

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



SINCRONIZACIÓN CAÓTICA DE REDES COMPLEJAS FORMADAS POR
OSCILADORES DISCRETOS

POR

ING. FILIBERTO ZAMBRANO AYALA

TESIS

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ORIENTACIÓN
EN CONTROL AUTOMÁTICO

CD. UNIVERSITARIA

ENERO DEL 2013

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



SINCRONIZACIÓN CAÓTICA DE REDES COMPLEJAS FORMADAS POR
OSCILADORES DISCRETOS

POR
ING. FILIBERTO ZAMBRANO AYALA

TESIS
EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ORIENTACIÓN
EN CONTROL AUTOMÁTICO

CD. UNIVERSITARIA

ENERO DEL 2013

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis “**Sincronización caótica de redes complejas formadas por osciladores discretos**” realizada por el alumno **Ing. Filiberto Zambrano Ayala**, matrícula número **1290699** sea aceptada por su defensa como opción al grado de Maestro en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica con Orientación en Control Automático.

El Comité de Tesis

Asesor
Dr. Cornelio Posadas Castillo

Coasesor:
Dr. César Elizondo González

Coasesor:
Dra. Rosa M. López Gutiérrez

Vo. Bo.
Dr. Moisés Hinojosa Rivera
División de Estudios de Posgrado
Cd. Universitaria, a Enero del 2013

Quiero dedicar esta tesis a Jesús y a María por estar siempre conmigo y ayudarme a concluir este trabajo que fue hecho en su nombre.

También dedico este trabajo a mis padres Filiberto Zambrano Alcorta y María del Carmen Ayala Zendejas, por estar siempre al pendiente de mí, apoyándome económicamente y moralmente en todos los momentos, gracias por creer siempre en mí. A mis hermanas Marycarmen Anahí Zambrano Ayala y Stephanie Denisse Zambrano Ayala, por hacerme siempre reír en cualquier situación que me encontrara.

Por último, quisiera dedicarlo a mis amigos del posgrado, ya que siempre estuvieron orientándome en clases y asesorándome en cualquier duda que tuviera.

Agradecimientos

Agradezco a Dios y a mi madre María por permitir que esto fuera posible, ayudándome en todas las dificultades que he tenido en esta vida.

A mis padres, Filiberto y María del Carmen, por estar siempre cuando los necesito, apoyándome en lo moral y en lo económico, simplemente por regalarme la vida.

A mis hermanas, Anahí y Stephanie, por estar siempre animándome en mis caídas y ser esa compañía que siempre se necesita.

A mi novia Lydia, por sus consejos y regaños, por acompañarme en gran parte de esta carrera confiando y creyendo en mí.

Al Doctor Cornelio, por sus consejos, su guía, sus aclaraciones, por compartirme su valioso tiempo, simplemente por ser un gran asesor a lo largo de este trabajo.

A mi amigos que me acompañaron en este caminar, Daniel, Fernando, Sara, Omar, Leo y el Wero, por compartirme sus conocimientos y animarme a seguir luchando.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por beneficiarme con una beca de manutención para realizar mis estudios de posgrado.

A la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica y a la Universidad Autónoma de Nuevo León, por ser mi segunda casa.

A todos los forman parte de mi vida, ¡muchas gracias!.

RESUMEN

Publicación No. _____

Nombre del Alumno, M. C. en Ingeniería Eléctrica

Universidad Autónoma de Nuevo León, 2012

Profesor Asesor: Dr. Cornelio Posadas Castillo

Este trabajo de tesis versa en la sincronización caótica de redes complejas formadas por osciladores discretos, se pretende sincronizar redes complejas interconectadas en diferentes topologías de acoplamiento *i)* regular e *ii)* irregular considerando un escenario bidireccional y unidireccional (maestro y esclavo), recurriendo a técnicas conocidas en teoría de control no lineal que garantice sincronía completa en redes formadas por osciladores caóticos idénticos. Se usará esta sincronización caótica de redes complejas para el encriptado de una de imagen y una señal de audio en forma aditiva. El desempeño de la metodología propuesta es probado por medio de simulaciones numéricas.

Índice General

Agradecimientos	IV
Resumen	V
Índice General	VI
Índice de Tablas	IX
Índice de Figuras	X
1. Introducción	1
1.1. Motivación	8
1.2. Objetivos	10
1.3. Estructura de la tesis	10
2. Preliminares	12
2.1. Mapas	12
2.2. Caos	13
2.2.1. Características principales	14
2.3. Sincronía	20
2.3.1. Escenarios de acoplamiento	20
2.3.2. Sincronización completa	21
2.3.3. Sincronización aproximada	21
2.3.4. Tipos de sincronización	22

3. Redes complejas	24
3.1. Introducción	24
3.2. Topologías de redes	25
3.3. Redes complejas irregulares	25
3.3.1. Redes irregulares con nodo aislado	28
3.4. Redes complejas regulares	30
3.4.1. Red con acoplamiento global (A_{gc})	30
3.4.2. Red con acoplamiento anillo (A_{nc})	31
3.4.3. Red acoplamiento estrella (A_{sc})	32
3.4.4. Redes regulares con oscilador aislado	33
4. Sincronización de redes complejas utilizando acoplamiento a modelos	35
4.1. Introducción	35
4.2. Descripción del problema de estudio	35
4.2.1. Acoplamiento asintótico a modelos	36
4.2.2. Ejemplos	45
5. Sincronización de redes complejas utilizando matriz de acoplamiento	60
5.1. Introducción	60
5.1.1. Dinámica de redes complejas	60
5.1.2. Condiciones de sincronización	62
5.1.3. Estabilidad de redes complejas	63
5.1.4. Caso sin oscilador maestro	63
5.1.5. Caso con oscilador maestro	64
5.2. Ejemplos de sincronización de redes complejas formadas por osciladores discretos	65
5.2.1. Sincronización de una red global formada por osciladores discretos Fold	66
5.2.2. Sincronización de una red acoplada en anillo formada por osciladores de un sistema de segundo orden	71
5.2.3. Sincronización de una red acoplada en estrella formada por osciladores GINGERBREADMAN	77
5.2.4. Sincronización de una red irregular formada por osciladores TINKERBELL	82

6. Cifrado de información usando caos	88
6.1. Introducción	88
6.2. Encriptamiento caótico aditivo usando dos líneas de transmisión	91
6.2.1. Encriptamiento de una imagen en una red irregular formada por osciladores Fold con oscilador maestro	93
6.2.2. Encriptamiento de un mensaje de audio en una red irregular formada por os- ciladores Gingerbreadman	103
7. Conclusiones	112
7.0.3. Trabajo a futuro	113
Bibliografía	115

Índice de cuadros

2.1. Tabla 1 de osciladores caóticos discretos	16
2.2. Tabla 2 de osciladores caóticos discretos	17
2.3. Tabla 3 de osciladores caóticos discretos	18
2.4. Tabla 4 de osciladores caóticos discretos	19

Índice de figuras

1.1. Dibujo original de Huygens ilustrando su experimento con dos relojes de péndulo colocados en un soporte común [2].	2
1.2. a) Sincronía en el pedaleo en un grupo de ciclistas. b) Sincronía en un grupo de neuronas. c) Sincronía entre la tierra y la luna. d) Sincronía en un grupo de luciérnagas emitiendo luz al mismo instante de tiempo.	4
1.3. Estados $x_1(k)$, $x_2(k)$ respecto al tiempo y plano de fase $x_1(k)$ vs $x_2(k)$ del sistema Fold [7]. (a) Comportamiento periódico, (b) Comportamiento caótico.	5
1.4. Redes compuestas por n cantidad de osciladores y éstos pueden estar conectados de diferentes maneras.	7
2.1. Divergencia de las trayectorias en un sistema caótico comenzando bajo condiciones iniciales muy cercanas.	15
2.2. Evolución en el tiempo K del estado $x_1(k)$ del sistema caótico de Henon, iniciando bajo condiciones muy semejantes.	16
2.3. Escenarios de acoplamiento: (a) Configuración unidireccional, (b) Configuración bidireccional.	21
3.1. Red de acoplamiento irregular formada por 6 osciladores.	26
3.2. Red de acoplamiento irregular formada por 6 osciladores, tomando el oscilador 1 como maestro.	29
3.3. Red regular con acoplamiento global formada por 6 osciladores.	30
3.4. Red regular con acoplamiento anillo formada por 6 osciladores.	31
3.5. Red regular con acoplamiento anillo formada por 6 osciladores.	32
3.6. Red regular con acoplamiento anillo formada por 6 osciladores y el oscilador 1 como maestro.	33

4.1. Esquema de sincronización empleando acoplamiento a modelos. 44

4.2. Esquema de sincronización extendido a una red empleando acoplamiento a modelos. 45

4.3. Evoluciones en el tiempo de los estados hipercaóticos del sistema (4.2.24). 46

4.4. Atractor hipercaótico desplegado por el sistema (4.2.24). 47

4.5. Acoplamiento (sincronía) entre $x_{M1}(k)$ (línea continua) y $x_1(k)$ (línea segmentada) y sincronía entre la salida del modelo $y_M(k) = x_{M2}(k)$ (línea continua) y la salida de la planta $y(k) = x_2(k)$ (línea segmentada). 49

4.6. Planos de fase $x_1(k)$ vs $x_{M1}(k)$; $x_2(k)$ vs $x_{M2}(k)$ 50

4.7. Evolución temporal de los errores de sincronía: $e_i(k) = x_i(k) - x_{Mi}(k)$, $i = 1, 2$. . 50

4.8. Red estrella formada por 9 osciladores con oscilador maestro. 51

4.9. Atractor caótico desplegado del sistema (4.2.31). 52

4.10. Evoluciones en el tiempo de los estados del sistema caótico Lozi. 52

4.11. Sincronización entre $x_{M1}(k)$ (línea continua) y x_{i1} (líneas segmentadas); y sincronía en los estados x_{M2} (línea continua) y x_{i2} (línea segmentada), donde $i = 1, 2, \dots, 8$. . . 55

4.12. Planos de fase de $x_{M1}(k)$ vs $x_{11}(k)$; $x_{M1}(k)$ vs $x_{21}(k)$; $x_{M1}(k)$ vs $x_{31}(k)$; ... ; $x_{71}(k)$ vs $x_{81}(k)$ 56

4.13. (a) Planos de fase de $x_{M2}(k)$ vs $x_{12}(k)$; $x_{M2}(k)$ vs $x_{22}(k)$; $x_{M2}(k)$ vs $x_{32}(k)$; ... ; $x_{72}(k)$ vs $x_{82}(k)$. (b) Atractor Lozi formado por los estados sincronizados x_{i1} vs x_{i2} donde $i = 1, 2, \dots, 8$ 57

4.14. Evolución temporal de los errores $e_{i1}(k) = x_{M1}(k) - x_{i1}(k)$ y $e_{i2}(k) = x_{M2}(k) - x_{i2}(k)$, $i = 1, 2, \dots, 8$ 58

5.1. Red global compuesta por 12 osciladores. 66

5.2. Atractor caótico del sistema (5.2.1). 67

5.3. Planos de fase de $x_{11}(k)$ vs $x_{21}(k)$; $x_{11}(k)$ vs $x_{31}(k)$; $x_{11}(k)$ vs $x_{41}(k)$; ... ; $x_{11,1}(k)$ vs $x_{12,1}(k)$ 69

5.4. (a) Planos de fase de $x_{12}(k)$ vs $x_{22}(k)$; $x_{12}(k)$ vs $x_{32}(k)$; $x_{12}(k)$ vs $x_{42}(k)$; ... ; $x_{11,2}(k)$ vs $x_{12,2}(k)$. (b) Atractor Fold formado por los osciladores sincronizados $x_{i1}(k)$ vs $x_{i2}(k)$ donde $i = 1, 2, \dots, 12$ 70

5.5. Evolución temporal de los estados $x_{i1}(k)$ y $x_{i2}(k)$ sincronizados, donde $i = 1, 2, \dots, 12$. 71

5.6. Red anillo compuesta por 10 osciladores de segundo orden. 71

5.7. Atractor hipercaótico del sistema (5.2.6). 72

5.8. Planos de fase de $x_{11}(k)$ vs $x_{21}(k)$; $x_{11}(k)$ vs $x_{31}(k)$; $x_{11}(k)$ vs $x_{41}(k)$; ... ; $x_{91}(k)$ vs $x_{10,1}(k)$	74
5.9. (a) Planos de fase de $x_{12}(k)$ vs $x_{22}(k)$; $x_{12}(k)$ vs $x_{32}(k)$; $x_{12}(k)$ vs $x_{42}(k)$; ... ; $x_{92}(k)$ vs $x_{10,2}(k)$. (b) Atractor formado por los osciladores sincronizados $x_{i1}(k)$ vs $x_{i2}(k)$ donde $i = 1, 2, \dots, 10$	75
5.10. Evolución temporal de los estados $x_{i1}(k)$ y $x_{i2}(k)$ sincronizados, donde $i = 1, 2, \dots, 10$.	76
5.11. Red regular con acoplamiento estrella formada por 9 osciladores.	77
5.12. Atractor caótico del sistema Gingerbreadman.	78
5.13. Planos de fase de $x_{11}(k)$ vs $x_{21}(k)$; $x_{11}(k)$ vs $x_{31}(k)$; $x_{11}(k)$ vs $x_{41}(k)$; ... ; $x_{81}(k)$ vs $x_{91}(k)$	80
5.14. Planos de fase de $x_{12}(k)$ vs $x_{22}(k)$; $x_{12}(k)$ vs $x_{32}(k)$; $x_{12}(k)$ vs $x_{42}(k)$; ... ; $x_{82}(k)$ vs $x_{92}(k)$	81
5.15. Evolución temporal de los estados $x_{i1}(k)$ y $x_{i2}(k)$ sincronizados, donde $i = 1, 2, \dots, 9$.	82
5.16. Red irregular formada por 8 osciladores.	82
5.17. Atractor caótico del sistema (5.2.15).	83
5.18. Planos de fase de $x_{11}(k)$ vs $x_{21}(k)$; $x_{11}(k)$ vs $x_{31}(k)$; $x_{11}(k)$ vs $x_{41}(k)$; ... ; $x_{71}(k)$ vs $x_{81}(k)$	85
5.19. (a) Planos de fase de $x_{12}(k)$ vs $x_{22}(k)$; $x_{12}(k)$ vs $x_{32}(k)$; $x_{12}(k)$ vs $x_{42}(k)$; ... ; $x_{72}(k)$ vs $x_{82}(k)$. (b) Atractor formado por los osciladores sincronizados $x_{i1}(k)$ vs $x_{i2}(k)$ donde $i = 1, 2, \dots, 8$	86
5.20. Evolución temporal de los estados $x_{i1}(k)$ y $x_{i2}(k)$ sincronizados, donde $i = 1, 2, \dots, 8$.	87
6.1. Esquema de encriptado aditivo empleando dos canales de transmisión.	89
6.2. Esquema de encriptado por modulación.	90
6.3. Esquema de transmisión de información empleando conmutación caótica.	91
6.4. Esquema de encriptamiento aditivo empleando dos canales de transmisión basado en la sincronía de matriz de acoplamiento.	92
6.5. Red irregular compuesta por 11 nodos con nodo maestro.	93
6.6. Atractor caótico del sistema Fold (6.7).	94
6.7. Evolución temporal de los estados $x_{i1}(k)$, $x_{21}(k)$, $x_{31}(k)$, ..., $x_{11,1}(k)$ de los osciladores en sincronía.	95
6.8. Imagen original a encriptar.	96

6.9. Señal de la imagen en muestras.	97
6.10. Evolución temporal de la señal caótica $x_1(k)$ y la señal de imagen a encriptat $m_o(k)$	98
6.11. Señal de imagen encriptada $m_e(k)$ a través de la señal caótica del sistema (6.7).	98
6.12. (a) Imagen original a transmitir. (b) Imagen encriptada transmitida.	99
6.13. (a) Mensaje a transmitir (b) Señal encriptada (c) Mensaje recuperado en osc. 3 (d) Mensaje recuperado en osc. 4 (e) Mensaje recuperado en osc. 5.	100
6.14. (a) Mensaje recuperado en osc. 6 (b) Mensaje recuperado en osc. 7 (c) Mensaje recuperado en osc. 8 (d) Mensaje recuperado en osc. 9 (e) Mensaje recuperado en osc. 10 (f) Mensaje recuperado en osc. 11.	101
6.15. Errores de imagen recuperada: $e_3(k) = m_e(k) - \hat{x}_{o3}(k)$, $e_4(k) = m_e(k) - \hat{x}_{o4}(k)$, $e_5(k) = m_e(k) - \hat{x}_{o5}(k)$, $e_6(k) = m_e(k) - \hat{x}_{o6}(k)$	102
6.16. Errores de imagen recuperada: $e_7(k) = m_e(k) - \hat{x}_{o7}(k)$, $e_8(k) = m_e(k) - \hat{x}_{o8}(k)$, $e_9(k) = m_e(k) - \hat{x}_{o9}(k)$, $e_{10}(k) = m_e(k) - \hat{x}_{o10}(k)$, $e_{11}(k) = m_e(k) - \hat{x}_{o11}(k)$	102
6.17. Imagen recuperada.	103
6.18. Red irregular compuesta por 10 osciladores.	104
6.19. Atractor caótico del sistema (6.2.5).	105
6.20. Evolución temporal de los estados $x_{11}(k)$, $x_{21}(k)$, $x_{31}(k)$, ..., $x_{10,1}(k)$ de los osciladores caóticos en sincronía.	105
6.21. Señal de audio de una sinfonía.	106
6.22. Evolución temporal de la señal caótica $x_1(k)$ y señal de audio a transmitir $m_o(k)$	107
6.23. Mensaje de audio encriptado $m_e(k)$ a través de la señal caótica del sistema (6.2.5)	108
6.24. (a) Mensaje a transmitir (b) Señal encriptada (c) Mensaje recuperado en osc. 2 (d) Mensaje recuperado en osc. 3 (e) Mensaje recuperado en osc. 4 (f) Mensaje recuperado en osc. 5.	108
6.25. (a) Mensaje a transmitir (b) Mensaje recuperado en osc. 6 (c) Mensaje recuperado en osc. 7 (d) Mensaje recuperado en osc. 8 (e) Mensaje recuperado en osc. 9 (f) Mensaje recuperado en osc. 10.	109
6.26. Errores de imagen recuperada: $e_2(k) = m_e(k) - \hat{x}_{o2}(k)$, $e_3(k) = m_e(k) - \hat{x}_{o3}(k)$, $e_4(k) = m_e(k) - \hat{x}_{o4}(k)$, $e_5(k) = m_e(k) - \hat{x}_{o5}(k)$	110
6.27. Errores de imagen recuperada: $e_6(k) = m_e(k) - \hat{x}_{o6}(k)$, $e_7(k) = m_e(k) - \hat{x}_{o7}(k)$, $e_8(k) = m_e(k) - \hat{x}_{o8}(k)$, $e_9(k) = m_e(k) - \hat{x}_{o9}(k)$, $e_{10}(k) = m_e(k) - \hat{x}_{o10}(k)$	110

Capítulo 1

Introducción

El presente trabajo de maestría versa sobre la **sincronización caótica de redes complejas formadas por osciladores discretos**, por tanto, se considera propicio iniciar por describir brevemente los conceptos de *sincronía*, *caos* y *redes complejas*.

La palabra sincronía proviene de la etimología griega $\sigma\upsilon\nu$ *syn*, “con, juntamente, a la vez”, y de la mitología griega, Chronos o Khronos (en griego $\chi\rho\nu\varsigma$), “tiempo”. En latín Chronus. Se entiende como un término que se refiere a coincidencia en el tiempo o simultaneidad de hechos o fenómenos. Según el diccionario de la real academia española, sincronizar significa: Hacer que coincidan en el tiempo dos o más movimientos o fenómenos.

También se define en [1] que se llama sincronía a la propiedad que adquiere un conjunto de “objetos” (de una misma o diferente especie) de manifestar un ritmo o comportamiento común (generalmente distinto a los ritmos individuales de los objetos considerados), partiendo de ritmos o comportamientos individuales distintos, debido a la presencia de un medio acoplante (un medio físico de conexión) entre ellos, el cual, en la mayoría de los casos, es extremadamente débil.

Históricamente, en el año 1665, Christiaan Huygens fue el primer científico en observar y explicar la sincronía ocurrida entre dos péndulos de relojes colgados en una viga como se observa en la figura

1.1.

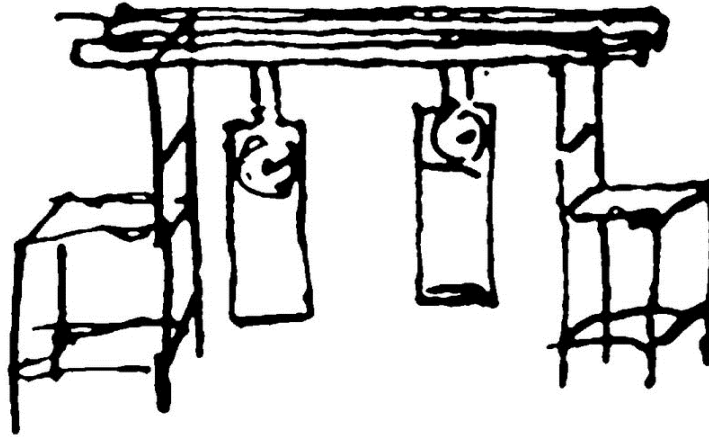


Figura 1.1: Dibujo original de Huygens ilustrando su experimento con dos relojes de péndulo colocados en un soporte común [2].

Vale la pena señalar lo que Huygens observó en este fenómeno, que cuando se suspendieron los dos relojes contruidos a partir de que dos ganchos incrustados en la misma viga de madera, los movimientos de cada péndulo en oscilaciones opuestas estaban tan de acuerdo en que nunca se retrocedió en lo más mínimo el uno del otro y el sonido de cada reloj se escuchó siempre simultáneamente. Además, si este sistema era perturbado por alguna interferencia, éste se restablecía en un tiempo muy corto. Durante mucho tiempo le sorprendió este resultado inesperado, pero después de un cuidadoso examen, finalmente determinó que la causa de este sistema es debido al movimiento de la viga, a pesar de que esto es apenas perceptible.

La propiedad de sincronía puede observarse en actividades tan sencillas y cotidianas, como la de un niño brincando una cuerda, donde cada salto del niño coincide con el paso de la cuerda sobre el piso, en el vuelo de las aves, un grupo de personas bailando acorde con el ritmo de la música, en el nado sincronizado, en general, en el comportamiento colectivo de los humanos, ya sea voluntaria

o involuntariamente [3]. También, puede observarse esta propiedad en hechos más complejos como el pedaleo en una carrera de ciclistas, en el movimiento que describe la luna respecto a la tierra, ya que tienen la misma velocidad angular promedio en rotación y translación [4]. Incluso, la sincronía aparece en los lugares más inverosímiles: desde las órbitas de los satélites a los electrones, del zumbido de los grillos, a la tendencia en mujeres que viven cerca o que pasan mucho tiempo juntas a menstruar aproximadamente al mismo tiempo [5], o que personas, da igual el número, que caminan juntas en una marcha, lo acaben haciendo marcando el paso de forma espontánea y natural [6]. En estos y otros numerosos casos, la sincronía representa un papel fundamental, ya que establece alguna relación especial entre sistemas o mecanismos acoplados. Podemos mencionar algunos ejemplos de particular interés en el área de ingeniería [6]:

- Sincronización de generadores cuánticos de radio frecuencia (“massers”).
- Sincronización de osciladores caóticos con aplicación en comunicaciones privadas y seguras de información confidencial.
- Sincronización de robots para realizar una tarea común.
- Sincronización de oscilaciones eléctricas y electromagnéticas en electrónica y radio.
- Sincronización de láseres que permite generar pulsos de luz muy potentes.

