{(i)} F_{(i)} \quad (45)$$

$$i = 1, \dots, 2^q$$

where $\check{B}^{-1}(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1/m_2 \\ 1/m_1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & m_1 \\ m_2 & 0 \end{bmatrix}$, guaranties QS $\forall p \in H$. Simulation of the closed loop system under the same time variations in parameters is shown in Figure (3), the control law of both controller is shown in Figure (4). In general, both techniques can provide good performance depending on the choice of the parameters associated with the conservatism of the controller. It is important to remark that the choice of the sensors is an important factor that must be taken into account when using a parameter dependent control law.

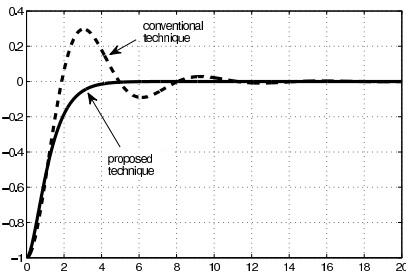


Fig. 3. Simulation of the closed loop system, proposed technique and conventional technique are shown.

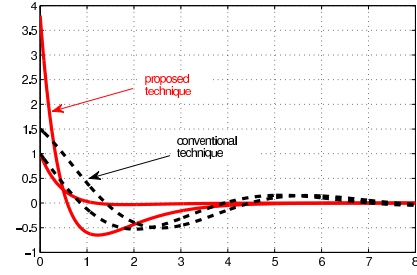


Fig. 4. Energy consumed by the control law.

VI. CONCLUSIONS

This paper presents an alternative methodology to solve the quadratic stabilization problem via parameter dependent state feedback. Stability of the closed loop LPV system is guaranteed in each vertex and its control law inside the polytope is gotten by interpolation. this technique is proved using a parameter dependent Lyapunov function of the closed loop system considering an upper bound of the rate variations of the parameters.

REFERENCES

- [1] F. Amato. *Robust Control of Linear Systems Subject to Uncertain Time-Varying Parameters*. Springer, 2006.
- [2] B. R. Barmish. *Stabilization of Uncertain Systems Via Linear Control*. Springer, 2006.
- [3] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Press, 1994.
- [4] P. Gahinet, A. Nemirovsky, A. Laub, M. Chilali, *LMI Control Toolbox for use with MATLAB*. The MathWorks Press, 1994.
- [5] J. Lofberg, *YALMIP : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB*. IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design, 2004.
- [6] J. Bernussou, P. L. D. Peres, J. C. Geromel, *A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems*, System and Control Letters, 13,65-72, 1989.
- [7] P. Apkarian and P. Gahinet, *A convex Characterization of Gain-Scheduled H_∞ Controllers*. IEEE, 1995.
- [8] P. Apkarian, P. Gahinet and G. Becker, *Self-scheduled H_∞ Control of Linear Parameter-Varying Systems: A Design Example*. Elsevier Science, 1995.
- [9] P. C. Pellanda, P. Apkarian, H. D. Tuan, *Missile Autopilot Design via Multi-channel LFT/LPV Control Method*. 2002.
- [10] H. P. Horisberger, P. R. Belanger, *Regulators for linear, time-invariant plants with uncertain parameters*, IEEE Transactions on Automatic Control, 21, 705-708, 1976.

Bibliografía

- [1] H. P. Horisberger, P. R. Belanger, *Regulators for linear, time-invariant plants with uncertain parameters*. IEEE Transactions on Automatic Control, pág. 705-708, 1976.
- [2] B. R. Barmish, *Stabilization of uncertain systems via linear control*. IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 28, pág. 848-850, 1983.
- [3] J. Bernussou, P. L. D. Peres, J. C. Geromel, *A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems*. System and Control Letters, pág. 65-72, 1989.
- [4] R. Mathias, *Matrices with Positive Definite Hermitian Part: Inequalities and Linear System*. Siam Journal on Matrix Analysis and Applications, vol. 13, no. 2, 1992.
- [5] E. W. Weisstein, *“Positive Definite Matrix” from MathWorld – A Wolfram Web Resource*. <http://mathworld.wolfram.com/PositiveDefiniteMatrix.html>
- [6] L. Xie, M. Fu y C. E. de Souza, *H_∞ Control and Quadratic Stabilization of Systems with Parameter Uncertainty via Output Feedback*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 37, pág. 1253 - 1256, Agosto 1992.
- [7] B. Wie, D. Bernstein, *Benchmark Problems for Robust Control Design*. Journal of Guidance, Control and Dynamics Vol. 15 pág. 1057-1059, Octubre 1992.
- [8] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron y V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Press, 1994.
- [9] I. R. Petersen, D. C. McFarlane, *Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 39, pág 1971-1977, 1994.
- [10] P. Gahinet, A. Nemirovsky, A. Laub y M. Chilali, *LMI Control Toolbox for use with MATLAB*. The MathWorks Press, 1994.
- [11] Z. Gajic, M. T. J. Quareshi, *Lyapunov Matrix Equation in System Stability and Control*. Academic Press, 1995.
- [12] P. Apkarian y P. Gahinet, *A convex Characterization of Gain-Scheduled H_∞ Controllers*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 40, pág 853-864, Mayo 1995.
- [13] P. Apkarian, P. Gahinet y G. Becker, *Self-scheduled H_∞ Control of Linear Parameter-Varying Systems: A Design Example*. Elsevier Science, Automatica, Vol. 31, pág 1251-1261, Septiembre 1995.
- [14] F. Amato, F. Garofalo, L. Glielmo, A. Pironti, *Quadratic Stabilization of Uncertain Linear Systems in Robust Control via Variable Structure and Lyapunov Techniques*. Springer Verlag, Berlin, pág 197-211, 1996.
- [15] H. Kajiwara, P. Apkarian y P. Gahinet, *Wide-range Stabilization of an Arm-Driven Inverted Pendulum Using Linear Parameter-Varying Techniques*. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, Minneapolis, 1998.
- [16] Y. Ando, H. Tsuge y M. Suzuki, *LPV Controller Design for ALFLEX by using LMI*. International Conference on Control Applications, pág. 1205-1210, Hawai, USA, Agosto 1999.
- [17] N. S. Nise. *Control Systems Engineering*. Third Edition, John Wiley & Sons , 2000.
- [18] O. Voinot, P. Apkarian y D. Alazard, *Gain-Scheduling H_∞ Control of the Launcher in Atmospheric Flight via Linear Parameter Varying Techniques*. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, Monterey, USA, Agosto 2002.

- [19] P. C. Pellanda, P. Apkarian, H. D. Tuan, *Missile Autopilot Design via Multi-channel LFT/LPV Control Method*. International Journal of Robust and Nonlinear Control, Vol. 12, pág 1-20, Enero 2002.
- [20] P. M. Anderson, A. A. Fouad, *Power System Control and Stability*, IEEE PRESS 2003.
- [21] J. Lofberg, *YALMIP : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB*. IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design, Taipei, Taiwan, september, 2004.
- [22] F. Amato. *Robust Control of Linear Systems Subject to Uncertain Time-Varying Parameters*. Springer, 2006.
- [23] K. Ogata. *Modern Control Engineering*. Fifth Edition, Prentice Hall, 2010.