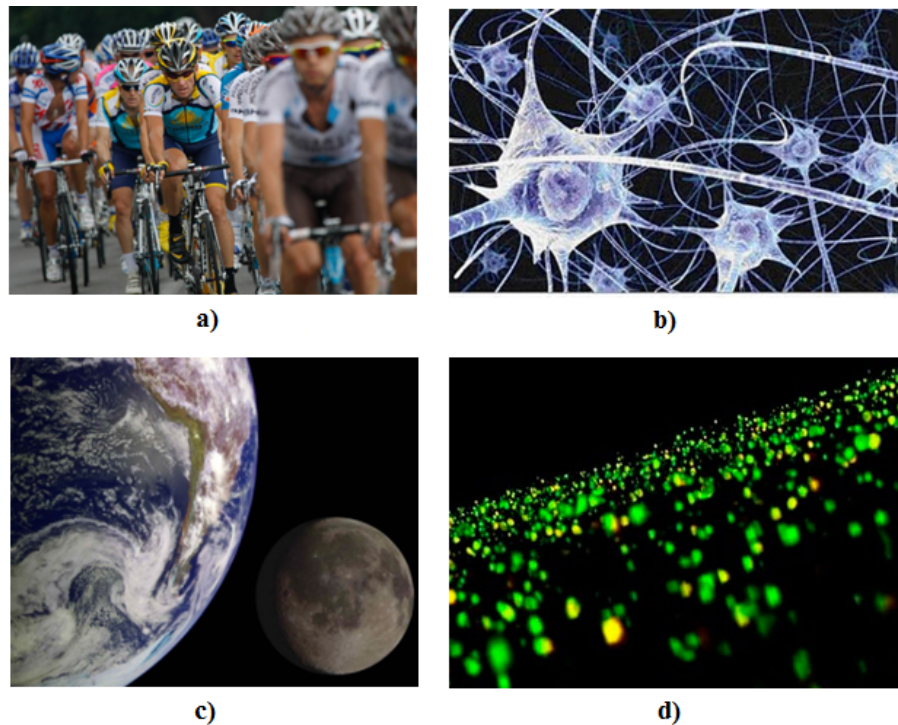


Figura 1.2: a) Sincronía en el pedaleo en un grupo de ciclistas. b) Sincronía en un grupo de neuronas. c) Sincronía entre la tierra y la luna. d) Sincronía en un grupo de luciérnagas emitiendo luz al mismo instante de tiempo.

El otro término importante a mencionar en este trabajo es **caos**, los osciladores exhiben dinámicas caótica o hipercaóticas. Muy recientemente, las ciencias, especialmente la Física, nos habían dado una imagen muy ordenada de la realidad; una realidad físicamente más predecible, prácticamente determinista. Sin embargo, ahora sabemos que los sistemas que privan en la naturaleza son los llamados **“sistemas caóticos”**. Aunque la palabra misma hace pensar en desorden, desde el punto de vista científico, caos se refiere a un comportamiento dinámico complejo, que puede modelarse por ecuaciones no lineales diferenciales o en diferencia. Las características que posee son muy particulares, como ser sensible a condiciones iniciales, generar atractores “extraños”, tener al menos un exponente de

Lyapunov positivo, entre otras.

Para comprender un poco más estos términos, a manera de ilustración, en la figura 1.3 se muestran simulaciones de un sistema discreto que presenta este comportamiento (sistema Fold). El sistema bajo ciertas condiciones paramétricas presenta un comportamiento *periódico*, como se puede observar en la figura 1.3 (a), sin embargo, al modificar sus parámetros el sistema puede exhibir un comportamiento *caótico* [7]. En la figura 1.3 (b) podemos observar el comportamiento complejo del sistema y además que es aperiódico.

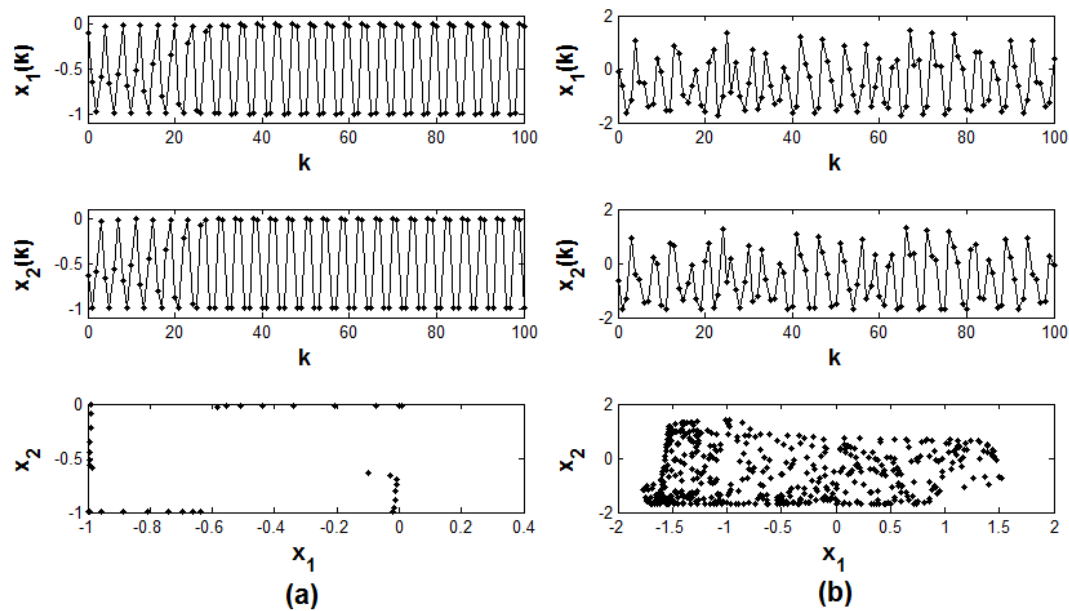


Figura 1.3: Estados $x_1(k)$, $x_2(k)$ respecto al tiempo y plano de fase $x_1(k)$ vs $x_2(k)$ del sistema Fold [7]. (a) Comportamiento periódico, (b) Comportamiento caótico.

En 1880's Poincaré encontró conveniente reemplazar el flujo continuo de tiempo con un análogo discreto, en el que aumenta el tiempo regular relativamente a la secuencia de saltos. Estos sistemas son llamados hoy en día **sistemas dinámicos discretos**. Actualmente existen dos tipos de sistemas dinámicos, continuos y discretos, por lo tanto, también hay dos teorías de caos.

Lo primero que desarrolló Poincaré hace más de un siglo, fue el comportamiento caótico de sistemas dinámicos continuos. También, estudió el comportamiento caótico para sistemas dinámicos discretos generado por un mapa invertible. La teoría de caos discretos de mapas no invertibles inició algunos años después de Poincaré. Su desarrollo ha sido acelerado particularmente desde la revolución de la computadora, y hoy en día es un gran campo por estudiar.

Habiendo mencionado lo anterior, para que exista la sincronía entre los sistemas caóticos, es necesario que haya una conexión o acoplamiento entre ellos, es por ello que también se debe de estudiar la teoría de redes.

Una red es un conjunto de osciladores (sistemas caóticos), también conocidos como nodos en otros trabajos, interconectados (dos o más) que interactúan de alguna forma. Entender la naturaleza de los osciladores que forman una red, es importante, porque compete a varias propiedades que darán complejidad. Su naturaleza puede ser discreta o continua (modelada por un conjunto de ecuaciones en diferencias o ecuaciones diferenciales, respectivamente); puede representarse por un sistema no lineal, el cual puede exhibir equilibrios múltiples, ciclos límites y caos. Y es la bifurcación de estos equilibrios los que pueden cambiar el comportamiento de los osciladores así como sus propiedades de estabilidad; llevando a estos sistemas a comportamientos caóticos o hipercaóticos.

En la teoría de redes, no sólo se trata de conocer el comportamiento individual de cada oscilador, puesto que, al estar interconectados existen propiedades emergentes. Por este comportamiento colectivo, la importancia de reconocer las dinámicas de las redes se vuelve todo un reto. Más aún, refiriéndonos a la sincronización, a lo aleatorio que aparenta ser un sistema caótico como oscilador y a la topología de conexión de estos; es por eso que comenzaremos por definir el término de redes complejas.

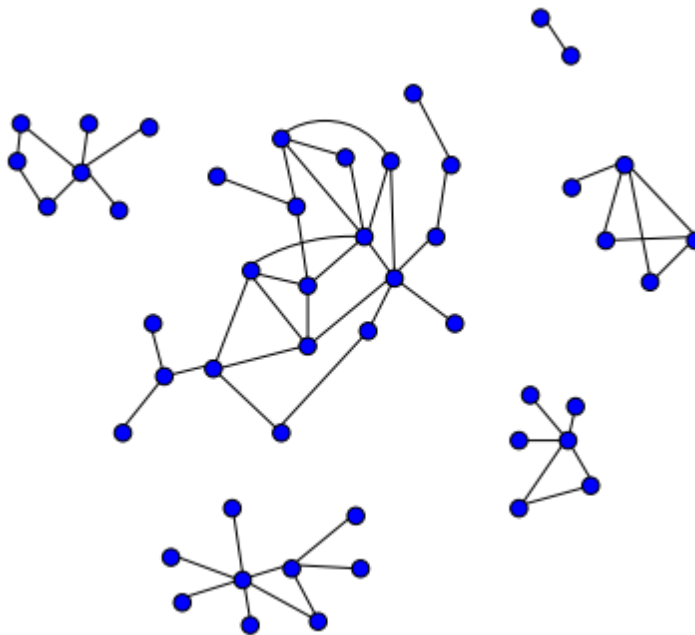


Figura 1.4: Redes compuestas por n cantidad de osciladores y éstos pueden estar conectados de diferentes maneras.

Como ocurre con la mayoría de los conceptos científicos, no podemos definir redes complejas en un simple enunciado. Para esto, describiremos las características más importantes que son comunes en todas las redes complejas:

1. Están compuestas de muchas partes que interactúan entre sí. De hecho, el término “complejo”, se debe de comprender en dos instancias, porque se refiere a las características de los osciladores por sí mismos, y a la estructura de la red [8].
2. Cada parte tiene su propia estructura interna y está encargada de llevar a cabo una función específica.
3. Lo que ocurra a una parte del sistema afecta de manera **altamente no lineal** a todo el sistema.

4. Presentan comportamientos emergentes, de tal manera que *el todo no es la simple suma de sus partes*.

El interés en el estudio de las redes complejas radica en que estas redes abundan en la naturaleza, son parte de nuestra vida diaria y se presentan a diferentes niveles de organización. Por ejemplo, algunas redes biológicas que encontramos en el nivel microscópico son las redes genéticas, redes de proteínas, redes neuronales, redes metabólicas, por mencionar algunas [10]. Por otro lado, a un nivel de organización mucho mayor, encontramos redes de comunicación e informáticas (la red internet, la red www, redes telefónicas, etc.) [11], [12] y [13], redes sociales (amistades, contactos sexuales, colaboradores científicos, propagación de enfermedades, etc.) [14], redes ecológicas (interacciones tróficas en un ecosistema) [15]. Las redes complejas son ubicuas, es decir, están por todos lados.

También nos referiremos a lo complejo de una red por medio de su topología de acoplamiento, es decir, al patrón regular o irregular, en que están conectados o acoplados los osciladores. Ésto será explicado a detalle en el Capítulo 3.

1.1. Motivación

Sincronizar sistemas con dinámicas complejas como los **sistemas caóticos discretos**, es decir, que coincida la dinámica en tiempo y forma de dos o más sistemas interconectados en una red, ha generado diversas líneas de investigación, principalmente por el gran potencial de aplicaciones que tiene en el área de comunicaciones seguras.

La mayoría de los trabajos reportados en la literatura relacionados con este tópico, sobresale el caso de osciladores caóticos en tiempo continuo [8], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22], entre otros.

En cambio, los trabajos realizados con osciladores caóticos en **tiempo discreto** son escasos, y esos pocos trabajos reportan sincronización en sólo dos sistemas interconectados y no en redes. Sin embargo, el interés en el caso discreto es de mucha importancia, puesto que este tipo de sistemas ofrece una implementación mucho más sencilla y rápida que la del caso continuo, al usar por ejemplo computadoras digitales, también como se mencionó, no ha habido trabajos en la literatura en donde sincronicen redes formadas por osciladores discretos, resulta una motivación más para estudiar el caso discreto.

Sabemos que la mayoría de los sistemas reales son de tiempo continuo, frecuentemente es deseable obtener modelos discretos, los cuales, representan fielmente las mismas dinámicas de tales sistemas, algunas razones son por:

- En campo, las mediciones comunmente se realizan a determinados intervalos de tiempo.
- El procesamiento digital de señales y en control, son muy favorecidos.
- Simulaciones digitales pueden efectuarse rápido y fácilmente.
- El uso de controladores digitales en sistemas caóticos incrementa el desempeño de los procesos.

Algunos trabajos de sincronización de osciladores en tiempo discreto reportados en la literatura son [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29] donde sincronizan dos sistemas caóticos discretos con diferentes metodologías.

Se describe a continuación los objetivos de la tesis.

1.2. Objetivos

Dado que actualmente sólo existen soluciones en sincronizaciones de redes complejas formadas por osciladores continuos y no en casos discretos, incluso han reportado en la literatura algunos trabajos sobre sincronización de dos sistemas caóticos discretos en forma unidireccional o bidireccional, con la realización de este trabajo se plantea alcanzar el objetivo general:

Contribuir a la sincronización de redes complejas compuestas por osciladores caóticos discretos (sistemas con dinámicas extremadamente complejas, pudiendo ser caóticas, hipercaóticas). Sincronización lograda empleando las características y propiedades de los sistemas cooperativos.

Los objetivos particulares que serán abordados son los siguientes:

1. *Sincronizar diferentes tipos de redes complejas con dinámicas discretas en régimen caótico e hipercaótico.*
2. *Sincronizar redes complejas dispuestas en una topología de acoplamiento regular (acoplamiento global, estrella y anillo) e irregular (redes con un patrón de acoplamiento no definido), formadas por osciladores caóticos discretos.*
3. *Aplicar la sincronización de este tipo de redes al cifrado de información. Cifrado caótico aditivo, por conmutación entre atractores caóticos o por técnicas de modulación paramétrica.*

1.3. Estructura de la tesis

El contenido de la tesis está organizada de la siguiente manera: En el **Capítulo 2** se presentarán conceptos básicos de mapas, caos, sincronía, tipos de sincronía en los osciladores caóticos; algunos

antecedentes históricos de sincronía, ejemplos observados en el mundo cotidiano.

En el **Capítulo 3** se presentará el concepto básico de redes complejas, las diferentes topologías con las que trabajaremos con o sin oscilador maestro, las características de las redes que formaremos así como sus condiciones de uso y estabilidad según el caso.

En el **Capítulo 4**, se extenderá la metodología de acoplamiento a modelos para sincronizar sistemas acoplados en una red, mencionando las condiciones de sincronización y describiendo el problema de estudio en redes complejas. Se realizarán 2 ejemplos, uno será la sincronización de dos sistemas idénticos y el otro la sincronización de una red compleja.

En el **Capítulo 5** se presentará la metodología de matriz de acoplamiento, extendiéndola [16] de la sincronización de redes caóticas continuas a caso discreto, mencionaremos las condiciones de sincronización, estabilidad e introduciremos el concepto de la ley de control usado para la sincronización de redes complejas. Por último, realizaremos 4 ejemplos de sincronización de redes complejas con esta metodología.

En el **Capítulo 6** se dará una breve introducción de encriptado de información, los tipos de encriptado utilizados para sistemas caóticos y se realizará 2 encriptamientos, una imagen y una señal de audio. Cada uno de estos serán encriptados en forma aditiva, utilizando diferentes osciladores caóticos discretos en diferentes topologías.

Por último, en el **Capítulo 7** mencionaremos las conclusiones generales de la tesis referentes a los resultados expuestos en este trabajo. También mencionaremos recomendaciones relativas a los problemas abiertos para un trabajo a futuro.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo, se presenta un conjunto de definiciones básicas de algunos términos que se utilizarán dentro de este trabajo, todo esto con el fin de tener una mayor comprensión sobre la sincronización de sistemas caóticos discretos.

2.1. Mapas

Los sistemas con los que se involucra este trabajo de tesis son **sistemas discretos**, los cuales son sistemas cuyo comportamiento puede ser:

- i) Directa* que son aquellos modelos matemáticos proveniente de sistemas dinámicos que por naturaleza son discretos.
- ii) Indirecta* que son aquellos sistemas dinámicos provenientes de la discretización de un sistema continuo.

Para sistemas no lineales de tiempo discreto, la ecuación de estado se puede escribir como:

$$x(k+1) = f(x(k)), \quad x(0) = x_0, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (2.1.1)$$

donde el vector de estado x es de dimensión n , siendo k el índice de interacción, que representa el

tiempo y f es una función no lineal tal que, para todos los elementos $x(k) \in \mathbb{R}^n$ asigna un elemento único $f(x(k))$, esto es, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ para toda $k \geq 0$.

Los sistemas discretos siempre tendrán solución derecha, o sea (para $k \geq 0$) o al menos que f sea invertible, no tendrá solución izquierda ($k \leq 0$). A continuación se mencionan algunas características de los sistemas discretos:

- En el sistema (2.1.1), si f no depende explícitamente del tiempo discreto k entonces el mapeo se denomina **autónomo**. De lo contrario, en los sistemas **no autónomos** la función f depende explícitamente de k , es decir $x(k+1) = f(x(k), k)$. El término mapa se reserva generalmente a sistemas autónomos.
- Un **punto de equilibrio** $x_e \in \mathbb{R}^n$ del sistema (2.1.1) es una solución del mismo que satisface $x_e = f(x_e)$ para todo $k \geq 0$.
- Cuando f es un sistema continuo para toda k y continuamente diferenciable en x y si f^{-1} existe y es única en el dominio de f entonces el mapa f es un **mapa invertible** llamado difeomorfismo. Cuando f es continuamente diferenciable solamente se le llama mapa invertible. Cuando f es tal que f^{-1} pudiera ser multivaluada o pudiera no existir, entonces se dice que el mapa es **no invertible**.
- Sea f un mapa C^1 . Un punto de equilibrio $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ de f es **asintóticamente estable** si $|f'(\bar{x})| < 1$, e inestable si $|f'(\bar{x})| > 1$.

2.2. Caos

El concepto de Caos se mencionará en este trabajo, puesto que los sistemas discretos a utilizar son sistemas caóticos y para esto es necesario conocer las principales características de un sistema

caótico. Empezaremos mencionando las tres grandes reglas que rigen los sistemas caóticos:

1. Aunque un sistema caótico comience en perfecto orden, terminará disolviéndose en completa desorganización.
2. Los sistemas caóticos tienen una extrema sensibilidad a las condiciones iniciales. Esto significa que una variación *ínfima* en la condición inicial desemboca en una gran variación final.
3. La evolución de un sistema caótico se puede predecir con alta probabilidad de ocurrencia en el corto plazo, más allá, su comportamiento es errático.

En la actualidad no existe una definición rigurosa y universalmente aceptada de caos, aunque algunos científicos de manera general, definen un sistema caótico como un sistema determinístico, regido por ecuaciones en diferencias no lineales, que presentan comportamientos dinámicos aparentemente aleatorios y sensibles a condiciones iniciales.

2.2.1. Características principales

Algunas **características principales** que identifican a los **sistemas caóticos** son [29]:

- **Dinámica no lineal.** El caos es un fenómeno exclusivo de los sistemas dinámicos no lineales. Un sistema lineal, no importa el orden que tenga, no puede presentar este comportamiento.
- **Sensibilidad a condiciones iniciales.** A partir de condiciones iniciales diferentes, aunque estas sean muy cercanas unas de las otras, las trayectorias correspondientes que se producen tienden a ser distintas o a diverger exponencialmente conforme el tiempo transcurre, sin existir correlación alguna entre dichas trayectorias. Esto se presenta en la figuras (2.1) y (2.2) donde

podemos observar la diferencia entre trayectorias que va creciendo de manera no predecible a largo plazo la evolución del sistema, aún cuando las condiciones iniciales son ínfimamente diferentes.

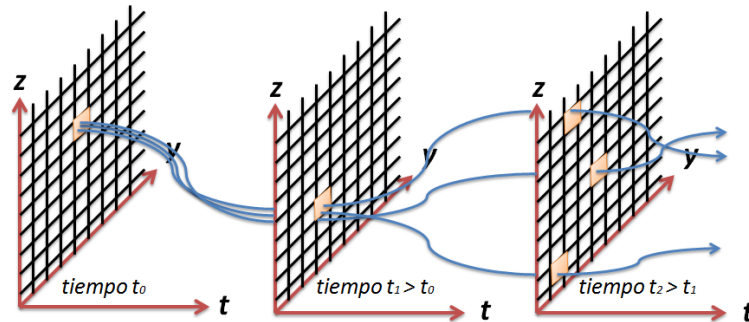


Figura 2.1: Divergencia de las trayectorias en un sistema caótico comenzando bajo condiciones iniciales muy cercanas.

- **Presencia de atractores extraños.** Un atractor es una región del espacio de estados la cual convergen todas las trayectorias de un sistema, ésta característica propia de los sistemas caóticos es la forma de estructuras geométricas poco usuales en su diagrama de fase y con dimensión fractal, éstas figuras son llamadas “atractores extraños”, nombre dado a las estructuras asintóticas hacia donde evolucionan las órbitas de un sistemas caótico.

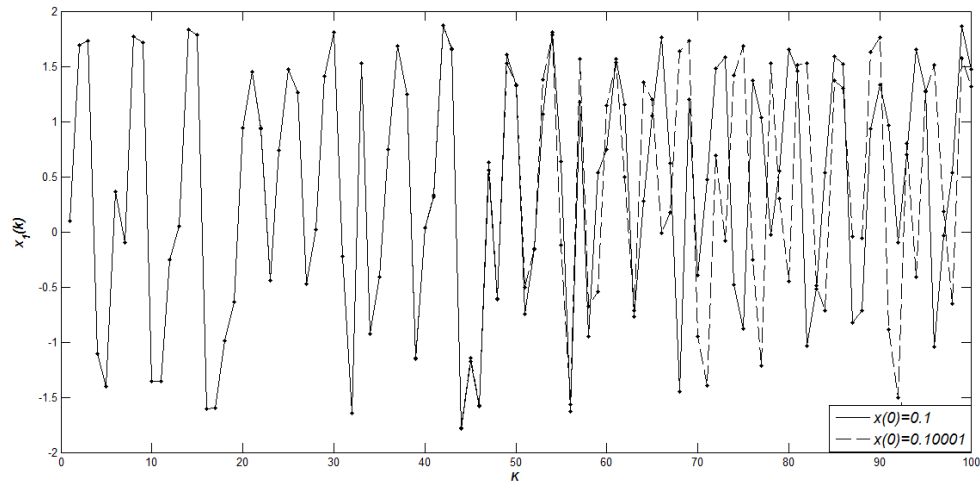
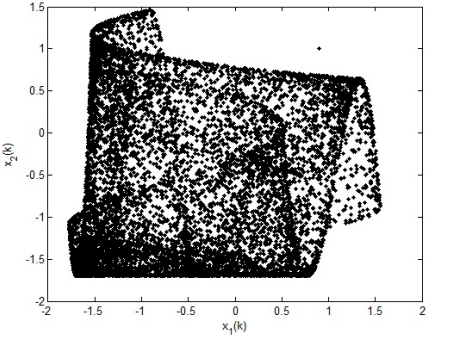


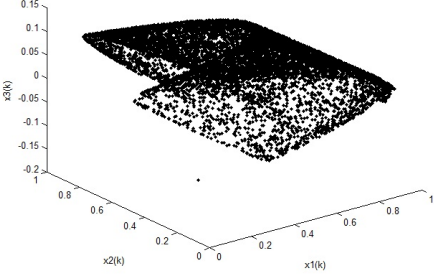
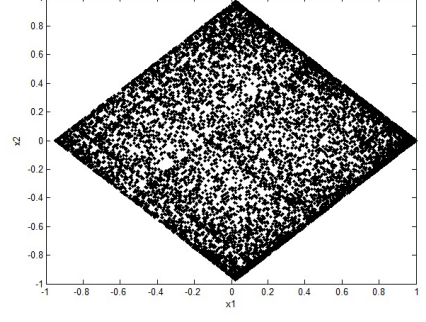
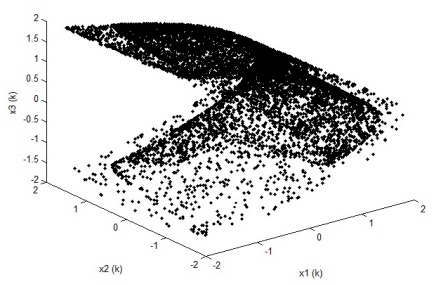
Figura 2.2: Evolución en el tiempo K del estado $x_1(k)$ del sistema caótico de Henon, iniciando bajo condiciones muy semejantes.

En las tablas 2.1, 2.2 y 2.3 se presentan algunos atractores extraños con sus ecuaciones en diferencia no lineales con los que se trabajarán en esta tesis.

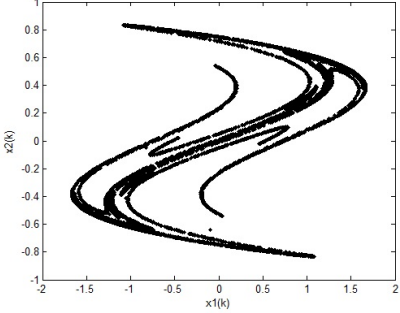
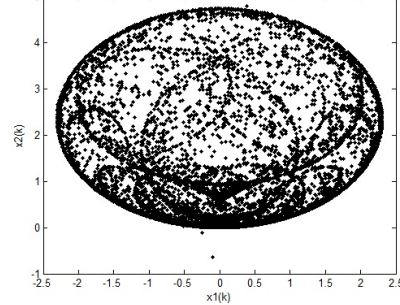
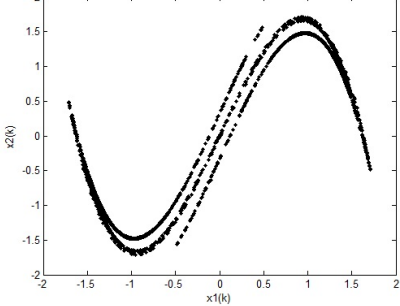
Cuadro 2.1: Tabla 1 de osciladores caóticos discretos

Oscilador caótico Fold [7]	Atractor
$x_1(k+1) = x_2(k) + ax_1(k),$ $x_2(k+1) = x_1^2(k) + b.$ $a = -0.1 \quad b = -1.7$	

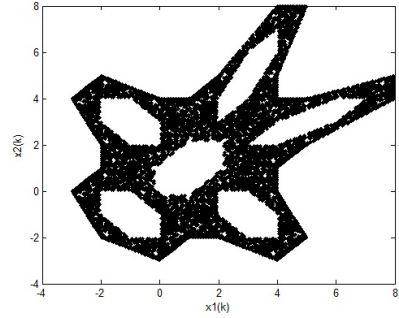
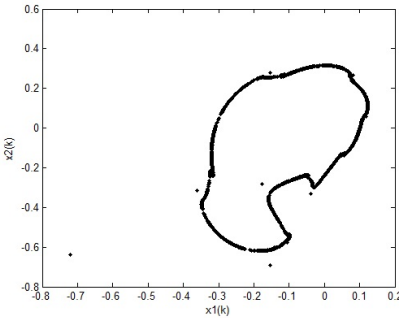
Cuadro 2.2: Tabla 2 de osciladores caóticos discretos

Oscilador hipercaótico Rössler [7]	Atractor
$x_1(k+1) = \alpha x_1(k)(1 - x_1(k)) - \beta(x_3(k) + \gamma)(1 - 2x_2(k)),$ $x_2(k+1) = \delta x_2(k)(1 - x_2(k)) + \zeta x_3(k),$ $x_3(k+1) = \eta((x_3(k) + \gamma)(1 - (2x_2(k))) - 1)(1 - \theta x_1(k)).$ $\alpha = 3.8 \quad \beta = 0.05 \quad \gamma = 0.35 \quad \delta = 3.78 \quad \zeta = 0.2 \quad \eta = 0.1 \quad \theta = 1.9$	
Oscilador hipercaótico de segundo orden [27]	Atractor
$x_1(k+1) = 1 - a(x_1^2(k) + x_2^2(k)),$ $x_2(k+1) = -2ax_1(k)x_2(k).$ $a = 1.95$	
Oscilador hipercaótico de Hénon [30], [31]	Atractor
$x_1(k+1) = 1.76 - x_2^2(k) - 0.1x_3(k),$ $x_2(k+1) = x_1(k),$ $x_3(k+1) = x_2(k).$	

Cuadro 2.3: Tabla 3 de osciladores caóticos discretos

Oscilador hipercaótico de segundo orden [33]	Atractor
$x_1(k+1) = 1.9x_1(k) - x_1^3(k) + x_2(k),$ $x_2(k+1) = 0.5x_1(k).$	
Oscilador caótico Lorenz [7]	Atractor
$x_1(k+1) = (1+ab)x_1(k) - bx_1(k)x_2(k),$ $x_2(k+1) = (1-b)x_2(k) + bx_1^2(k).$ $a = 1.2 \quad b = 0.8$	
Oscilador caótico Duffing [34]	Atractor
$x_1(k+1) = x_2(k),$ $x_2(k+1) = -bx_1(k) + ax_2(k) - x_2^3(k).$ $a = 2.75 \quad b = 0.2$	

Cuadro 2.4: Tabla 4 de osciladores caóticos discretos

Oscilador caótico Gingerbreadman [35]	Atractor
$x_1(k+1) = 1 - x_2(k) + x_1(k) ,$ $x_2(k+1) = x_1(k).$	
Oscilador caótico Tinkerbell [36]	Atractor
$x_1(k+1) = x_1^2(k) - x_2^2 + ax_1(k) + bx_2(k),$ $x_2(k+1) = 2x_1(k)x_2(k) + cx_1(k) + dx_2(k).$ $a = 0.9 \quad b = -0.6013 \quad c = 2 \quad d = 0.5$	

- **Exponentes de Lyapunov.** Un exponente de Lyapunov da información sobre el cambio promedio de las trayectorias de los estados de un sistema. Se utilizan para cuantificar dicha expansión o contracción de trayectorias vecinas en un sistema dinámico, en otras palabras, determina la complejidad de un sistema no lineal.

Cuando los exponentes de Lyapunov son negativos, existe una convergencia entre las trayectorias a lo largo de una dirección en un espacio de estados. De otra manera, si los exponentes de Lyapunov son positivos, las trayectorias divergen. Cuando el valor del exponente de Lyapunov sea cero, tendrá una dirección neutra, sin converger y diverger. El valor absoluto de estos exponentes, cuantifica la velocidad de convergencia de las trayectorias.

Como condición necesaria para que un sistema sea caótico, tiene que presentar al menos un

exponente de Lyapunov positivo. Cuando existe más de un exponente de Lyapunov positivo y exista una solución acotada del mismo, entonces el sistema se denomina hipercaótico.

2.3. Sincronía

La sincronización se puede definir como la propiedad que posee un conjunto de objetos diferentes, de adoptar un mismo ritmo de coexistencia pese a sus diferentes ritmos individuales por medio de una conexión extremadamente débil.

Recordemos que el matemático Christiaan Huygens observó este fenómeno en dos péndulos, por lo que generalmente la sincronía está ligada al movimiento periódico, pero en este trabajo de tesis nuestro interés particular es la sincronización de osciladores caóticos e hipercaóticos (señales aperiódicas).

Para que dos o más osciladores caóticos estén sincronizados, sus trayectorias dinámicas deben ser exactamente iguales después de un lapso de tiempo, ya sea largo o corto, a pesar de comenzar en condiciones iniciales diferentes.

Es necesario mencionar los escenarios de acoplamiento, para entender mejor el concepto de sincronización en este trabajo.

2.3.1. Escenarios de acoplamiento

Existen dos tipos de configuraciones de acoplamiento entre los osciladores en una red, el cual permite su interacción para que estos se sincronicen. Estos acoplamientos puede ser **unidireccional** [38] que también puede ser llamado configuración **maestro-esclavo** [40] o **bidireccional** [39], como se muestra en la figura 2.3 (a) y 2.3 (b) respectivamente.



Figura 2.3: Escenarios de acoplamiento: (a) Configuración unidireccional, (b) Configuración bidireccional.

2.3.2. Sincronización completa

Considerando los escenarios de acoplamiento de los sistemas ilustrados de la figura 2.3, se dice que un oscilador dado por $x_1(k+1) = f(k)$ y otro por $x_2(k+1) = g(k)$ ambos de dimensión n , dentro de la misma red (independientemente de la conexión), sincronizan completamente sí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_1(k) - x_2(k)\| \equiv 0, \quad (2.3.1)$$

para toda señal acoplante generada por los osciladores que componen la red, e independientemente de las condiciones iniciales, $x_1(1)$ y $x_2(1)$. El vector de error de sincronía se define por la expresión

$$e(k) = x_1(k) - x_2(k), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \quad (2.3.2)$$

si existe sincronización completa el vector error debe ser cero:

$$e(k) = 0. \quad (2.3.3)$$

2.3.3. Sincronización aproximada

En un escenario real, la señal de acoplamiento puede contener perturbaciones o ruido, para este caso, el error de sincronía podría no tender a cero. Por lo que, el error de sincronía, permanecerá

acotado por un valor positivo $\rho \in \mathbb{R}$. Quedando como

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_1(k) - x_2(k)\| \leq \rho, \quad (2.3.4)$$

independientemente de las condiciones iniciales $x_1(1)$ y $x_2(1)$. Si para algún $\rho > 0$ dado, existe un instante de tiempo $\tau > 0$, llamado tiempo de sincronía aproximada tal que la condición (2.3.4) se cumple, entonces el oscilador $x_1(k)$ y el oscilador $x_2(k)$ están aproximadamente sincronizados.

2.3.4. Tipos de sincronización

En la actualidad se han reportado varios tipos de sincronización. En este trabajo de tesis nos centraremos en sincronizar redes formadas por **osciladores caóticos discretos idénticos**, esto se refiere a que los osciladores implicados o acoplados son del mismo tipo o estructura equivalente. Los tipos de sincronización que se pueden presentar en este caso son:

1. **Sincronización idéntica o completa.** Ocurre cuando cada estado de un oscilador, se sincroniza con su estado correspondiente de otro oscilador. Se puede presentar en acoplamiento unidireccional o bidireccional.
2. **Sincronización no idéntica en osciladores idénticos.** Se presenta únicamente en configuración maestro-esclavo, en donde los estados del esclavo no sincronizan con los del maestro, si no a un tercer estado [38].

También existe la sincronización de **osciladores no idénticos**, que es el acoplamiento entre osciladores diferentes o estructuralmente no equivalentes [41]. En este caso existen algunos trabajos reportados en la literatura en donde solo sincronizan dos sistemas caóticos discretos no idénticos y no acoplados en una red.

En este trabajo de tesis, se pretende abordar la sincronización de dos o más sistemas caóticos idénticos acoplados en una red, considerando casos ideales, es decir, sin perturbaciones y en caso discreto, es decir, sistemas discretizados. En el capítulo 3, se mencionará el concepto de red y sus diferentes topologías, para después pasar a sincronizar estas redes por medio de acoplamiento de modelos y matriz de acoplamiento, dando resultados y conclusiones de cada una de las técnicas.

Capítulo 3

Redes complejas

3.1. Introducción

En el capítulo anterior analizamos los conceptos más importantes de este trabajo, como fue los sistemas discretos, sincronización y caos. Observamos que para que haya sincronización entre los osciladores que componen una red, éstos deben de estar acoplados entre sí, de no ser así, no existiría sincronización. También pudimos observar que dependiendo del acoplamiento, unidireccional o bidireccional, obtendremos dinámicas resultantes diferentes, ya sea de un tercer estado o la dinámica de un oscilador siendo el caso maestro-esclavo. Para poder sincronizar más de dos osciladores, la sincronización y la dinámica resultante, debe ser estudiada en base a redes.

En este capítulo estudiaremos la teoría de grafos para la construcción de redes y su entendimiento; se creará la **matriz de acoplamiento** [16], que es la matriz que describe la forma en que los osciladores están conectados dentro de la red, y su tipo de conexión que es conocida como las **topologías de redes**. Estudiaremos las diferentes tipos de topologías con las que trabajamos en esta tesis, además de sus acoplamientos con nodo maestro o sin él, y así dando a conocer los teoremas que condicionan tanto su sincronización como su estabilidad.

Más adelante, presentaremos un ejemplo de sincronización de redes con la metodología de acoplamiento a modelos. Y otros ejemplos elaborados con la técnica de matriz de acoplamiento serán mostrados en el capítulo 5.

3.2. Topologías de redes

Se dice que topología es la configuración de acoplamiento de los osciladores en una red, en otras palabras, es la forma de conexión de los osciladores en una red. Estas configuraciones de acoplamiento se agrupan de dos maneras principales dentro de las redes dinámicas complejas: redes complejas regulares y redes complejas irregulares [8].

Como se mencionó anteriormente, las redes pueden tener un oscilador maestro o conocido también como oscilador aislado, por lo que, este oscilador al no poder ser influenciado por los osciladores restantes de la red, impondría su dinámica caótica a toda la red, teniendo conexiones unidireccionales. Esto quiere decir, que el oscilador aislado tiene conexiones unidireccionales y el resto de la red presenta conexiones bidireccionales entre sí. Esto se aprecia mejor en el capítulo siguiente con la metodología de acoplamiento a modelos, donde se observa una red regular con acoplamiento estrella y oscilador maestro (oscilador 1), figura 4.8.

3.3. Redes complejas irregulares

Empezaremos con la topología de redes irregulares, las cuales tienen una complejidad mayor, ya que su estructura no tiene un patrón definido o regla específica en la forma en que los osciladores

están conectados [9]. Un ejemplo muy conocido son las redes de libre escala que son redes complejas formada por nodos conectados desordenadamente. Un ejemplo de este tipo de redes se aprecia en la figura siguiente:

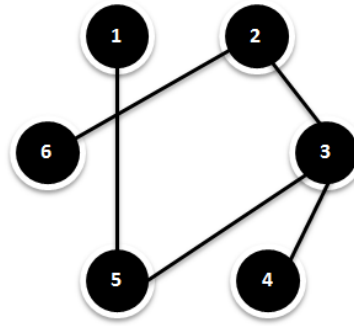


Figura 3.1: Red de acoplamiento irregular formada por 6 osciladores.

Sea $G = (V, E)$ un grafo, que consiste de $N = |V|$ osciladores, con $V = V(G) = v_1, v_2, \dots, v_N$ el conjunto de nodos y $M = |E|$ conexión entre nodos, donde $E = E(G) = e_1, e_2, \dots, e_M$ representa el conjunto de conexiones.

Existen dos matrices de principal interés: 1) Matriz de adyacencia y 2) Matriz de grado.

1) **Matriz de adyacencia** $A(G)$: Matriz $N \times N$. Los elementos a_{ij} se dan por:

$$a_{ij} \begin{cases} 1, & \text{if } (i, j) \in E(G), \\ 0, & \text{de otra manera,} \end{cases} \quad (3.3.1)$$

donde $(i, j) \in E(G)$ significa que el oscilador i está conectado con el oscilador j . $A(G)$ debe tener 0 en la diagonal para un grafo simple sin autoconexiones.

2) **Matriz de grado** $D(G)$: Matriz diagonal $N \times N$. Los elementos d_{ij} se dan por:

$$d_{ij} \begin{cases} d_{ij}, & \text{if } i = j, \\ 0, & \text{de otra manera,} \end{cases} \quad (3.3.2)$$

donde d_i es el grado del oscilador i y dado que cada oscilador i está conectado sin patrón definido (irregular), entonces d_i es la suma de los elementos de la fila i de la matriz de adyacencia $A(G)$.

Con las dos matrices anteriores se puede calcular la siguiente matriz, la **matriz Laplaciana**.

La matriz Laplaciana $L(G)$ con N osciladores, $N \times N$ se da con $L(G) = D(G) - A(G)$, con elementos l_{ij} determinado como:

$$l_{ij} \begin{cases} -1, & \text{if } (i, j) \in E(G), \\ d_i, & \text{if } i = j, \\ 0, & \text{de otra manera.} \end{cases} \quad (3.3.3)$$

Notese, que cuando una red es irregular, con oscilador o sin oscilador maestro, la matriz Laplaciana no tomó una forma definida como el caso de redes regulares, por lo tanto las propiedades de la matriz serán diferentes en cada configuración de acoplamiento.

Realizando un ejemplo para entender mejor lo dicho anteriormente, se obtiene la matriz Laplaciana de la figura 3.1 a continuación:

$$\begin{aligned}
L(G) = D(G) - A(G) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.3.4}
\end{aligned}$$

3.3.1. Redes irregulares con nodo aislado

Para el caso de redes con un oscilador aislado o maestro, significa que este oscilador no recibe información o influencia del resto de los osciladores en la red. Por lo que, cuando exista sincronización en la red, el oscilador aislado impondrá su dinámica al resto de la red. Podemos observar en la figura 3.2 la red irregular con un oscilador aislado.

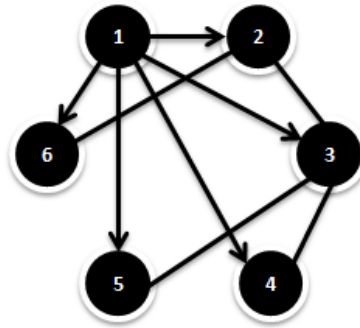


Figura 3.2: Red de acoplamiento irregular formada por 6 osciladores, tomando el oscilador 1 como maestro.

También se muestra la matriz Laplaciana en 3.3.5 obtenida de la figura 3.2, observando que los valores la fila del oscilador aislado son ceros, ya que éste impone su dinámica en una configuración unidireccional con el resto de los osciladores.

$$\begin{aligned}
 L(G) = D(G) - A(G) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \tag{3.3.5}
 \end{aligned}$$

3.4. Redes complejas regulares

La configuración de topología de redes regulares siguen un patrón definido en la forma de que sus osciladores están conectados, y tienen estructuras, propiedades y características muy definidas [9]. Trabajaremos con tres casos en particular, red con acoplamiento global, red con acoplamiento anillo y red con acoplamiento estrella.

3.4.1. Red con acoplamiento global (A_{gc})

Se le llama global, porque cada oscilador de la red está conectado con el resto de los osciladores. En la figura 3.3 se muestra la forma de esta red.

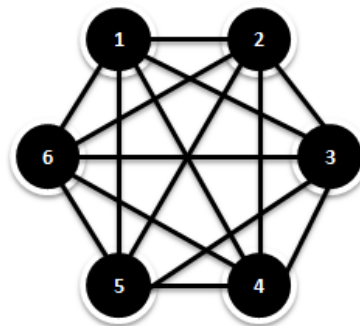


Figura 3.3: Red regular con acoplamiento global formada por 6 osciladores.

Para este tipo de redes regulares, la matriz de adyacencia y la matriz de grado se calculan de la misma manera como se calcularon en las redes irregulares, mostrado en (3.3.1) y (3.3.2). Los elementos de la matriz Laplaciana tendrán la misma forma que en (3.3.3), en este caso como son redes con un patrón definido, los elementos de la diagonal serán $d_1 = d_2 = d_3 = \dots = d_N = N - 1$

quedando la matriz Laplaciana $L(G)$ como:

$$A_{gc} = L(G) = \begin{bmatrix} N-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & N-1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & \ddots & -1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & N-1 \end{bmatrix}, \quad (3.4.1)$$

nótese que la suma de los elementos de las columnas de la matriz Laplaciana es cero.

3.4.2. Red con acoplamiento anillo (A_{nc})

Esta red está formada por N cantidad de osciladores acoplados en forma de anillo, cada oscilador i es adyacente a sus osciladores vecinos, es decir, $i \pm 1, i \pm 2, i \pm k/2$ con k siendo un número par. Se puede observar en la figura 3.4 que cada oscilador tiene una conexión de entrada y una de salida.

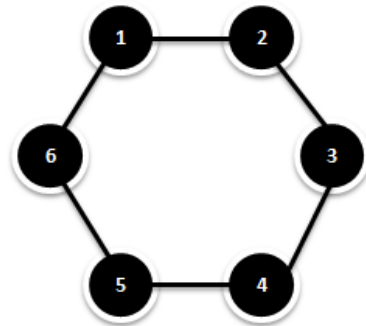


Figura 3.4: Red regular con acoplamiento anillo formada por 6 osciladores.

Las matrices $A(G)$ y $D(G)$ se calculan de la misma manera que en (3.3.1) y (3.3.2). La matriz Laplaciana obtenida en (3.3.3) quedará como caso particular $k = 2$, por lo tanto $d_1 = d_2 = d_3 =$

... = $d_N = k$, entonces:

$$A_{nc} = L(G) = \begin{bmatrix} k & -1 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & k & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & -1 \\ -1 & 0 & \dots & -1 & k \end{bmatrix}. \quad (3.4.2)$$

3.4.3. Red acoplamiento estrella (A_{sc})

Esta red se forma cuando un oscilador está conectado al resto de los osciladores. Es decir, todos los osciladores están conectados sólo a un oscilador central. Un ejemplo de red estrella es mostrada en la figura 3.5.

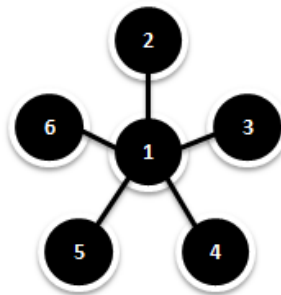


Figura 3.5: Red regular con acoplamiento anillo formada por 6 osciladores.

Las matrices $A(G)$ y $D(G)$ son obtenidas como en los casos anteriores, la matriz $L(G) = D(G) -$

$A(G)$ queda como en la figura 3.4.3, donde $d_1 = N - 1$, $d_2 = d_3 = \dots = d_N = 1$.

$$A_{sc} = L(G) = \begin{bmatrix} N-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.4.3)$$

la suma de los elementos de la columna de $A_{sc} = 0$.

3.4.4. Redes regulares con oscilador aislado

De la misma manera como se menciona en el caso de redes irregulares con oscilador aislado, si la red regular cuenta con algún oscilador aislado, éste no recibe información de otro oscilador de la red, es decir, solamente tiene salidas. El oscilador aislado, al igual que en el caso irregular, puede imponer su propia dinámica al resto de la red siempre y cuando exista sincronización. Entonces, en la matriz Laplaciana, la fila donde se ubica el oscilador aislado será reemplazada por ceros. Un ejemplo muy claro de este tipo de red se aprecia en la figura 3.6.

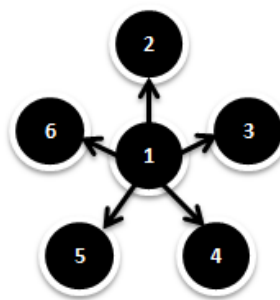


Figura 3.6: Red regular con acoplamiento anillo formada por 6 osciladores y el oscilador 1 como maestro.

Y así, la Matriz Laplaciana de la red anterior queda de la siguiente manera:

$$A_{sc} = L(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.4.4)$$

Capítulo 4

Sincronización de redes complejas utilizando acoplamiento a modelos

4.1. Introducción

En este capítulo se presenta la metodología de acoplamiento a modelos para alcanzar el objetivo de esta tesis. Para esta técnica se propuso una solución con base en álgebra diferencial para el caso discreto en [42]. Por lo que, esta metodología se ha usado para sincronizar solo dos sistemas caóticos discretos [27] utilizada por la propuesta presentada en [43] y [44]. Se empleará dicha técnica para sincronizar más de dos osciladores caóticos discretos acoplados en una red.

4.2. Descripción del problema de estudio

Considere el sistema no lineal discreto P , definido por

$$P : \begin{cases} x(k+1) &= f(x(k), u(k)), \\ y(k) &= h(x(k)), \end{cases} \quad (4.2.1)$$

donde el vector de estados $x(k) \in X$, siendo X un conjunto abierto en \mathfrak{R}^n , la entrada $u(k)$ pertenece a un conjunto abierto U en \mathfrak{R} y la salida $y(k)$ pertenece a un conjunto abierto Y en \mathfrak{R} . Los mapeos $f : X \times U \rightarrow X$ y $h : X \rightarrow Y$ son analíticos.

Ahora, considere otro sistema no lineal discreto M , descrito por

$$M : \begin{cases} x_M(k+1) = f_M(x_M(k), u_M(k)), \\ y_M(k) = h_M(x_M(k)), \end{cases} \quad (4.2.2)$$

donde el vector de estados $x_M(k) \in X_M$, siendo X_M un conjunto abierto en \mathbb{R}^{n_M} , la entrada $u_M(k)$ pertenece a un conjunto abierto U_M en \mathbb{R} y la salida $y_M(k)$ pertenece a un conjunto abierto Y_M en \mathbb{R} . De igual manera, los mapeos $f_M : X_M \times U_M \rightarrow X_M$ y $h_M : X_M \rightarrow Y_M$ son analíticos. A lo largo de la tesis se asumen ciertos valores en los parámetros de los sistemas que se presentan, y sin control, es decir, cuando $u_i(k) = u_M(k) = 0$, $i = 1, 2, \dots, N$ y así exhibiendo comportamientos caóticos en los sistemas. El objetivo de este capítulo es diseñar una ley de control para el sistema (4.2.1), que en lazo cerrado genere un comportamiento entrada-salida que tienda al oscilador de referencia (4.2.2). Con esta metodología, buscaremos sincronizar una red formada por N cantidad de osciladores caóticos discretos en una topología regular con acoplamiento estrella y con nodo aislado (maestro).

En este trabajo de tesis, se tiene interés particular en el problema de acoplamiento asintótico a modelos que a continuación se describe brevemente y donde el análisis que se presenta, está dado para el caso particular de sistemas de una entrada y una salida únicamente.

4.2.1. Acoplamiento asintótico a modelos

El objetivo de control del **problema de acoplamiento asintótico a modelos (PAAM)** consiste en encontrar las leyes de control $u_i(k)$, $i = 1, 2, \dots, N$ para la plantas P_i , $i = 1, 2, 3, \dots, N$ que logre,

para cualquiera de los estados iniciales de P_i y M , que las salidas $y_i(k)$, $i = 1, 2, 3, \dots, N$ de P_i converjan asintóticamente a la salida $y_M(k)$ producida por el oscilador M bajo una entrada arbitraria $u_M(k)$.

En la literatura correspondiente se han reportado muchos trabajos donde se han propuesto diferentes maneras de resolver el problema de acoplamiento a modelos en tiempo discreto [44], [45] y [46] por mencionar algunas. En este capítulo se optará la metodología propuesta por [44]: *donde el PAAM se transforma en un problema de desacoplar la salida de un sistema auxiliar de la entrada al modelo $u_M(k)$.*

Expuesto lo anterior, podemos definir formalmente el problema de acoplamiento asintótico a modelos como sigue:

Definición 1: Problema discreto de acoplamiento asintótico a modelos no lineales (PDAAMN)

[44]. *Dada la planta P y el modelo M definimos alrededor de sus respectivos puntos de equilibrio (x^0, u^0) y (x_M^0, U_M^0) , y un punto $(x(0), x_M(0)) \in X^0 \times X_M^0 \subset X \times X_M$. El PDAAMN consiste en encontrar un entero ν y una ley de control $u(k)$, tal que la salida de la planta compensada $y_{P \circ C}(k)$ converja asintóticamente a la salida $y_M(k)$ producida por una entrada $u_M(k)$ del modelo M .*

Una forma de resolver el PDAAMN [44] consiste en definir un error $y_E(k) = y_i(k) - y_M(k)$, $i = 1, 2, 3, \dots, N$, entre las salidas de las plantas P_i y del modelo M , y diseñar las leyes de control $u_i(k)$, tal que ese error reúna las siguientes propiedades:

- i) Esté desacoplado de la entrada del modelo $u_M(k)$ para toda $k \geq 0$.*
- ii) Converja asintóticamente a cero.*

El primer punto es equivalente a transformar el PDAAMN en un problema de desacoplamiento a

perturbaciones de un sistema auxiliar (compuesto por las plantas y el modelo). Al resolver el problema en esta forma, se obtiene no sólo convergencia de las salidas de la plantas a la salida del modelo, sino también, una convergencia del error que es independiente de la entrada al modelo $u_M(k)$. De esta manera, el error de salida $y_E(k)$ depende sólo de las condiciones iniciales $x(1)$ y $x_M(1)$. Con esto, se define dicho sistema auxiliar como sigue:

$$E : \begin{cases} x_E(k+1) &= f_E(x_E(k), u_E(k), w_E(k)), \\ y_E(k) &= h_E(x_E(k)), \end{cases} \quad (4.2.3)$$

con vector de estado auxiliar $x_E(k) = (x(k), x_M(k))^T \in \mathbb{R}^{n+n_M}$ y entradas $u_E(k) = u(k)$ y $w_E(k) = u_M(k)$, donde

$$f_E(x_E(k), u_E(k), w_E(k)) = \begin{pmatrix} f(x, u) \\ f_M(x_M, u_M) \end{pmatrix}, \quad (4.2.4)$$

$$h_E(x_E) = h(x) - h_M(x_M). \quad (4.2.5)$$

Nótese que en este sistema auxiliar la señal $u_M(k)$ se considera una perturbación y siendo ésta una señal conocida en todo tiempo (ya que es la entrada a M), se puede tratar el problema anterior como un problema de desacoplamiento a perturbaciones con medición de perturbaciones.

En los casos de plantas en tiempo discreto se tiene que: un problema de acoplamiento a modelos no lineales tiene solución, si existe solución al problema de desacoplamiento a perturbaciones con medición de perturbaciones, asociado al sistema auxiliar (4.2.3). A continuación el PDAAMN se tratará en términos del grado relativo asociado a las salidas $y_i(k)$ e $y_M(k)$; $i=1,2,\dots,N$, para lo cual se presenta la siguiente definición:

Definición 2: Grado relativo [48]. La salida $y(k)$ de la planta (4.2.1) se dice que tiene grado

relativo d en un subconjunto abierto y denso O de $X \times U$ conteniendo al punto de equilibrio (x^0, u^0) , si

$$\frac{\partial}{\partial u}[h \circ f_0^l(f(x, u))] \equiv 0, \quad (4.2.6)$$

para toda $0 \leq l \leq d - 1$, para todo $(x, u) \in O$ y

$$\frac{\partial}{\partial u}[h \circ f_0^l(f(x, u))] \neq 0, \quad (4.2.7)$$

para todo $(x, u) \in O$.

Una definición similar puede formularse para el grado relativo d_M del modelo (4.2.2), en un subconjunto abierto y denso O_M , de $X_M \times U_M$ conteniendo al punto de equilibrio (x_M^0, u_M^0) .

Para resolver el PAAM, la siguiente hipótesis es requerida [49]:

(H1) Para todo $x_E = (x, x_M)^T \in X \times X_M$ y toda $u_M \in U_M$,

$$0 \in \Im\{h_E \circ f_{E0}^d(x_E, \cdot, u_M)\},$$

donde $\Im\{\varphi\}$ indica la imagen del mapa φ y “ \circ ” es la operación de composición.

De este modo, el siguiente teorema da condiciones necesarias y suficientes para la solución local del PAAM.

Teorema ([49], [44]). Considere la planta P (4.2.1) y el modelo M (4.2.2) definidos alrededor de sus respectivos puntos de equilibrio (x^0, u^0) y (x_M^0, u_M^0) . Supóngase que la salida de la planta y del modelo tienen grados relativos finitos d y d_M , respectivamente. Asíumase que la suposición (H1) se cumple. Entonces el PAAM tiene solución local en Ω_0^E , si y sólo si

$$d \leq d_M. \quad (4.2.8)$$

Si la condición 4.2.8 se cumple, entonces a partir de la definición de grado relativo d y d_M , se

tiene que

$$\begin{aligned} y_E(k+1) &= h_E \circ f_{E0}^l(x_E(k)), \\ &= h \circ f_0^l(x(k)) - h_M \circ f_{M0}^l(x_M(k)), \quad l = 0, 1, \dots, d, \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

además,

$$\begin{aligned} y_E(k+d+1) &= h \circ f_0^d \circ f(x(k), u(k)) - h_M \circ f_{M0}^l \circ f_M(x_M(k), u_M(k)) \\ &= h \circ f_0^{d+1}(x(k)) + S(x(k), u(k)) - h_M \circ f_{M0}^l \circ f_M(x_M(k), u_M(k)), \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

con $S(x(k), 0)$ y

$$\frac{\partial S(x(k), u(k))}{\partial u(k)} = \frac{\partial y_E(k+d+1)}{\partial u(k)} \neq 0. \quad (4.2.11)$$

Considerando (4.2.11) y la suposición (H1), se sigue a partir del teorema de la función implícita que existe un mapa analítico $\gamma^E : \mathbb{R}^{n \times n_M} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$y_E(k+d+1) = h_E \circ f_{E0}^d \circ f_E(x_E(k), \gamma^E(x_E(k), u_M(k), v(k))) = v(k), \quad (4.2.12)$$

con $v \in \mathbb{R}$ un control externo, o equivalentemente,

$$\begin{aligned} S[x(k), \gamma^E(x_E(k), u_M(k), v(k))] &= v(k) \\ &\quad - h \circ f_0^d \circ f(x(k)) \\ &\quad + h_M \circ f_{M0}^l \circ f_M(x_M(k), u_M(k)). \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

El mapeo analítico $\gamma^E(x_E, u_M, v)$ es el inverso de $S(x, \cdot)$, es decir

$$\gamma^E(x_E(k), u_M(k), v(k)) = S^{-1}(x(k), v - h \circ f_0^d \circ f(x) + h_M \circ f_{M0}^l \circ f_M(x_M(k), u_M(k))), \quad (4.2.14)$$

donde el control externo es dado por

$$v(k) = - \sum_{l=0}^d \alpha_l [h \circ f_0^l(x(k)) - h_M \circ f_{M_0}^l(x_M(k))]. \quad (4.2.15)$$

Finalmente, se muestra al sistema auxiliar E (4.2.3) retroalimentado por la ley de control (4.2.11-4.2.14) en términos de la planta P y del modelo M en un marco de coordenadas diferentes. En este trabajo, se restringen los resultados sobre sincronización de salida a:

(A) *Plantas completamente linealizables, es decir, para $d + 1 = n$.*

A partir de la definición de grado relativo d , se tiene que: $h(x), \dots, h \circ f_0^d(x)$ son funciones independientes [50] y pueden ser elegidas como nuevas coordenadas con $\xi_i(x) = h \circ f_0^{i-1}(x)$ para $i = 1, 2, \dots, d + 1$ definidas en el subconjunto O alrededor de x^0 . Permitase considerar al sistema auxiliar E (4.2.3) y las nuevas coordenadas

$$(\zeta(x_E), x_M) = \phi(x_E) = \phi(x, x_M), \quad (4.2.16)$$

donde $\zeta(x_E) = [\zeta_1(x_E), \dots, \zeta_{d+1}(x_E)]^T$ y $\zeta(x_E) = h_{Ei} \circ f_{E0}^{i-1}(x_E) = \zeta_i(x) - h_{M0} \circ f_{M0}(x_M)$ para $i = 1, 2, \dots, d + 1$. De este modo, el sistema auxiliar (4.2.3) en lazo cerrado en el nuevo marco de coordenadas toma la forma

$$\begin{aligned} \zeta_i(k+1) &= \zeta_{i+1}(k), \quad i = 1, \dots, d, \\ \zeta_{d+1}(k+1) &= v(k) = -\alpha_0 \zeta_1(k) - \dots - \alpha_d \zeta_{d+1}(k), \\ x_M(k+1) &= f_M(x_M(k), u_M(k)), \\ y_E(k) &= \zeta_1(k). \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

De la descripción del sistema (4.2.17), se puede ver que la salida $y(k)$ de la planta retroalimentada, difiere de la salida $y_M(k)$ del modelo por una señal de error $y_E(k)$, gobernada por la ecuación lineal en diferencias

$$y_E(k + d + 1) + \alpha_{di}y_E(k + d) + \dots + \alpha_1y_E(k + 1) + \alpha_0y_E(k) = 0, \quad (4.2.18)$$

donde $\alpha_0, \dots, \alpha_d$ son coeficientes reales constantes, lográndose que la salida $y(k)$ converja a $y_M(k)$. Es decir, $y_E(k) = 0$ después de algún tiempo, lográndose por tanto, que la condición de sincronización de salida

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|y_M(k) - y(k)\| = 0 \quad (4.2.19)$$

se cumpla.

Del sistema en lazo cerrado (4.2.17), se pueden distinguir dos subsistemas, que son:

1. El sistema descrito por la ecuación

$$x_M(k + 1) = f_M(x_M(k), u_M(k)), \quad (4.2.20)$$

que representa la dinámica del modelo de referencia M .

2. El subsistema lineal definido por la ecuación

$$\zeta(k + 1) = A^*\zeta(k), \quad (4.2.21)$$

con

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_d \end{bmatrix}, \quad (4.2.22)$$

asociada a la dinámica de la señal de error $y_E(k)$.

El subsistema M puede asumirse estable, si se elige una ley de control tal que la matriz A^* tenga todos sus valores propios con magnitud estrictamente menor que 1, entonces el sistema en lazo cerrado será exponencialmente estable. Como consecuencia de lo anterior, se cumple también con la condición de sincronía de salida (4.2.19).

Observación: Dado que $y_E(k) = \zeta_1(k) = \xi_1(x(k)) - h_{M1}(x_M(k)) \rightarrow 0$ a medida que $k \rightarrow \infty$, nótese que $\xi_i(x)$ y $h_{Mi} \circ f_{M0}^{i-1}(x_M)$, $i = 1, 2, \dots, d+1$ son difeomorfismos. Entonces, si la planta P y el modelo M son sistemas caóticos discretos idénticos, $\xi_i(x) \rightarrow h_{Mi} \circ f_{M0}^{i-1}(x_M)$, $i = 1, 2, \dots, d+1$ y, si los mapeos tienen la misma estructura y tienden a ser iguales, entonces los argumentos también, es decir $x(k) \rightarrow x_M(k)$ a medida que $k \rightarrow \infty$. Además, de la ley de control (4.2.14) y (4.2.15) se puede ver que, $u(k) \rightarrow u_M(k)$ a medida que $k \rightarrow \infty$, con el propósito de desacoplar la entrada $u_M(k)$ en el sistema auxiliar E (4.2.3). Por tanto, para sistemas caóticos idénticos, se obtiene sincronización completa, es decir, la condición

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_M(k) - x_i(k)\| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.2.23)$$

se cumple.

La figura 4.1 muestra el esquema de sincronización empleando acoplamiento a modelos (maestro-esclavo) garantizando sincronización en la salida de los dos osciladores.

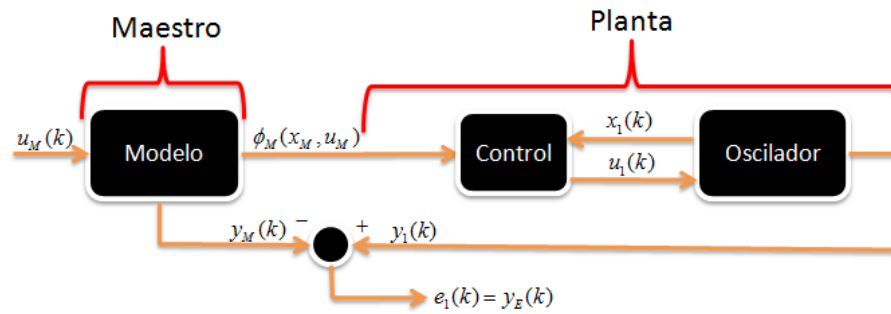


Figura 4.1: Esquema de sincronización empleando acoplamiento a modelos.

La figura 4.2 muestra un diagrama a bloques que representa lo anterior extendido a una red; con esta configuración se garantiza sincronización con todos los osciladores en la salida, significando la condición (4.2.19).

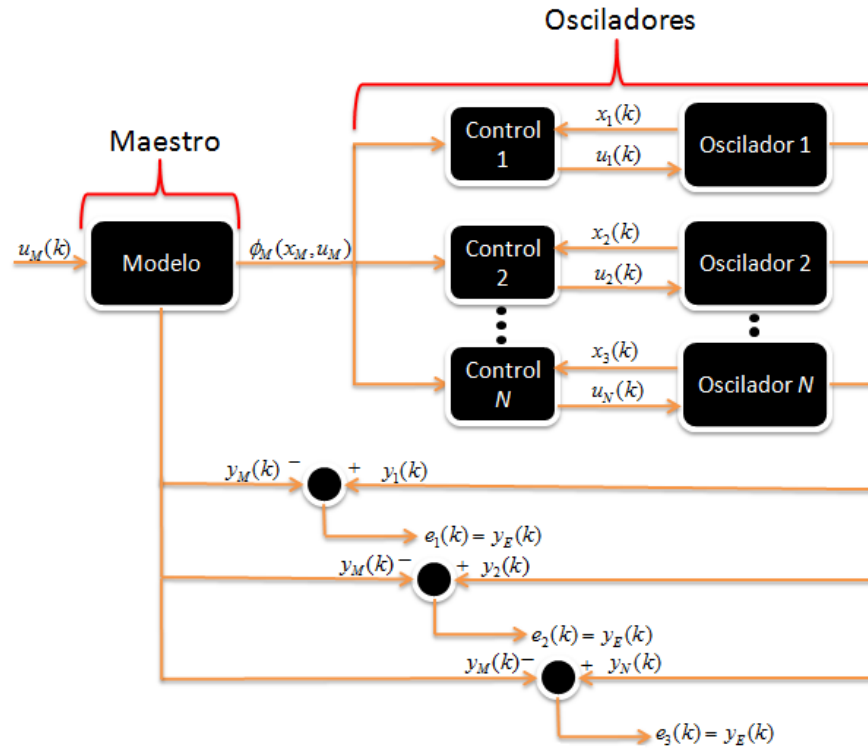


Figura 4.2: Esquema de sincronización extendido a una red empleando acoplamiento a modelos.

4.2.2. Ejemplos

Realizaremos un ejemplo en donde se ha utilizado esta técnica para sincronizar 2 osciladores caóticos idénticos, figura 4.1. Después, extenderemos dicha técnica para sincronizar 9 osciladores idénticos conectados en una red estrella, figura 4.8.

Ejemplo 1. Considere el siguiente sistema hipercaótico Grassi-Miller:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= bx_1(k) + 1 - ax_2^2(k), \\ x_2(k+1) &= x_1(k), \end{aligned} \tag{4.2.24}$$

con los valores en los parámetros $a = 1$ y $b = 0.3$, el sistema presenta comportamiento hipercaótico [31]. En la figura 4.3 se observa el comportamiento temporal de los estados del sistema (4.2.24) cuando parten de la condición $x(1) = (0.1, 0.2)$. Mientras que en la figura 4.4 se muestra en el espacio de estados el atractor hipercaótico del sistema sobre el plano $x_1(k)$ vs $x_2(k)$.

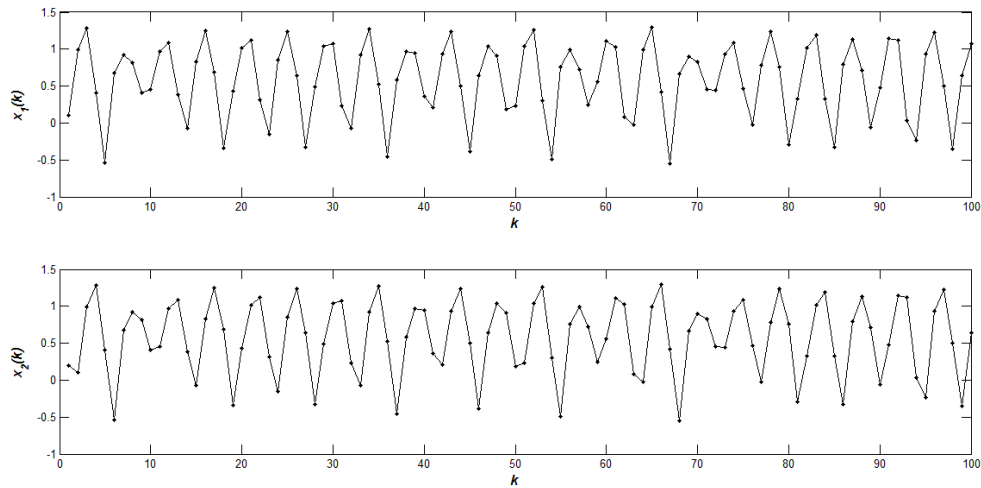


Figura 4.3: Evoluciones en el tiempo de los estados hipercaóticos del sistema (4.2.24).

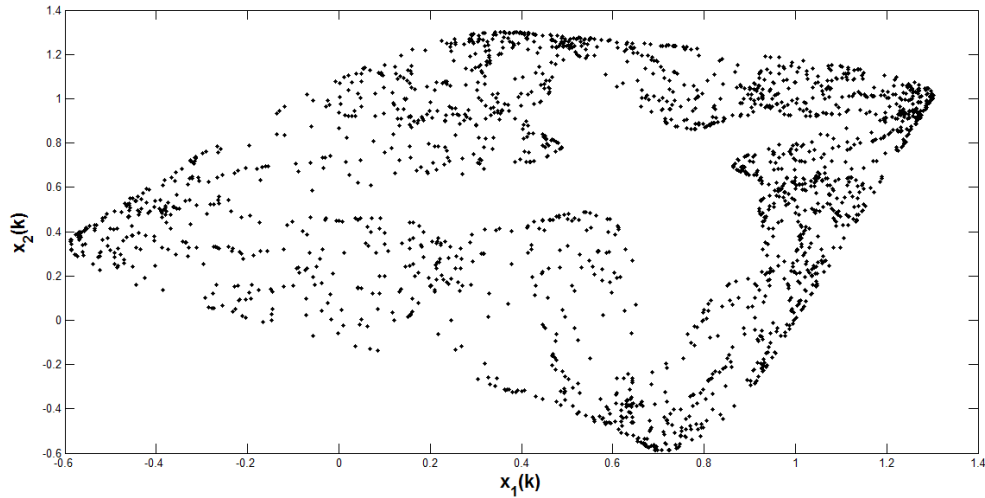


Figura 4.4: Atractor hipercaótico desplegado por el sistema (4.2.24).

Con base al sistema anterior, considere el siguiente sistema como esclavo (planta),

$$P : \begin{cases} x_1(k+1) = bx_1(k) + 1 - ax_2^2(k) + u(k), \\ x_2(k+1) = x_1(k), \\ y(k) = x_2(k), \end{cases} \quad (4.2.25)$$

además, considere el siguiente sistema como maestro (modelo de referencia),

$$M : \begin{cases} x_{M1}(k+1) = bx_{M1}(k) + 1 - ax_{M2}^2(k) + u_M(k), \\ x_{M2}(k+1) = x_{M1}(k), \\ y_M(k) = x_{M2}(k), \end{cases} \quad (4.2.26)$$

con esto, el grado relativo tanto del esclavo (4.2.25) como del maestro (4.2.26) es $d = d_M = 1$ según el teorema de grado relativo (4.2.6) y (4.2.7), garantizando solución al problema de acoplamiento a modelos y por tanto, al problema equivalente de sincronización de salida, condición (4.2.19).

Para encontrar la solución a este problema siguiendo esta metodología, se define un sistema auxiliar como en (4.2.3), cuya salida es la diferencia entre la salida del esclavo y del maestro:

$$y_E(k) = y(k) - y_M(k) = x_2(k) - x_{M2}(k). \quad (4.2.27)$$

Definiendo $\zeta_1(k) = y_E(k)$ se expresan los sistemas (4.2.25) y (4.2.26) en nuevas coordenadas como en (4.2.17):

$$\begin{aligned} \zeta_1(k+1) &= y_E(k+1) = \zeta_2(k), \\ \zeta_2(k+1) &= y_E(k+2) = v(k) = -\alpha_1\zeta_2(k) - \alpha_0\zeta_1(k). \end{aligned} \quad (4.2.28)$$

Del sistema anterior (4.2.28), se observa que en este caso el sistema auxiliar en las nuevas coordenadas, está completamente linealizado. La selección apropiada de los valores de α_i , $i = 0, 1$ garantiza convergencia del error a cero, es decir $\zeta_1(k) = 0$.

Se obtiene la siguiente ley de control que logra el acoplamiento entre la salida del maestro y del esclavo,

$$u(k) = -bx_1(k) - 1 + ax_2^2(k) + \epsilon(k) + v(k), \quad (4.2.29)$$

donde

$$\begin{aligned} \epsilon(k) &= bx_{M1}(k) + 1 - ax_{M2}^2(k) + u_M(k), \\ v(k) &= -\alpha_1\zeta_2(k) - \alpha_0\zeta_1(k), \\ &= -\alpha_1(x_1(k) - x_{M1}(k)) - \alpha_0(x_2(k) - x_{M2}(k)), \\ &= \alpha_1x_{M1}(k) + \alpha_0x_{M2}(k) - \alpha_1x_1(k) - \alpha_0x_2(k). \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

Utilizando la ley de control (4.2.29) y el esquema mostrado en la figura 4.1, se realizaron las siguientes simulaciones numéricas.

Se emplearon los mismos valores de parámetros tanto en maestro como en esclavo ($a = 1$ y $b = 0.3$). Se utilizó una $u_M(k) = 0$ para garantizar el comportamiento hipercaótico del maestro, se fijaron condiciones iniciales $x(1) = (0.3, 0.4)$ para el esclavo y $x_M(1) = (0.1, 0.2)$ para el maestro y se seleccionó $\alpha_i = 0.9$, $i = 0, 1$.

En la figura 4.5 se observa la evolución temporal de los estados $x_1(k)$ y $x_{M1}(k)$ además de los estados $x_2(k)$ y $x_{M2}(k)$; puede apreciarse como después de un transitorio, los estados se sincronizan. Para este ejemplo, donde se construye maestro y esclavo con sistemas idénticos, se obtiene sincronía completa, es decir, la condición (4.2.23) se cumple.

La figura 4.6 muestra los diagramas de fase donde se aprecia mejor la sincronía de ambos estados. Finalmente, la figura 4.7 muestra la evolución temporal de los errores entre los estados del maestro y del esclavo, $e_i(k) = x_i(k) - x_{Mi}(k)$, $i = 1, 2$.

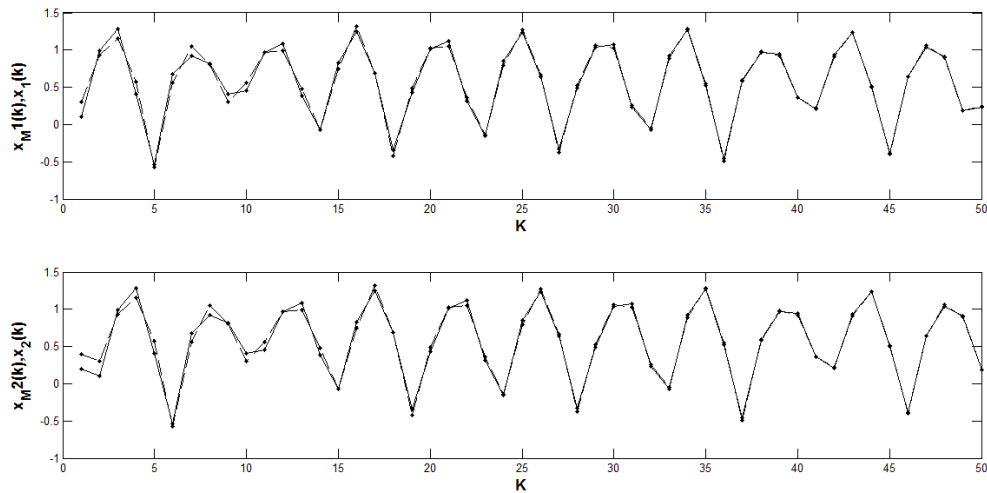


Figura 4.5: Acoplamiento (sincronía) entre $x_{M1}(k)$ (línea continua) y $x_1(k)$ (línea segmentada) y sincronía entre la salida del modelo $y_M(k) = x_{M2}(k)$ (línea continua) y la salida de la planta $y(k) = x_2(k)$ (línea segmentada).

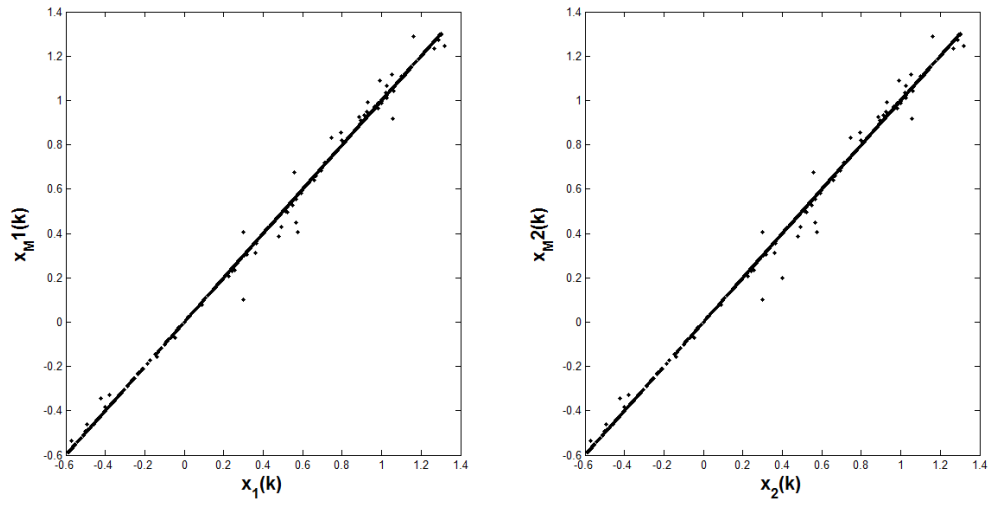


Figura 4.6: Planos de fase $x_1(k)$ vs $x_{M1}(k)$; $x_2(k)$ vs $x_{M2}(k)$.

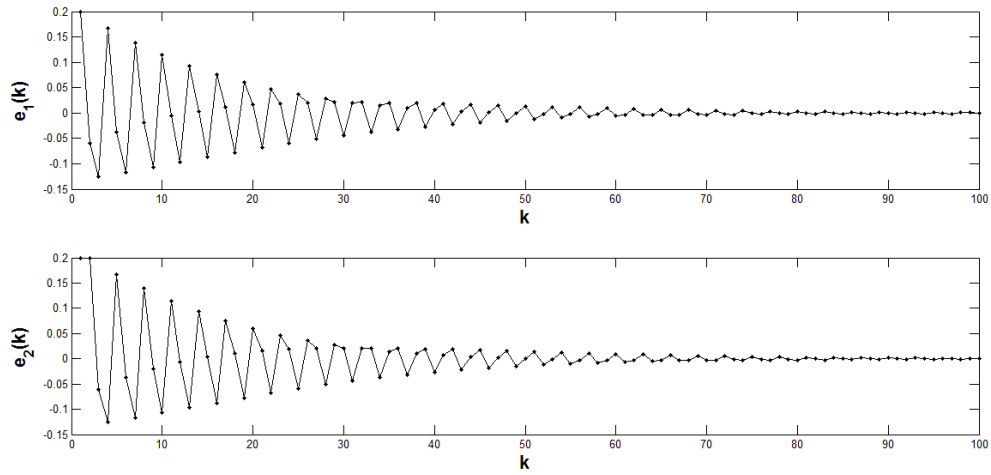


Figura 4.7: Evolución temporal de los errores de sincronía: $e_i(k) = x_i(k) - x_{Mi}(k)$, $i = 1, 2$.

Ejemplo 2. Considere la red estrella con nodo maestro mostrada en la figura 4.8.

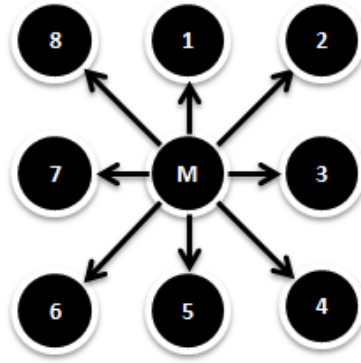


Figura 4.8: Red estrella formada por 9 osciladores con oscilador maestro.

Los osciladores de la red están compuestos por el sistema caótico Lozi:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k), \\ x_2(k+1) &= -p|x_2(k)| + qx_1(k) + 1, \end{aligned} \tag{4.2.31}$$

con los valores en los parámetros $p = 1.8$ y $q = 0.4$, el sistema presenta comportamiento caótico [32]. En la figura 4.9 se muestra en el espacio de estados el atractor caótico del sistema sobre el plano $x_1(k)$ vs $x_2(k)$. Mientras que en la figura 4.10 se observa el comportamiento temporal de los estados del sistema (4.2.31) cuando parten de la condición $x(1) = (0.5, 0.1)$.

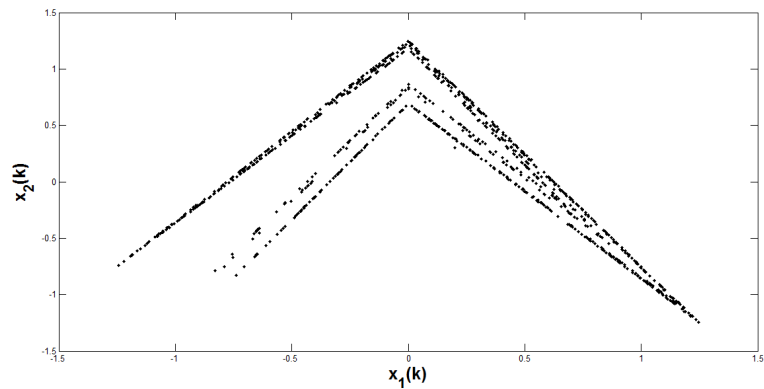


Figura 4.9: Atractor caótico desplegado del sistema (4.2.31).

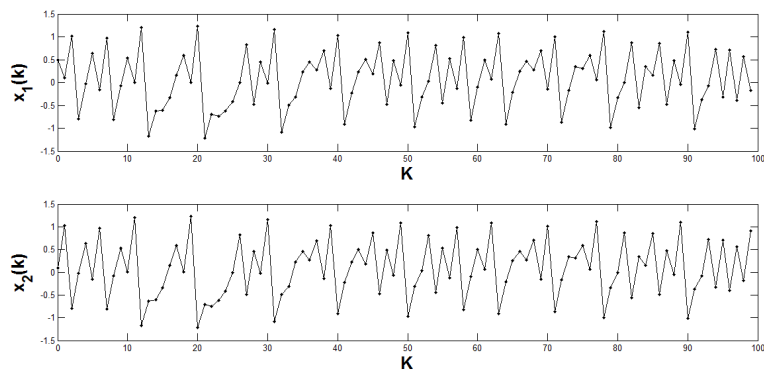


Figura 4.10: Evoluciones en el tiempo de los estados del sistema caótico Lozi.

Con base a lo anterior, considere los siguientes sistemas como esclavos (plantas):

$$Osc. i \begin{cases} x_{i1}(k+1) = x_{i2}(k), \\ x_{i2}(k+1) = -p|x_{i2}(k)| + qx_{i1}(k) + 1 + u_i(k), \quad \text{donde } i = 1, 2, \dots, 8. \\ y_i(k) = x_{i1}(k), \end{cases} \quad (4.2.32)$$

además, considere el siguiente sistema como maestro (modelo),

$$Osc. M \begin{cases} x_{M1}(k+1) = x_{M2}(k), \\ x_{M2}(k+1) = -p|x_{M2}(k)| + qx_{M1}(k) + 1 + u_M(k), \\ y_M(k) = x_{M1}(k). \end{cases} \quad (4.2.33)$$

Obtenemos el grado relativo de los osciladores (4.2.32) y del oscilador maestro (4.2.33), como son idénticos, el grado relativo es el mismo $d_i = d_M = 1$, $i = 1, 2, \dots, 8$ según el teorema (4.2.6) y (4.2.7), garantizando la solución al PAM y por lo tanto, al problema de sincronización de salida, condición (4.2.19). Recordemos que como son sistemas idénticos y existe sincronización en la salida, todos los estados sincronizarán, obteniendo así, sincronización completa (4.2.23).

Para encontrar la solución a este problema, siguiendo la metodología, se definen los sistemas auxiliares como en (4.2.3), cuya salida es la diferencia entre cada una de las salidas de los osciladores y del maestro:

$$y_{Ei}(k) = y_i(k) - y_M(k) = x_{i1}(k) - x_{M1}(k), \quad i = 1, 2, \dots, 8. \quad (4.2.34)$$

Definiendo $\zeta_1(k) = y_E(k)$ se expresan los sistemas (4.2.31) y (4.2.32) en nuevas coordenadas como en (4.2.17):

$$\begin{aligned} \zeta_{1i}(k+1) &= y_{Ei}(k+1) = \zeta_{2i}(k), \\ \zeta_{2i}(k+1) &= y_{Ei}(k+2) = v(k) = -\alpha_1 \zeta_{2i}(k) - \alpha_0 \zeta_{1i}(k), \quad \text{donde } i = 1, 2, \dots, 8. \end{aligned} \quad (4.2.35)$$

Del sistema anterior (4.2.35), se observa que los sistemas auxiliares en las nuevas coordenadas están completamente linealizados. La selección propia de los valores de α_j , $j = 0, 1$ garantiza convergencia del error a cero, es decir, $\zeta_{1i}(k) = 0$, $i = 1, 2, \dots, 8$. Se obtiene la siguiente ley de control que logra el acoplamiento (sincronía) entre la salida del maestro y cada una de las salidas de los osciladores (plantas),

$$u_i(k) = p|x_{i2}(k)| - qx_{i1} - 1 + v_i(k) + e(k), \quad i = 1, 2, \dots, 8, \quad (4.2.36)$$

donde

$$\begin{aligned}
 e(k) &= -p|x_{M2}(k)| + qx_{M1}(k) + 1 + u_M, \\
 v_i(k) &= -\alpha_1\zeta_{2i}(k) - \alpha_0\zeta_{1i}(k), \\
 &= -\alpha_1(k)(x_{i2}(k) - x_{M2}(k)) - \alpha_0(x_{i2}(k) - x_{M1}), \quad \text{donde } i = 1, 2, \dots, 8.
 \end{aligned}
 \tag{4.2.37}$$

Utilizando la ley de control (4.2.36) y el esquema de la figura (4.8), se realizaron las siguientes simulaciones numéricas.

Se emplearon los mismos valores de los parámetros para todos los osciladores ($p = 1.8$ y $q = 0.4$).

Se seleccionó una $u_M(k) = 0$ para garantizar el comportamiento caótico del oscilador maestro, las condiciones iniciales de los osciladores son:

$$\begin{aligned}
 x_M(1) &= (0.5, 0.1), & x_1(1) &= (0.9, 0.4), \\
 x_2(1) &= (-0.8, -0.7), & x_3(1) &= (-0.2, -0.3), \\
 x_4(1) &= (0.6, -0.9), & x_5(1) &= (-0.6, -0.5), \\
 x_6(1) &= (-0.1, 0.2), & x_7(1) &= (-0.3, 0.7), \\
 x_8(1) &= (-0.34, 0.99),
 \end{aligned}$$

y se seleccionó $\alpha_i = 0.5$ $i = 0, 1$. En la figura (4.11) se observa la evolución temporal de los estados $x_{i1}(k)$ y $x_{M1}(k)$ además de los estados $x_{i2}(k)$ y $x_{M2}(k)$ $i = 1, 2, \dots, 8$; puede apreciarse que después de un transitorio se obtiene sincronía completa. También, en las figuras 4.12 y 4.13 se presentan los planos de fase de cada oscilador donde se aprecia mejor la sincronía de los estados x_{i1} y x_{i2} ; $i = 1, 2, \dots, 8$. Por último, la figura 4.14 muestra la evolución temporal de los errores entre los estados de los osciladores así como del maestro, $e_{i1} = x_{i1} - x_{M1}$ y $e_{i2} = x_{i2} - x_{M2}$, $i = 1, 2, \dots, 8$.

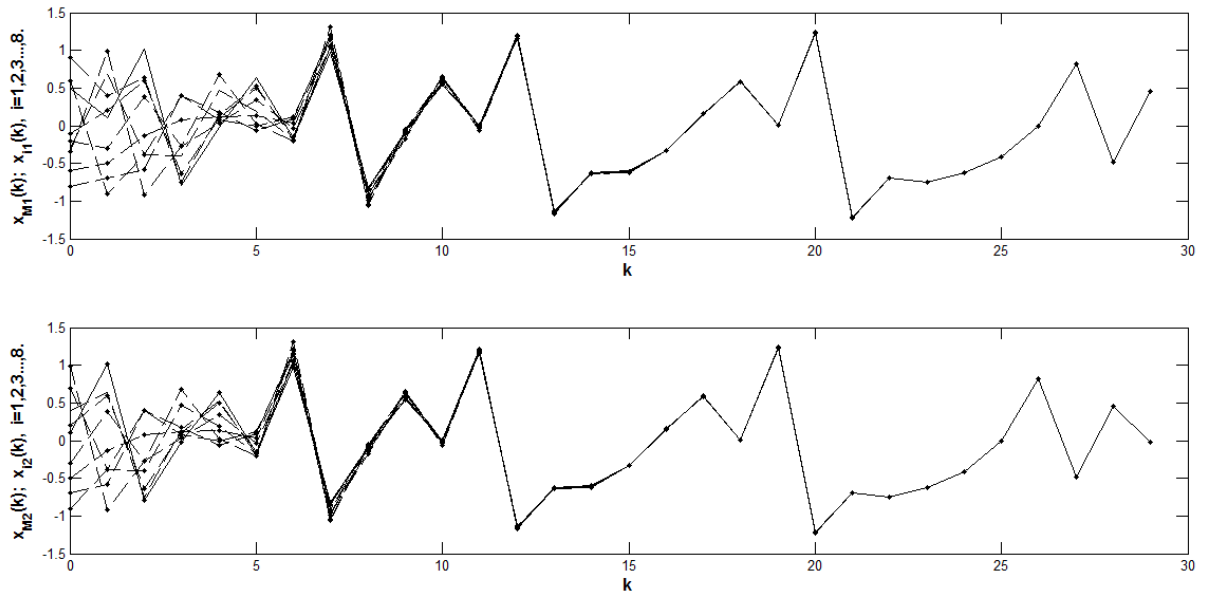


Figura 4.11: Sincronización entre $x_{M1}(k)$ (línea continua) y x_{i1} (líneas segmentadas); y sincronía en los estados x_{M2} (línea continua) y x_{i2} (línea segmentada), donde $i = 1, 2, \dots, 8$.

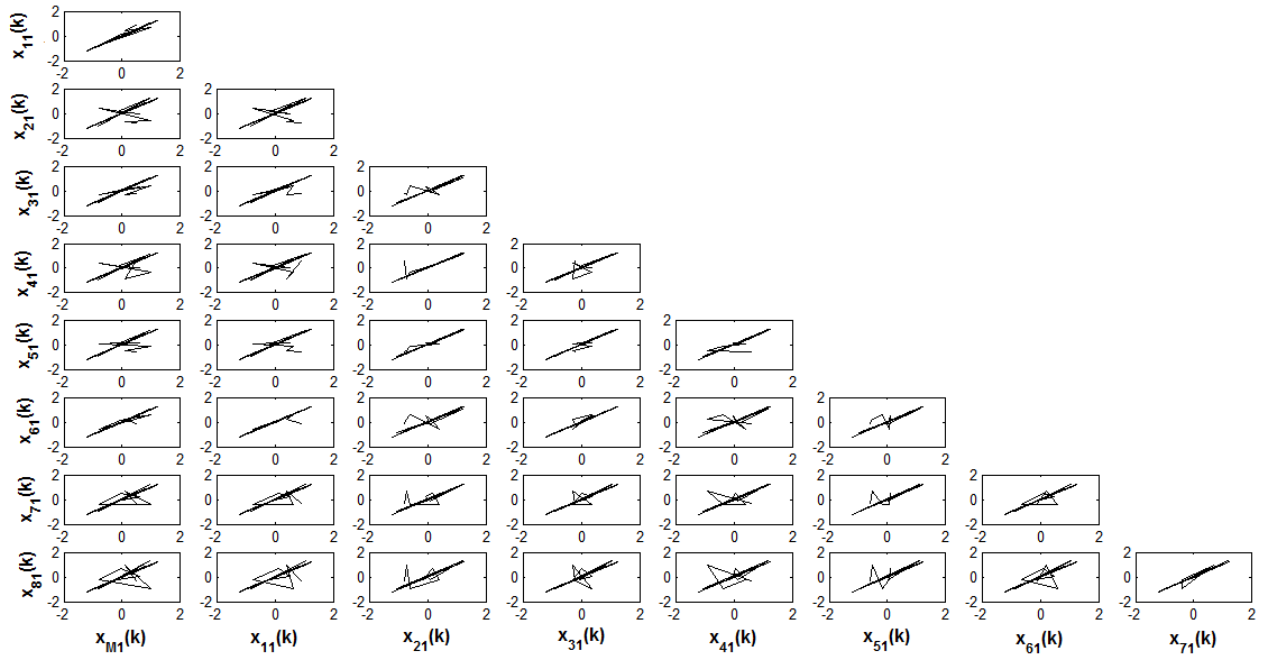


Figura 4.12: Planos de fase de $x_{M1}(k)$ vs $x_{11}(k)$; $x_{M1}(k)$ vs $x_{21}(k)$; $x_{M1}(k)$ vs $x_{31}(k)$; ... ; $x_{71}(k)$ vs $x_{81}(k)$.

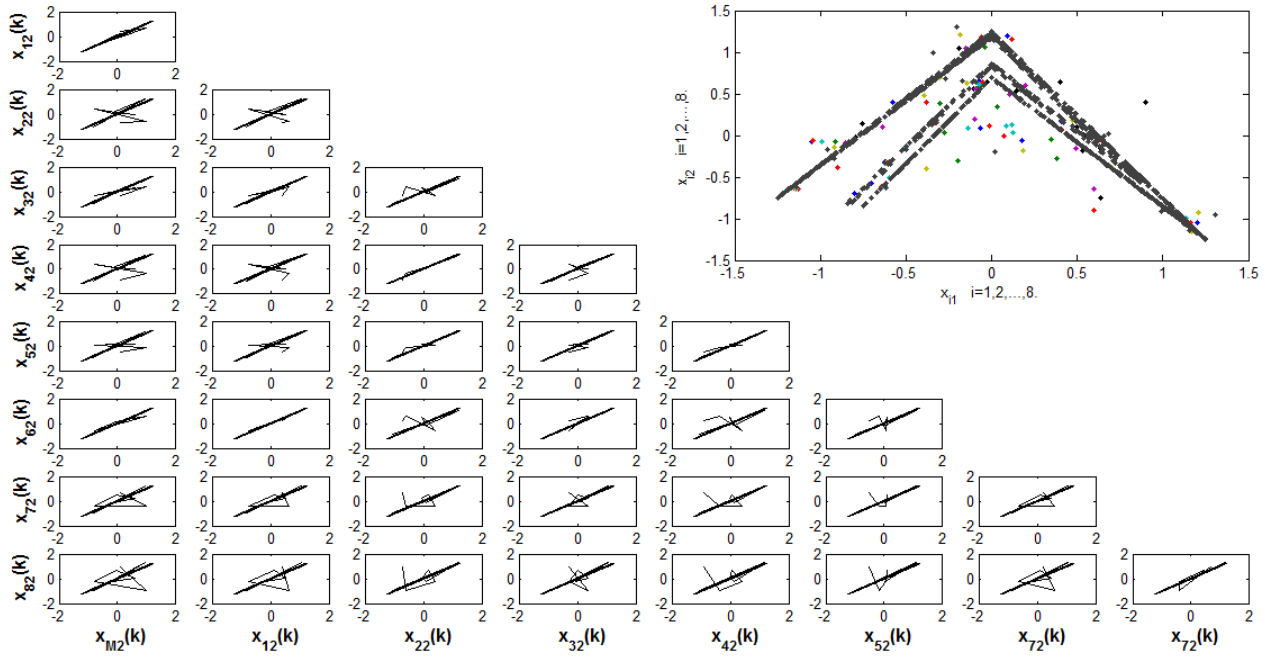


Figura 4.13: (a) Planos de fase de $x_{M2}(k)$ vs $x_{12}(k)$; $x_{M2}(k)$ vs $x_{22}(k)$; $x_{M2}(k)$ vs $x_{32}(k)$; ... ; $x_{72}(k)$ vs $x_{82}(k)$. (b) Atractor Lozi formado por los estados sincronizados x_{i1} vs x_{i2} donde $i = 1, 2, \dots, 8$.

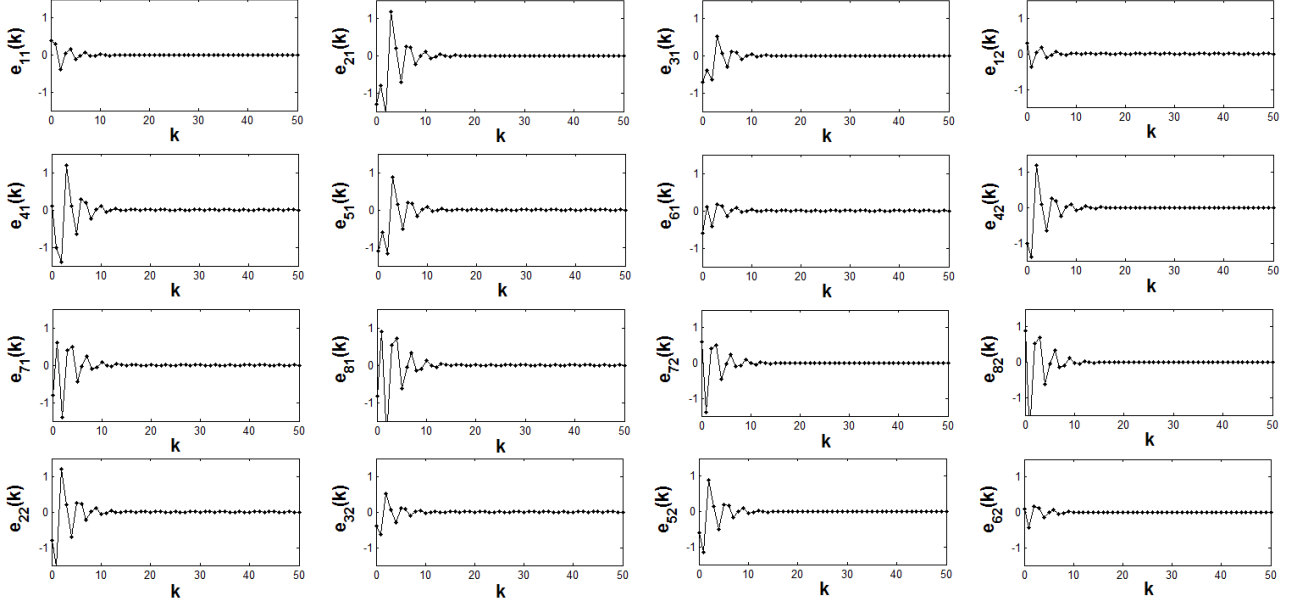


Figura 4.14: Evolución temporal de los errores $e_{i1}(k) = x_{M1}(k) - x_{i1}(k)$ y $e_{i2}(k) = x_{M2}(k) - x_{i2}(k)$, $i = 1, 2, \dots, 8$.

Generalizando el resultado anterior para una red estrella formada por **N-osciladores** y con oscilador maestro, obtenemos el grado relativo $d_i = d_M = d$, $i = 1, 2, \dots, N$, siendo el mismo valor para todos los sistemas, ya que son idénticos (4.2.6) y (4.2.7).

Siguiendo la metodología presentada en este capítulo, encontramos la solución definiendo los sistemas auxiliares (4.2.3), cuya salida es la diferencia entre cada una de las salidas de los osciladores y del maestro:

$$y_{Ei}(k) = y_i(k) - y_M(k), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.2.38)$$

Definiendo $\zeta_1(k) = y_E(k)$ como el sistema auxiliar en lazo cerrado en el nuevo marco de coordenadas, toma la forma:

$$\begin{aligned} \zeta_1(k+1) &= \zeta_{i+1}(k), \\ \zeta_{d+1}(k+1) &= v(k) = -\alpha_0 \zeta_1(k) - \dots - \alpha_d \zeta_{d+1}(k), \quad i = 1, \dots, d. \end{aligned} \quad (4.2.39)$$

donde

$v(k)$ es el control extendido dado por (4.2.15).

La selección propia de los valores de α_j , $j = 0, 1, \dots, d$ garantiza la convergencia del error a cero, es decir, $\zeta_i(k) = 0$, $i = 1, 2, \dots, N$. La ley de control generalizada para la sincronización completa de los N-osciladores en la red queda de la forma:

$$u_i(k) = -f_i(x_i(k)) + v_i(k) + f_M(x_M(k), u_M(k)), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.2.40)$$

donde

$f_i(x_i(k))$ es la dinámica de los osciladores $i = 1, 2, \dots, N$,

$f_M(x_M(k), u_M(k))$ es la dinámica del oscilador maestro.

De esta manera obtenemos sincronización completa en una red estrella formada por N-osciladores con oscilador maestro.

En este capítulo se mostró las condiciones de acoplamiento (sincronía) de la metodología acoplamiento a modelos, realizando un ejemplo de cómo se pueden sincronizar dos sistemas idénticos con dicha técnica [27]. Extendimos esta metodología para sincronizar una red estrella con oscilador aislado, donde observamos sincronización completa en todos los osciladores conectados en la red; es necesario tener un oscilador maestro que imponga su dinámica al resto de los osciladores directamente para que exista sincronía, de lo contrario, no es posible generar sincronía entre los osciladores.

Capítulo 5

Sincronización de redes complejas utilizando matriz de acoplamiento

5.1. Introducción

Después de definir las diferentes topologías de redes, algunas características de redes complejas y la metodología de acoplamiento a modelos, pasemos a la sincronización de redes complejas utilizando matriz de acoplamiento. Empezaremos describiendo las dinámicas de los osciladores en la red, y la ley de control que se describen en [17] y [9] obtenidas de la teoría de grafos. Después se mencionarán las condiciones necesarias para la sincronización y el análisis de estabilidad según la teoría de Lyapunov.

5.1.1. Dinámica de redes complejas

Considere una red compleja de N osciladores idénticos acoplados linealmente a través de la primera variable de estados de cada oscilador. En esta red dinámica, cada oscilador constituye un

sistema dinámico de dimensión n , descrita como sigue:

$$x_i(k+1) = f(x_i(k)) + u_i(k), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.1.1)$$

donde $x_i(k) = (x_{i1}(k), x_{i2}(k), \dots, x_{in}(k))^T \in \mathbb{R}^n$ son las variables del estado del oscilador i .

Mientras que

$$u_i(k) = c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.1.2)$$

la $c > 0$ representa el grado de acoplamiento de los osciladores de la red dinámica. $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de conexiones que conecta a las variables que están en los osciladores acoplados. Por simplicidad, $\Gamma = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_n)$ matriz simétrica donde en la diagonal con $r_i = 1$ para una i en particular y $r_j = 0$ para $i \neq j$.

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (5.1.3)$$

es la matriz de acoplamiento y representa la configuración de acoplamiento de los osciladores en la red dinámica. Si existe conexión entre oscilador i y el j , entonces la entrada $a_{ij} = 1$; de lo contrario, $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

$$a_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.1.4)$$

Si el grado del oscilador i es d_i , entonces,

$$a_{ii} = -d_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.1.5)$$

Suponiendo que en la red dinámica no hay osciladores aislados, entonces A es la matriz simétrica irreducible. En este caso cero es un valor propio de A , con multiplicidad 1 y el resto de los valores

proprios son estrictamente negativos. Si $x_1(k) = x_2(k) = \dots = x_N(k)$, cuando $k \rightarrow \infty$ la red dinámica sincroniza.

La sincronización de estados corresponde a una solución $s(k) \in \mathbb{R}^n$, de un oscilador aislado, satisfaciendo,

$$s(k+1) = f(s(k)), \quad (5.1.6)$$

donde $s(k)$ puede ser un punto de equilibrio, una órbita periódica o un atractor caótico. Por lo que, la sincronización, es decir,

$$x_1(k) = x_2(k) = \dots = x_N(k) = s(k), \quad (5.1.7)$$

está determinada por la dinámica de un oscilador aislado, de la función no lineal f y de su solución $s(k)$, del grado de acoplamiento c , de la matriz de conexiones Γ y de la matriz de acoplamiento A .

5.1.2. Condiciones de sincronización

Teorema 1 [17], [9]: Considere la red dinámica (5.1.1) y (5.1.2). Sean

$$0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_N, \quad (5.1.8)$$

los valores propios de A . Suponiendo que existe una matriz $\text{diag}(n \times n) \mathbf{D} > 0$ y dos constantes $\bar{d} < 0$ y $\tau > 0$ tales que

$$[Df(\mathbf{s}(k)) + d\Gamma]^T \mathbf{D} + \mathbf{D}[Df(\mathbf{s}(k)) + d\Gamma] \leq -\tau \mathbf{I}_n, \quad (5.1.9)$$

para todo $d \leq \bar{d}$.

Si se cumple $c\lambda_2 \leq \bar{d}$ entonces la sincronización $x_1(k) = x_2(k) = \dots = x_N(k) = s(k)$ es exponencialmente estable, puesto que $\lambda_2 < 0$ y $\bar{d} < 0$, entonces,

$$c\lambda_2 \leq \bar{d}. \quad (5.1.10)$$

Dado que $|\lambda_2|$ puede ser un valor grande, la red dinámica debe sincronizar con una c pequeña. Así la sincronización de la red dinámica (5.1.1) y (5.1.2) con respecto a una configuración particular de acoplamiento, ya sea regular o irregular, se puede determinar por el segundo valor propio más grande de la matriz de acoplamiento A .

5.1.3. Estabilidad de redes complejas

La estabilidad de redes complejas basada en la teoría de Lyapunov describe las condiciones que garantiza estabilidad del error de sincronía de una red compleja definida por (5.1.1) y (5.1.2). Teniendo en cuenta lo siguiente [8]:

- 1) *El caso de una red compleja que no tenga un oscilador maestro.* La dinámica resultante de la red puede corresponder a un nuevo estado caótico o a la dinámica del oscilador que domine más en la red.
- 2) *El caso de una red compleja con oscilador maestro.* La dinámica resultante corresponde a la del oscilador maestro.

5.1.4. Caso sin oscilador maestro

Considerando una red compleja compuesta por N sistemas caóticos discretos (osciladores) que están acoplados con una función,

$$x_i(k+1) = f(x_i(k)) + v(x_1(k), x_2(k), \dots, x_N(k)), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.1.11)$$

donde $x_i(k) = (x_{i1}(k), x_{i2}(k), \dots, x_{in}(k))^T \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de estados del i -ésimo oscilador, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función no lineal del estado y $v_i(k)$ es una función de acoplamiento.

Como todos los sistemas serán idénticos como osciladores, los estados de los sistemas tienen la misma dimensión, es decir, $v_i(x_1(k), x_2(k), \dots, x_N(k)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$.

Si $x_1(k) = x_2(k) = \dots = x_N(k)$, cuando $k \rightarrow \infty$, implica que cualquier solución de $x_i(k)$ de

un oscilador aislado, es también salida de (5.1.11). Los estados de cualquier dos osciladores caóticos discretos $x_i(k)$, $x_j(k)$ de la red satisfacen:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_i(k) - x_j(k)\| = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad i \neq j. \quad (5.1.12)$$

Si se le define el error de sincronía por $e_i(k) = x_i(k) - x_{i+1}(k)$, $i = 1, 2, \dots, N$, entonces obtenemos el sistema dinámico del error de sincronía:

$$e(k+1) = \tilde{f}(x_i(k), x_{i+1}(k)) + \tilde{v}_i(k); \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (5.1.13)$$

donde

$$\tilde{f}(x_i(k), x_{i+1}(k)) = f(x_i(k)) - f(x_{i+1}(k)), \quad (5.1.14)$$

$$v_i(k) = v_i(x_1(k), x_2(k), \dots, x_N(k)).$$

Proponiendo que

$$v_i(k) = -\tilde{f}(x_i(k), x_{i+1}(k)) - \alpha e_i(k), \quad \alpha > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (5.1.15)$$

Entonces (5.1.13) es globalmente asintóticamente estable alrededor del origen, es decir,

$$e_i(k) \rightarrow 0; \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (5.1.16)$$

5.1.5. Caso con oscilador maestro

Si la función de acoplamiento es $v_\rho = 0$, entonces es de la forma:

$$v_i(k) = f(x_\rho(k)) - f(x_i(k)) + \alpha(x_\rho - x_i), \quad \alpha > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (5.1.17)$$

Esto implica que el oscilador desacoplado ρ se toma como oscilador maestro y todos los osciladores restantes de la red sincronizan con este oscilador maestro, es decir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_i(k) - x_\rho(k)\| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.1.18)$$

Esto significa, que se puede garantizar que los estados de la red sincronizan con los estados arbitrarios de un oscilador desacoplado ρ . En particular, se requiere que los estados de los osciladores de la red compleja, sincronizen con el estado del oscilador maestro $s(k)$, que satisface,

$$s(k + 1) = f(s(k)). \quad (5.1.19)$$

Esta dinámica del oscilador maestro, puede ser un punto equilibrio, una órbita periódica o un atractor caótico. Se escoge una función de acoplamiento de la forma,

$$v_i(k) = f(s(k)) - f(x_i(k)) + \alpha(s(k) - x_i(k)), \quad \alpha > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (5.1.20)$$

tal que satisfaga (5.1.18) y que por lo tanto garantice la sincronización asintótica y global.

5.2. Ejemplos de sincronización de redes complejas formadas por osciladores discretos

En esta sección realizaremos la sincronización de redes complejas formadas por osciladores discretos, en topología regular global, anillo y estrella. También, realizaremos un ejemplo en topología irregular sin nodo maestro.

5.2.1. Sincronización de una red global formada por osciladores discretos Fold

Considere una red global formada por 12 osciladores caóticos discretos como se observa en la figura 5.1.

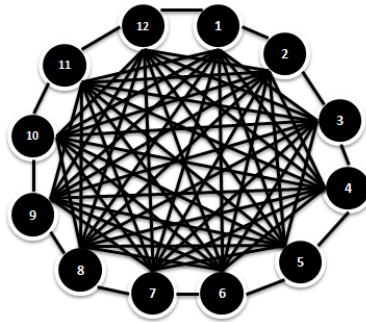


Figura 5.1: Red global compuesta por 12 osciladores.

Los osciladores de la red están formados por sistemas caóticos discretos Fold (algunas veces llamado bifurcación fold, saddle-node bifurcation or tangent bifurcation). Este sistema es sencillo de construir, cuyas ecuaciones son:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) + ax_1(k) + u_1, \\ x_2(k+1) &= x_1(k)^2 + b, \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

se sabe que el sistema (5.2.1) para ciertos valores de parámetros exhibe una dinámica caótica [7]. En las simulaciones numéricas realizadas se consideraron los valores paramétricos: $a = -0.1$ y $b = -1.7$. La figura 5.2 muestra el atractor caótico del sistema (5.2.1) en el espacio de estados.

Siguiendo el material presentado en la sección anterior, a continuación se muestra la sincronización de una red global, figura 5.1, utilizando matriz de acoplamiento, realizando la sincronización en los osciladores descritos como:

$$\text{osc. } i \begin{cases} x_{i1}(k+1) = x_{i2}(k) + ax_{i1}(k) + u_1, \\ x_{i2}(k+1) = x_{i1}(k)^2 + b, \end{cases} \quad \text{donde } i = 1, 2, \dots, 12. \quad (5.2.2)$$

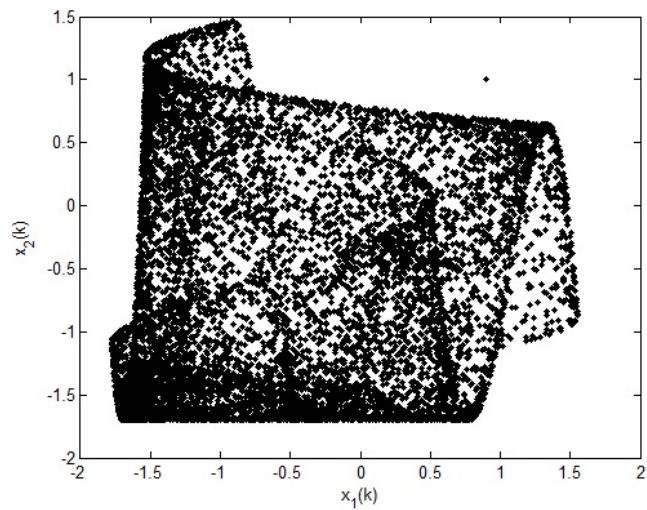


Figura 5.2: Atractor caótico del sistema (5.2.1).

La matriz de acoplamiento se obtiene con la ecuación (5.1.3) u obteniendo la matriz Laplaciana $L(G)=D(G)-A(G)$ de la ecuación (3.4.1), la cual queda como sigue:

$$A_{gc} = L(G) = \begin{bmatrix} N+1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N+1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N+1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.2.3)$$

La cual queda simplificada como:

$$A_{gc} = L(G) = \begin{bmatrix} -11 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -11 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & -11 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -11 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -11 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -11 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -11 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & -11 \end{bmatrix}. \quad (5.2.4)$$

Utilizando la ecuación (5.1.2), obtenemos las leyes de control que hará que los osciladores se sincronicen, quedando como:

$$u_i(k) = c \sum_{j=1}^{12} A_{gc} \Gamma x_{j2}, \quad i = 1, 2, \dots, 12, \quad (5.2.5)$$

como existen conexiones entre todos los osciladores dentro de la red, $\Gamma = \mathbf{I}_{12}$.

Las leyes de control obtenidas de (5.2.5) garantizan que los osciladores de Fold se sincronicen. Calculando los valores propios de la matriz Laplaciana: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_i = -12$; $i = 2, 3, \dots, 12$ y tomando un valor de $d = -1$ como en la ecuación (5.1.9), podemos hacer que los estados de cada oscilador converjan a 0. Obtenida una $\bar{d} = -1$, calculamos de la ecuación (5.1.10) el valor de $c \geq 0.2$ para obtener la sincronización entre los osciladores.

Las condiciones iniciales de los osciladores que forman la red son: $x_1(1) = (-0.1, -0.5)$; $x_2(1) = (-0.9, -0.4)$; $x_3(1) = (-0.3, -0.8)$; $x_4(1) = (-0.7, -0.6)$; $x_5(1) = (-0.25, -0.12)$; $x_6(1) = (-0.15, -0.55)$; $x_7(1) = (-0.78, -0.45)$; $x_8(1) = (-0.35, -0.85)$; $x_9(1) = (-0.75, -0.65)$;

$$x_{10}(1) = (-0.23, -0.18); \quad x_{11}(1) = (-0.33, -0.53); \quad x_{12}(1) = (-0.63, -0.43).$$

En las figuras 5.3 y 5.4 se sepresentan los planos de fase de los osciladores que componen la red, en la figura 5.5 se presenta las trayectorias de los osciladores, podemos observar que después de un transitorio todos los osciladores se sincronizan.

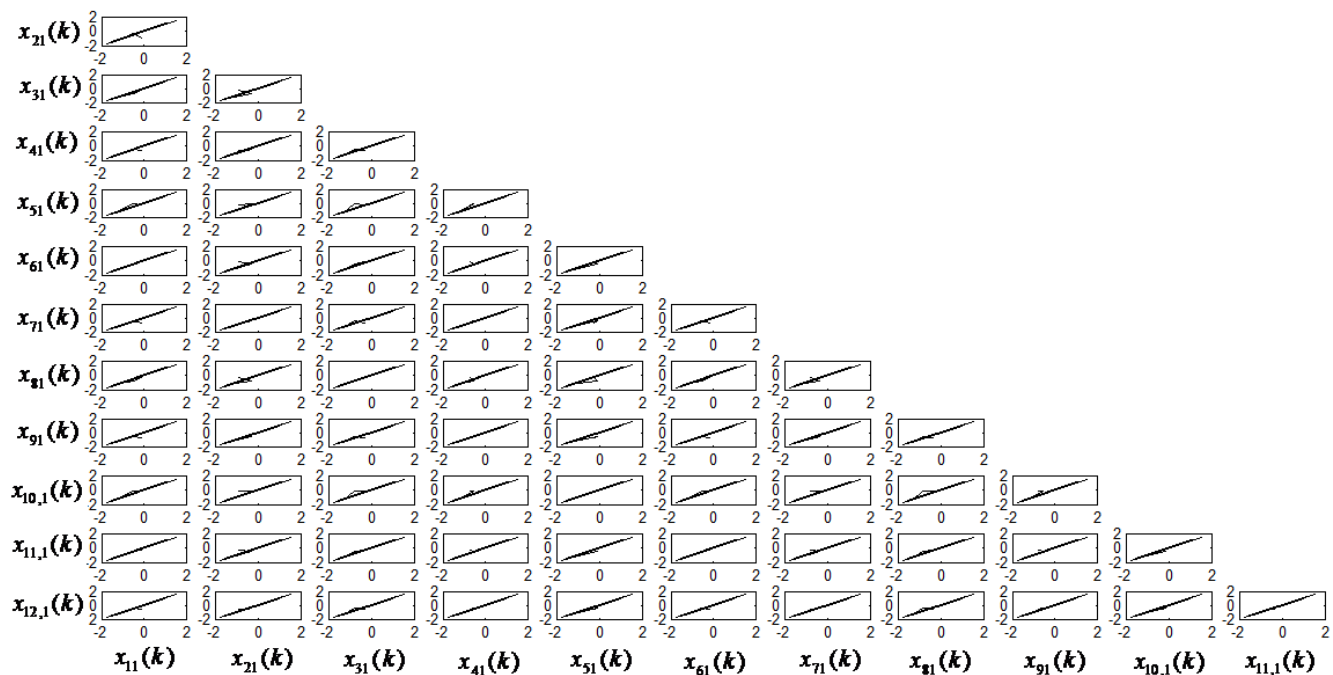


Figura 5.3: Planos de fase de $x_{11}(k)$ vs $x_{21}(k)$; $x_{11}(k)$ vs $x_{31}(k)$; $x_{11}(k)$ vs $x_{41}(k)$; ... ; $x_{11,1}(k)$ vs $x_{12,1}(k)$.

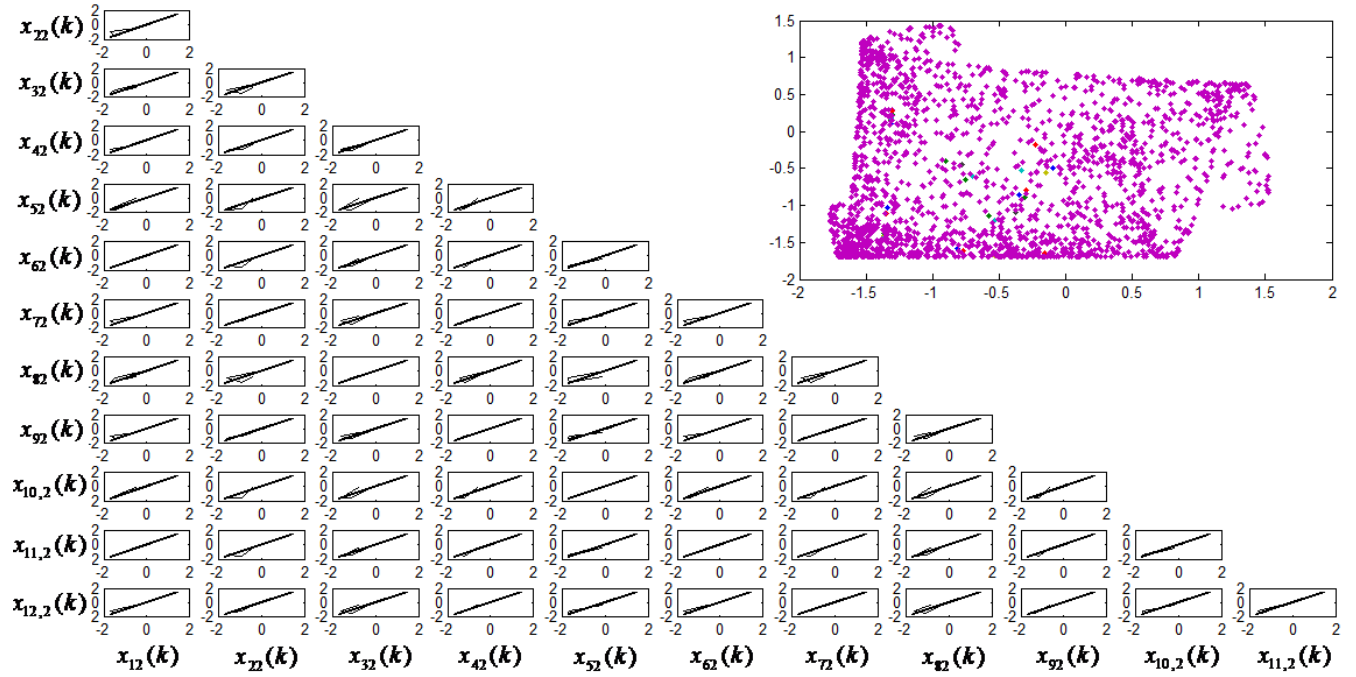


Figura 5.4: (a) Planos de fase de $x_{12}(k)$ vs $x_{22}(k)$; $x_{12}(k)$ vs $x_{32}(k)$; $x_{12}(k)$ vs $x_{42}(k)$; ... ; $x_{11,2}(k)$ vs $x_{12,2}(k)$. (b) Atractor Fold formado por los osciladores sincronizados $x_{i1}(k)$ vs $x_{i2}(k)$ donde $i = 1, 2, \dots, 12$.

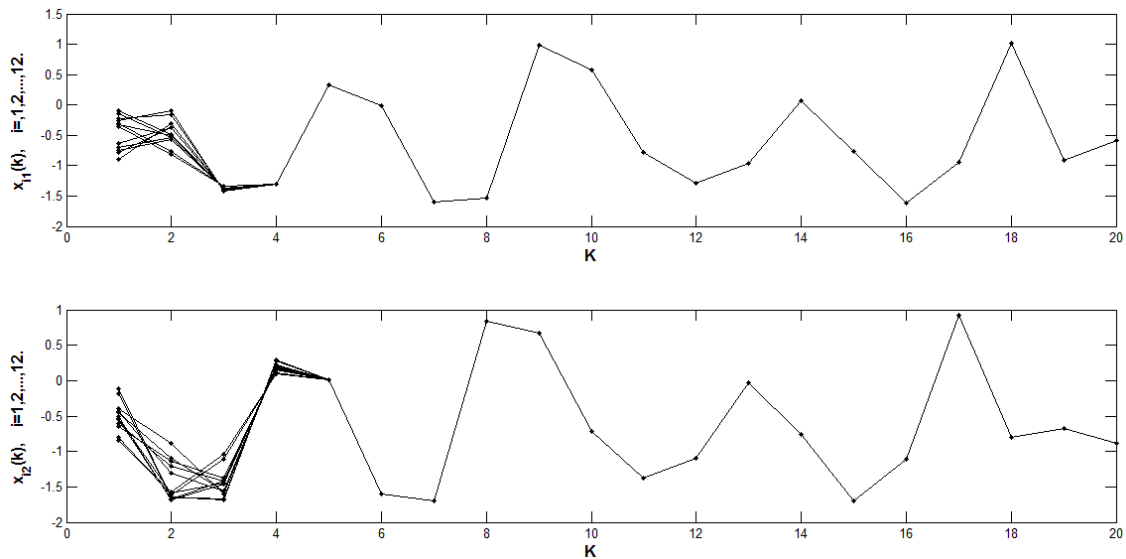


Figura 5.5: Evolución temporal de los estados $x_{i1}(k)$ y $x_{i2}(k)$ sincronizados, donde $i = 1, 2, \dots, 12$.

5.2.2. Sincronización de una red acoplada en anillo formada por osciladores de un sistema de segundo orden

Considere la red anillo formada por 10 osciladores discretos como se muestra en la figura 5.6.

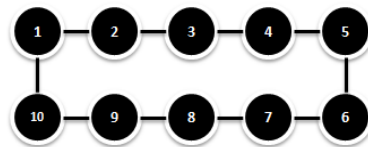


Figura 5.6: Red anillo compuesta por 10 osciladores de segundo orden.

Los osciladores de la red están formados por sistemas hipercaóticos discretos de segundo orden,

cuyas ecuaciones no lineales se expresan como:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= 1.9x_1(k) - x_1^3(k) + x_2(k), \\ x_2(k+1) &= 0.5x_1(k), \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

con estos valores en los parámetros, el sistema presenta comportamiento hipercaótico [51]. La figura 5.7 muestra el atractor hipercaótico del sistema (5.2.6) en el espacio de estados.

Se mostrará la sincronización de la red anillo 5.6, realizando la sincronía en los osciladores descritos como:

$$osc. i \begin{cases} x_{i1}(k+1) = 1.9x_{i1}(k) - x_{i1}^3(k) + x_{i2}(k) + u_i(k), \\ x_{i2}(k+1) = 0.5x_{i1}(k), \end{cases} \quad \text{donde } i = 1, 2, \dots, 10. \quad (5.2.7)$$

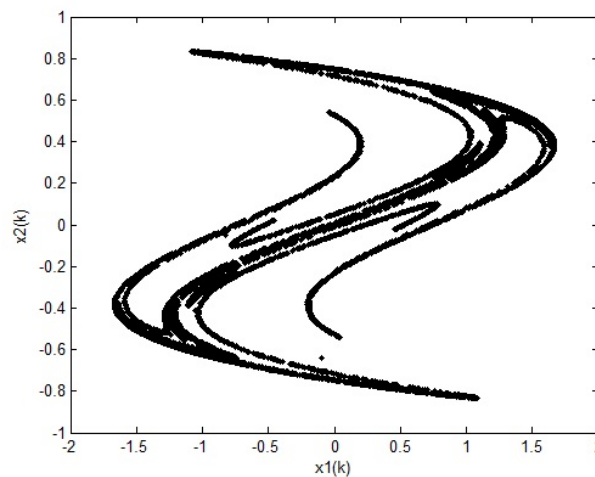


Figura 5.7: Atractor hipercaótico del sistema (5.2.6).

La matriz de acoplamiento calculada con la ecuación (5.1.3) u obteniendo la matriz Laplaciana

$L(G)=D(G)-A(G)$ según (3.4.2), queda de la forma:

$$A_{nc} = L(G) = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & K & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & K \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.2.8)$$

siendo $K = 4$, la matriz Laplaciana queda simplificada:

$$A_{nc} = L(G) = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}. \quad (5.2.9)$$

Utilizando la ecuación 5.1.2, obtenemos las leyes de control para cada oscilador, quedando como:

$$u_i(k) = c \sum_{j=1}^{12} A_{nc} \Gamma x_{j1}, \quad i = 1, 2, \dots, 10, \quad (5.2.10)$$

donde $\Gamma = \mathbf{I}_{12}$.

Para calcular el valor correcto de la fuerza de acoplamiento (c), obtendremos que $\bar{d} = -2$ cumpliendo con la ecuación (5.1.9) y así calculando una $c = 0.39$ con (5.1.10) para obtener sincronización entre todos los osciladores de la red.

Las condiciones iniciales para los osciladores en la red son: $x_1(1) = (0.1, 0.2)$; $x_2(1) = (0.23, 0.11)$; $x_3(1) = (0.15, 0.3)$; $x_4(1) = (0.7, 0.09)$; $x_5(1) = (0.41, 0.4)$; $x_6(1) = (0.15, 0.25)$; $x_7(1) = (0.28, 0.16)$; $x_8(1) = (0.17, 0.35)$; $x_9(1) = (0.75, 0.12)$; $x_{10}(1) = (0.41, 0.45)$.

En las figuras 5.8 y 5.9 se presentan los planos de fase de los osciladores que componen la red, figura 5.5 muestra las trayectorias de los sistemas, observando que después de el transitorio todos los estados de los osciladores se sincronizan, obteniendo sincronización completa.

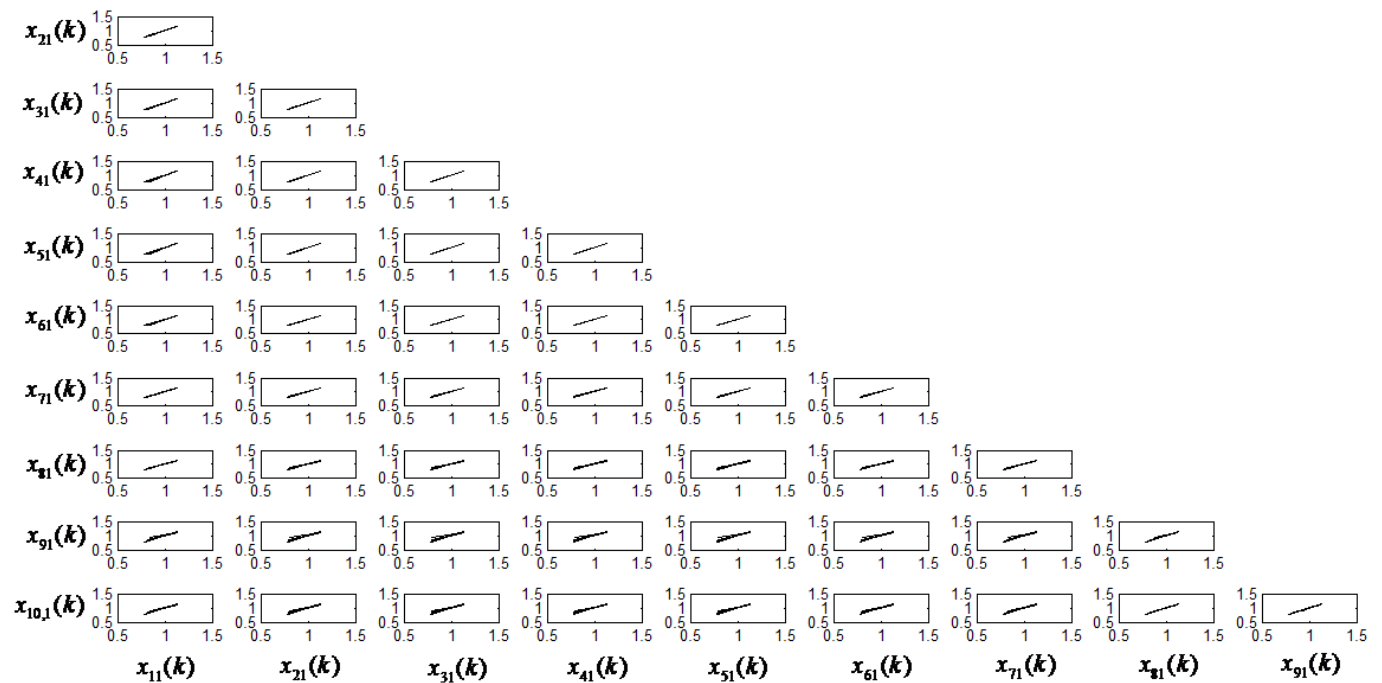


Figura 5.8: Planos de fase de $x_{11}(k)$ vs $x_{21}(k)$; $x_{11}(k)$ vs $x_{31}(k)$; $x_{11}(k)$ vs $x_{41}(k)$; ... ; $x_{91}(k)$ vs $x_{10,1}(k)$.

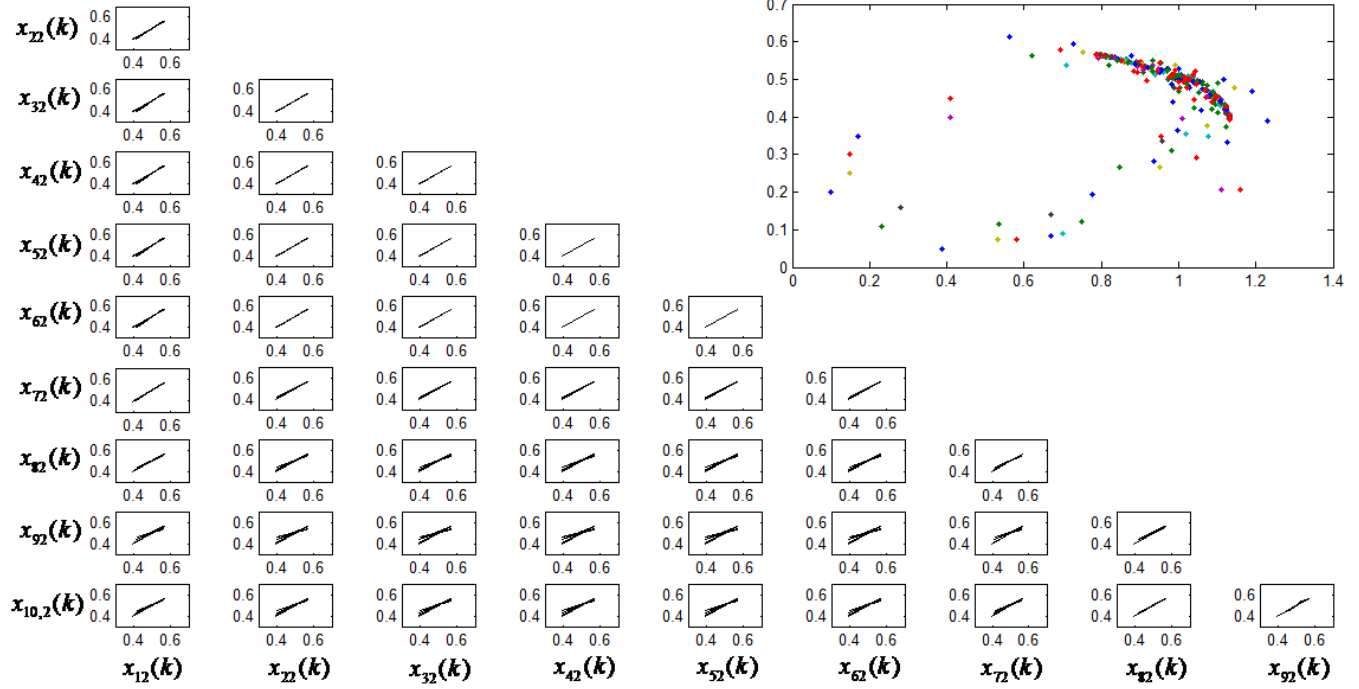


Figura 5.9: (a) Planos de fase de $x_{12}(k)$ vs $x_{22}(k)$; $x_{12}(k)$ vs $x_{32}(k)$; $x_{12}(k)$ vs $x_{42}(k)$; ... ; $x_{92}(k)$ vs $x_{10,2}(k)$. (b) Atractor formado por los osciladores sincronizados $x_{i1}(k)$ vs $x_{i2}(k)$ donde $i = 1, 2, \dots, 10$.

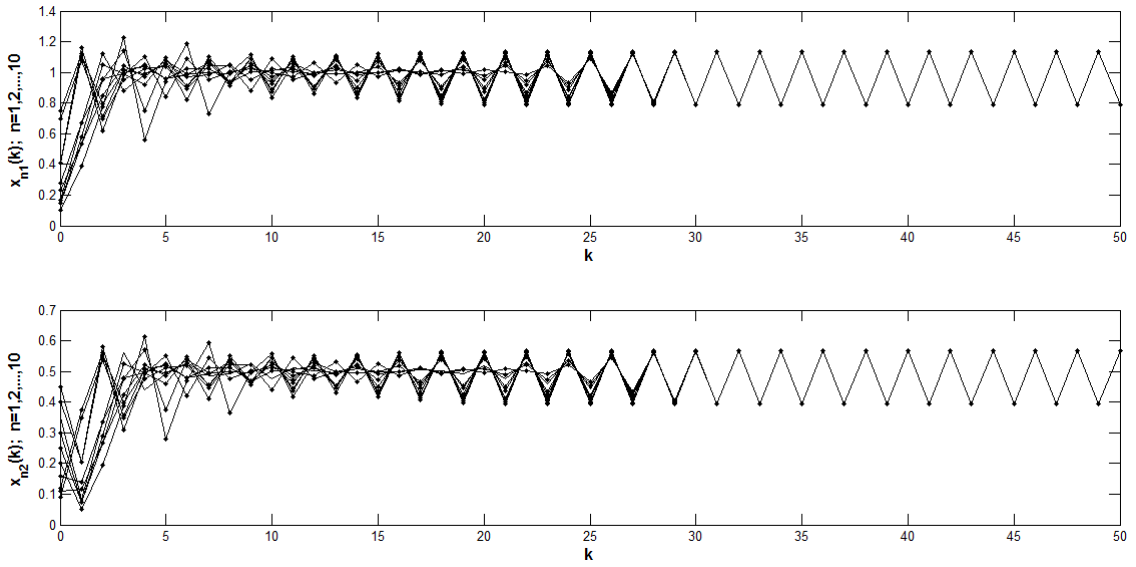


Figura 5.10: Evolución temporal de los estados $x_{i1}(k)$ y $x_{i2}(k)$ sincronizados, donde $i = 1, 2, \dots, 10$.

5.2.3. Sincronización de una red acoplada en estrella formada por osciladores Gingerbreadman

Considere la siguiente red regular con configuración estrella formada por 9 osciladores que se presenta en la figura 5.11.

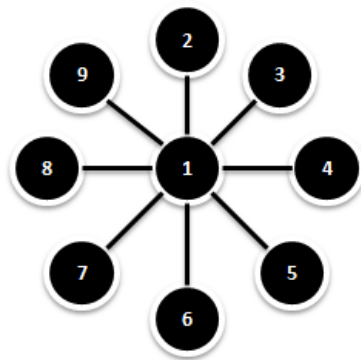


Figura 5.11: Red regular con acoplamiento estrella formada por 9 osciladores.

Los osciladores de la red están formados por sistemas caóticos discretos Gingerbreadman, descritos por las siguientes ecuaciones no lineales:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= 1 - x_2(k) + |x_1(k)|, \\ x_2(k+1) &= x_1(k), \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

se sabe que el sistema (5.2.11) para ciertos valores de parámetros exhibe una dinámica caótica [52]. La figura 5.12 muestra el atractor caótico del sistema (5.2.11) en el espacio de estados. Utilizando la metodología de matriz de acoplamiento, a continuación los osciladores en la red quedarán representados de la siguiente manera:

$$\text{osc. } i \begin{cases} x_{i1}(k+1) = 1 - x_{i2}(k) + |x_{i1}(k)|, \\ x_{i2}(k+1) = x_{i1}(k) + u_i(k), \end{cases} \quad \text{donde } i = 1, 2, \dots, 9. \quad (5.2.12)$$

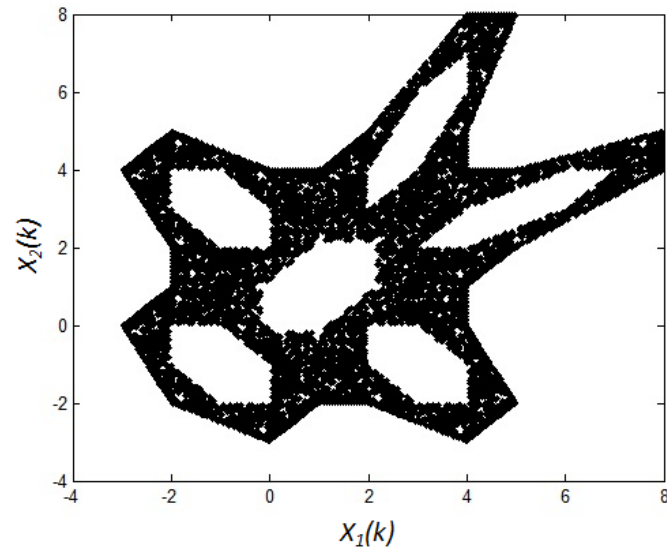


Figura 5.12: Atractor caótico del sistema Gingerbreadman.

Con la ecuación (5.1.3) se obtiene la matriz de acoplamiento o sustituyendo los datos de la red estrella en la matriz Laplaciana presentada en la ecuación (3.5), obtenemos:

$$A_{sc} = L(G) = \begin{bmatrix} -8 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1. \end{bmatrix} \quad (5.2.13)$$

Utilizando la ecuación 5.1.2 pasamos a obtener las leyes de control para cada oscilador, teniendo:

$$u_i(k) = c \sum_{j=1}^{12} A_{sc} \Gamma x_{j1}, \quad i = 1, 2, \dots, 9, \quad (5.2.14)$$

donde $\Gamma = \mathbf{I}_9$.

Las leyes de control obtenidas de (5.2.14) garantizan que los osciladores de la red se sincronicen. El valor de la fuerza de acoplamiento calculado de la ecuación (5.1.10) es $c = 0.09$ para poder lograr la sincronización en la red.

Las condiciones iniciales de cada oscilador son: $x_1(1) = (-0.2, -0.3)$; $x_2(1) = (-0.1, 0.4)$; $x_3(1) = (0.5, 0.6)$; $x_4(1) = (0.7, 0.8)$; $x_5(1) = (0.9, 0.35)$; $x_6(1) = (0.25, -0.15)$; $x_7(1) = (0.45, 0.55)$; $x_8(1) = (0.65, 0.75)$; $x_9(1) = (0.65, 0.72)$.

En las figuras 5.13 y 5.14 podemos observar sincronización entre cada uno de los estados de los osciladores en los planos de fase. También en la figura 5.15, se muestran las dinámicas de sus trayectorias en sincronía.

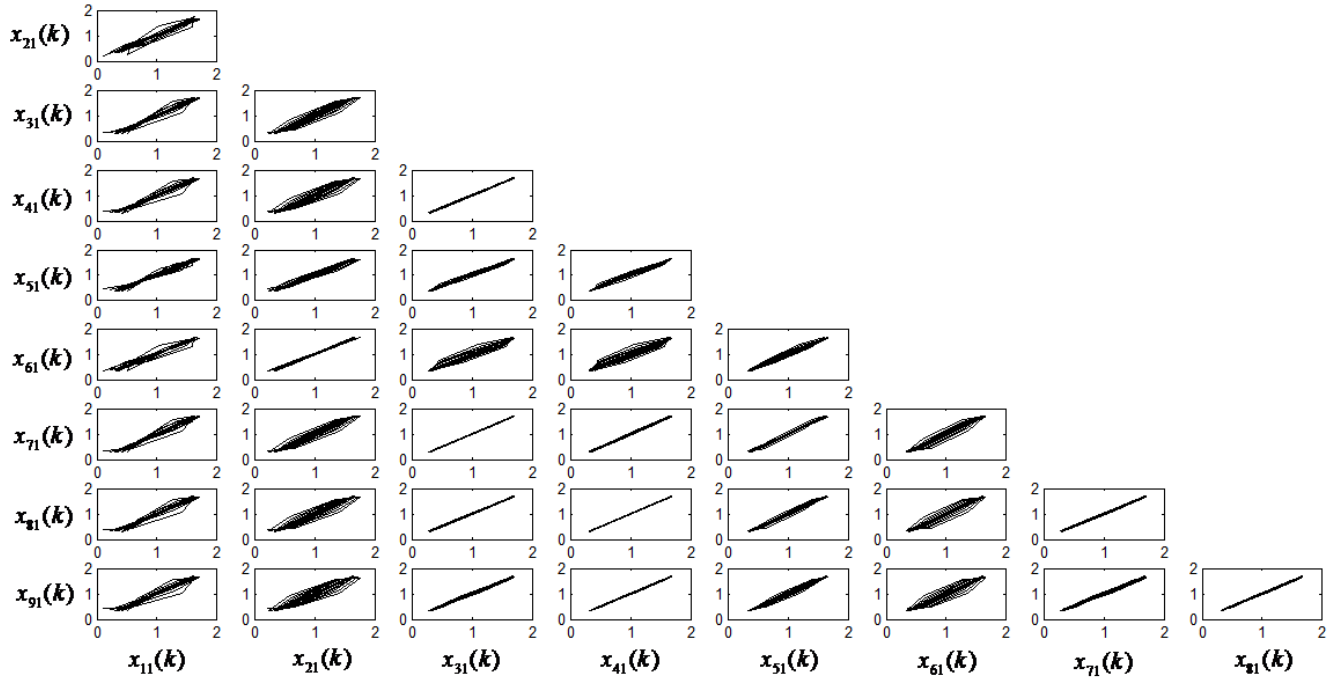


Figura 5.13: Planos de fase de $x_{11}(k)$ vs $x_{21}(k)$; $x_{11}(k)$ vs $x_{31}(k)$; $x_{11}(k)$ vs $x_{41}(k)$; ... ; $x_{81}(k)$ vs $x_{91}(k)$.

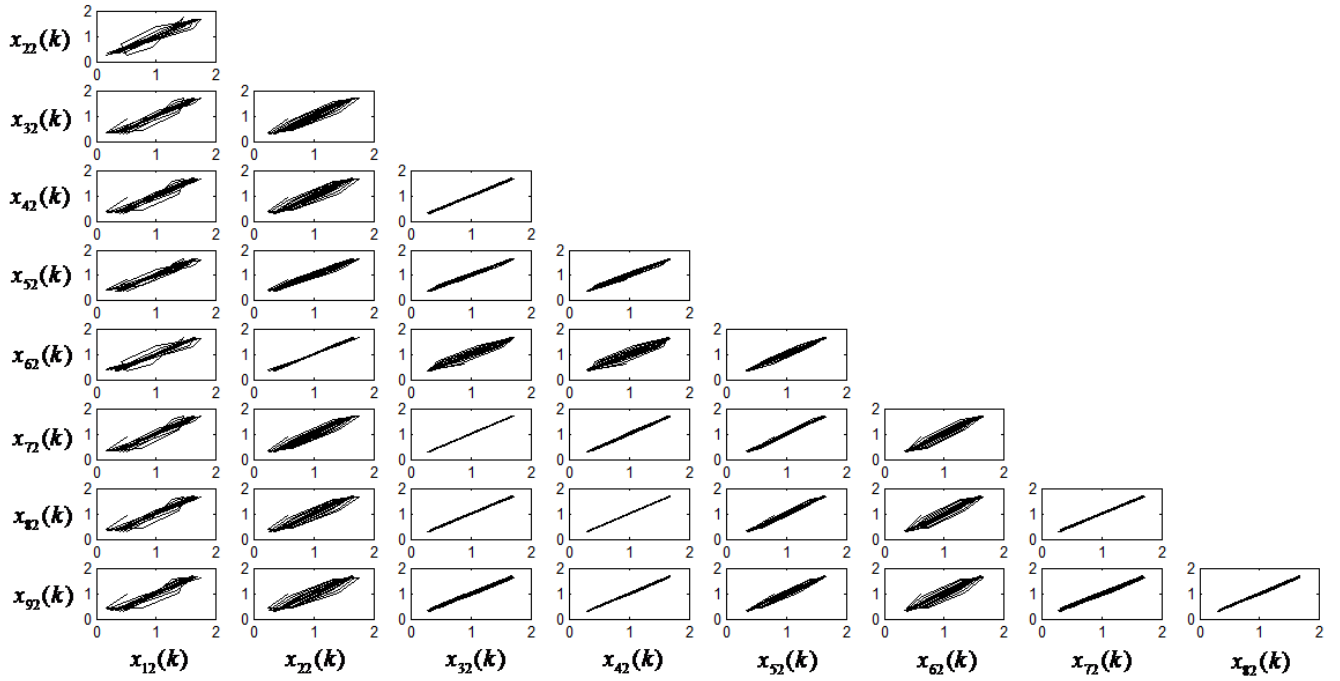


Figura 5.14: Planos de fase de $x_{12}(k)$ vs $x_{22}(k)$; $x_{12}(k)$ vs $x_{32}(k)$; $x_{12}(k)$ vs $x_{42}(k)$; ... ; $x_{82}(k)$ vs $x_{92}(k)$.

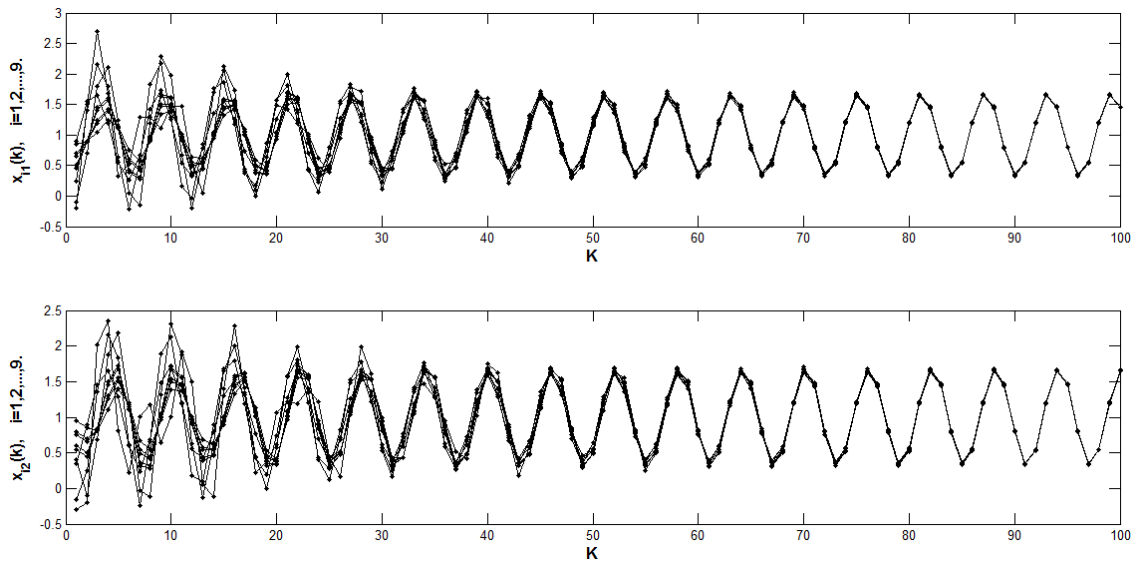


Figura 5.15: Evolución temporal de los estados $x_{i1}(k)$ y $x_{i2}(k)$ sincronizados, donde $i = 1, 2, \dots, 9$.

5.2.4. Sincronización de una red irregular formada por osciladores Tinkerbell

Supongamos que tenemos una red en topología irregular formada por 8 osciladores conectados por aleatoriamente por un usuario como se observa en la figura 5.16.

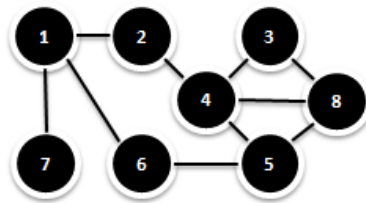


Figura 5.16: Red irregular formada por 8 osciladores.

Los osciladores de la red están formados por el sistema caótico discreto Tinkerbell, cuyo sistema

está descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1^2(k) - x_2^2(k) + ax_1(k) + bx_2, \\ x_2(k+1) &= 2x_1(k)x_2(k) + dx_1(k) + fx_2(k), \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

donde se conocen los parámetros del oscilador para que tenga un comportamiento caótico [36], son: $a = 0.9$, $b = -0.6013$, $d = 2$, $f = 0.5$. La figura 5.17 muestra el atractor caótico del sistema (5.2.15) en el espacio de estados. La representación de los osciladores en la red quedarán representados de la manera siguiente:

$$\text{osc. } i \begin{cases} x_{i1}(k+1) = x_{i1}^2(k) - x_{i2}^2(k) + ax_{i1}(k) + bx_{i2}, \\ x_{i2}(k+1) = 2x_{i1}(k)x_{i2}(k) + dx_{i1}(k) + fx_{i2}(k) + u_i(k), \end{cases} \quad \text{donde } i = 1, 2, \dots, 8. \quad (5.2.16)$$

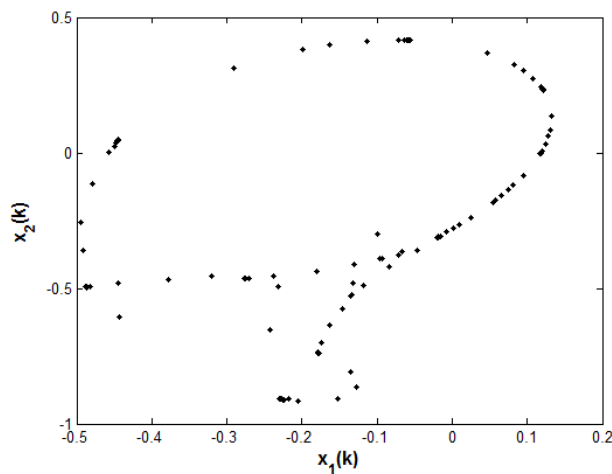


Figura 5.17: Atractor caótico del sistema (5.2.15).

Siguiendo el material presentado en la sección de topología irregular (3.3.3), obtenemos la matriz

de acoplamiento $L(G)=D(G)-A(G)$ de la red irregular 5.16 como sigue:

$$A_{ic} = L(G) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad (5.2.17)$$

Utilizando la ecuación 5.1.2 obtenemos las leyes de control para cada oscilador de la red, teniendo:

$$u_i(k) = c \sum_{j=1}^{12} A_{ic} \Gamma x_{j1}, \quad i = 1, 2, \dots, 8, \quad (5.2.18)$$

donde $\Gamma = \mathbf{I}_8$.

Calculamos el valor de la fuerza de acoplamiento con la ecuación (5.1.10), obteniendo una $c = 0.226$ y con las leyes de control (5.2.18) garantizamos la sincronización en la red irregular.

Las condiciones iniciales de cada oscilador son: $x_1(1) = (-0.1, -0.3)$; $x_2(1) = (-0.53, -0.48)$; $x_3(1) = (-0.15, -0.3)$; $x_4(1) = (-0.5, -0.09)$; $x_5(1) = (-0.41, -0.35)$; $x_6(1) = (-0.21, -0.28)$; $x_7(1) = (-0.05, -0.2)$; $x_8(1) = (-0.16, -0.12)$.

En las figuras 5.18 y 5.19 se presentan los planos de fase observando sincronización entre cada uno de los estados de los osciladores. Las dinámicas de las trayectorias de los estados sincronizados x_{i1} y x_{i2} donde $i = 1, 2, \dots, 8$ se presentan en la figura 5.20.

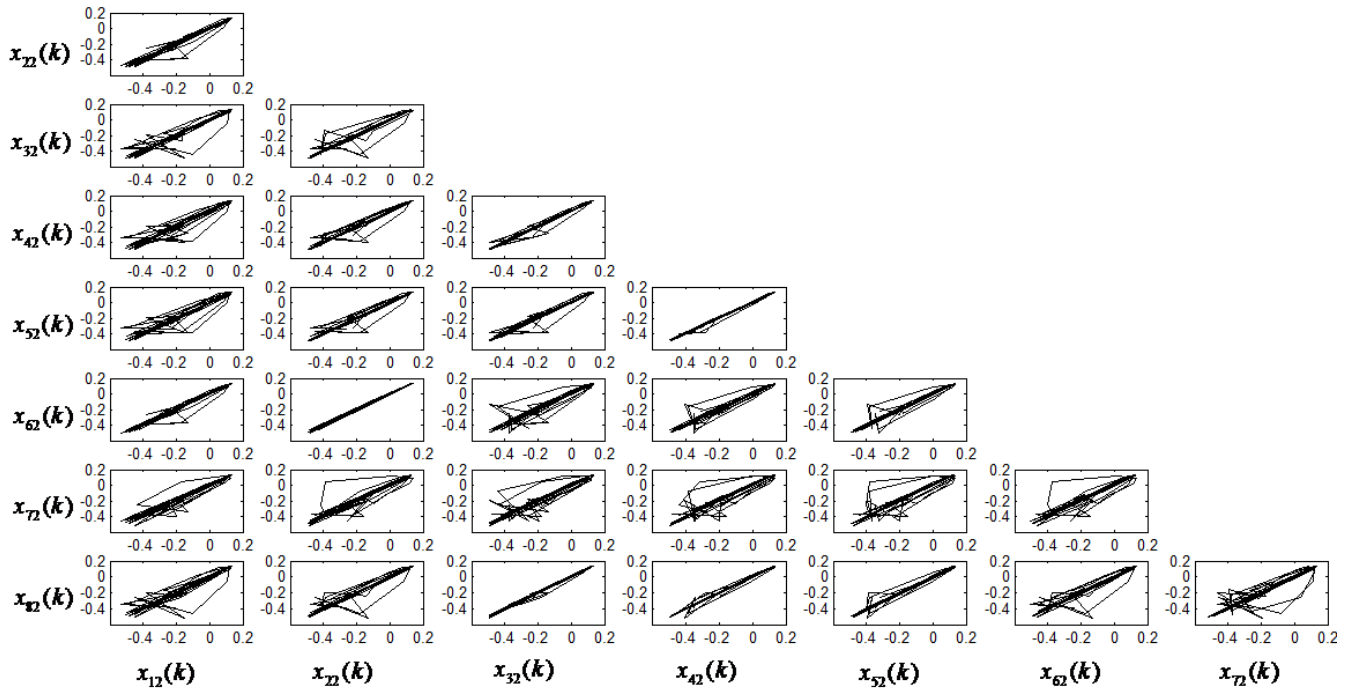


Figura 5.18: Planos de fase de $x_{11}(k)$ vs $x_{21}(k)$; $x_{11}(k)$ vs $x_{31}(k)$; $x_{11}(k)$ vs $x_{41}(k)$; ... ; $x_{71}(k)$ vs $x_{81}(k)$.

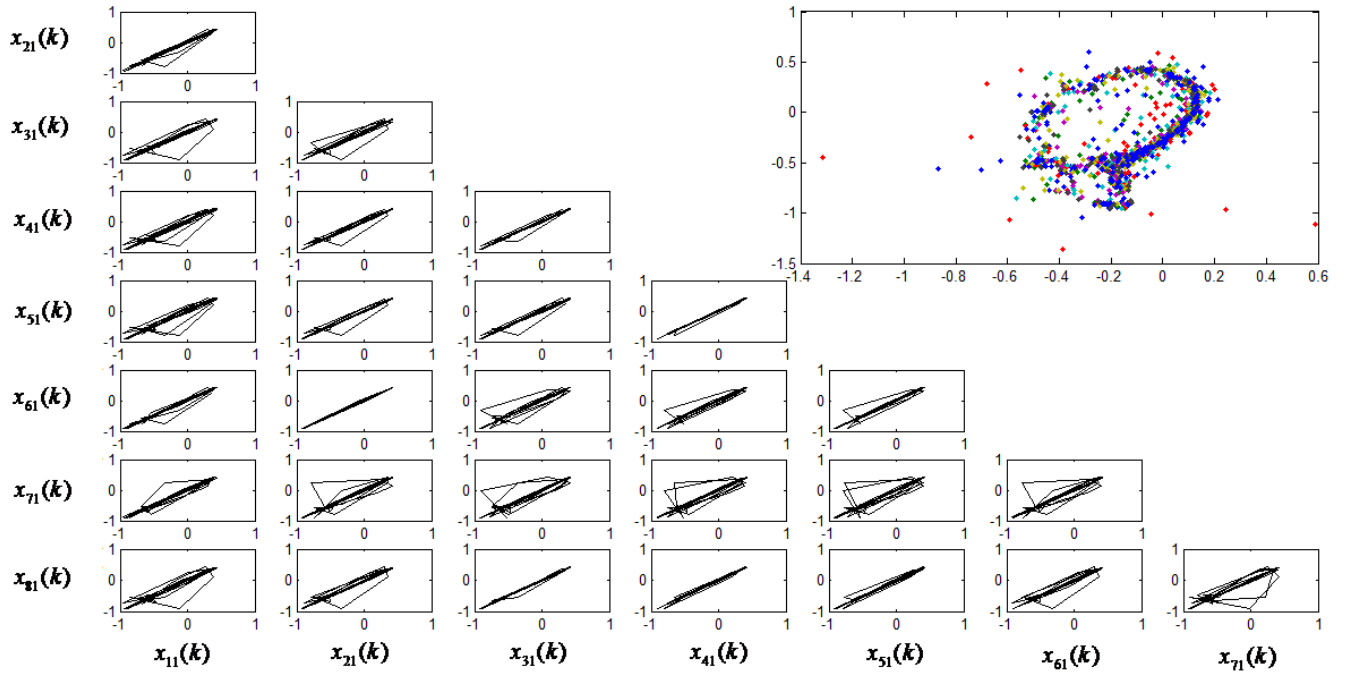


Figura 5.19: (a) Planos de fase de $x_{12}(k)$ vs $x_{22}(k)$; $x_{12}(k)$ vs $x_{32}(k)$; $x_{12}(k)$ vs $x_{42}(k)$; ... ; $x_{72}(k)$ vs $x_{82}(k)$. (b) Atractor formado por los osciladores sincronizados $x_{i1}(k)$ vs $x_{i2}(k)$ donde $i = 1, 2, \dots, 8$

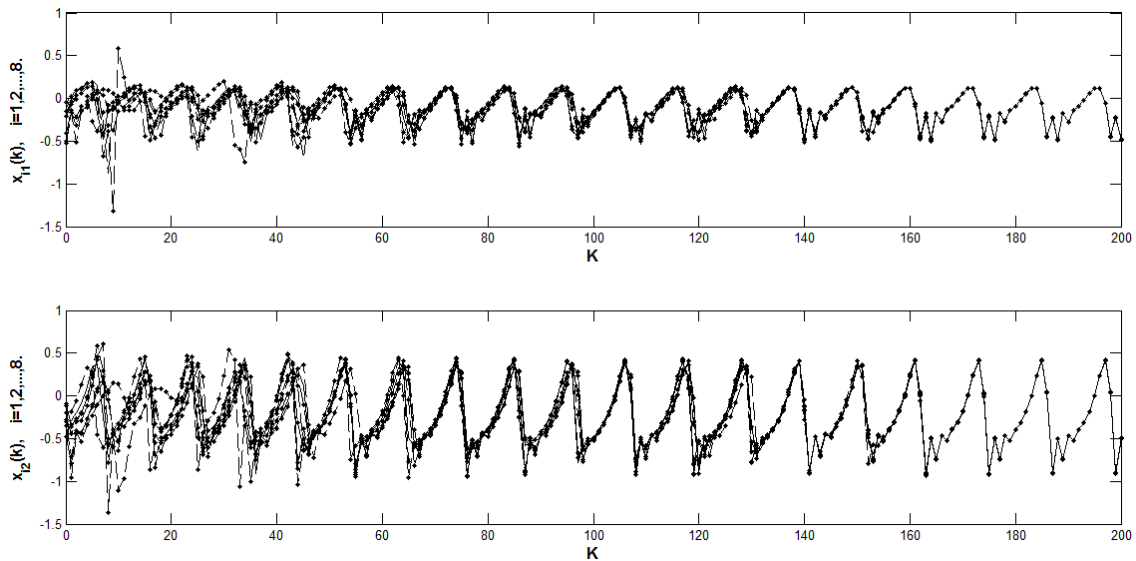


Figura 5.20: Evolución temporal de los estados $x_{i1}(k)$ y $x_{i2}(k)$ sincronizados, donde $i = 1, 2, \dots, 8$.

Con la metodología presentada en esta sección y con los ejemplos propuestos, fue posible obtener *sincronización completa* en las diferentes redes presentadas en sus diferentes topologías. Con la metodología de matriz de acoplamiento es posible sincronizar osciladores caóticos discretos acoplados en diferentes topologías de acoplamiento, si y sólo si, cumplen con los teoremas y condiciones descritos en este capítulo.

Con los resultados de sincronización de redes con esta metodología, en el siguiente capítulo presentaremos algunas redes en sincronía con este tipo de osciladores aplicadas al encriptamiento de información.

Capítulo 6

Cifrado de información usando caos

6.1. Introducción

Se ha tratado la sincronización de redes formadas por osciladores discretos idénticos, a través de metodologías de control presentadas en las secciones anteriores (acoplamiento a modelos y matriz de acoplamiento). Resulta, ahora atractivo y motivante llevar esto al escenario de la aplicación a las comunicaciones seguras o privadas usando dicha sincronía en una red. Este capítulo se dedica al encriptamiento de información usando caos.

El encriptado es una forma efectiva de disminuir los riesgos en el uso de tecnología. Implica la codificación de información que puede ser transmitida vía una red de cómputo o un disco para que solo el emisor y el receptor la puedan leer. En teoría, cualquier tipo de información computarizada puede ser encriptada. En la práctica, se le utiliza con mayor frecuencia cuando la información se transmite por correo electrónico o internet. La información es encriptada por el emisor utilizando un programa para “confundir u ocultar” la información utilizando un código “asegurado”. El receptor descifra la información utilizando un código exclusivo. Cualquier persona que intercepte el mensaje verá simplemente información entremezclada que no tendrá ningún sentido sin el código o llave

necesaria.

El encriptamiento de información tiene distintos usos para propósitos electorales. Cuando se envía información sensible a través de una red pública, es recomendable encriptarla: Esto es particularmente importante cuando se envía información personal o sobre la votación a través de una red, en especial por internet o correo electrónico. Existen distintos tipos de encriptamiento y distintos niveles de complejidad para hacerlo. Como con cualquier código, los de encriptamiento pueden ser rotos si se cuenta con tiempo y recursos suficientes. Los altamente sofisticados niveles de encriptamiento con que se cuenta hoy en día hacen muy difícil descifrar la información encriptada. En años recientes, se ha tratado el tema de encriptar datos por medio del uso de la teoría del caos [54], [55]. Para esto, retomaremos algunos esquemas básicos de transmisión, propuestos en las últimas décadas. Los métodos reportados para encriptar información con base en la sincronía de osciladores caóticos son:

- **Encriptado caótico aditivo [53]:** El mensaje a encriptar $f(k)$ se suma a la señal de transmisión $x(k)$ y emplear una sola línea para enviar la señal de transmisión $y(k) = x(k) + f(k)$. Si los osciladores caóticos se sincronizan, el mensaje oculto se recupera mediante la diferencia de la salida (estado acoplante) de ambos osciladores, es decir, $y(k) - \hat{y}(k) = e(k) = \hat{f}(k)$. En la figura 6.1 se muestra un esquema de este tipo de encriptamiento.

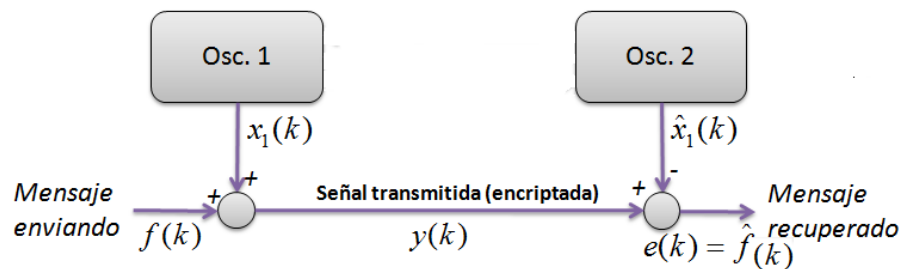


Figura 6.1: Esquema de encriptado aditivo empleando dos canales de transmisión.

- **Encriptado por modulación caótica:** El mensaje se encripta en las dinámicas del transmisor por una función de modulación. En los receptores se emplea una estructura que permite que el mensaje se pueda recuperar a través de la función inversa. En la figura 6.2 se observa el esquema de este tipo de encriptado.

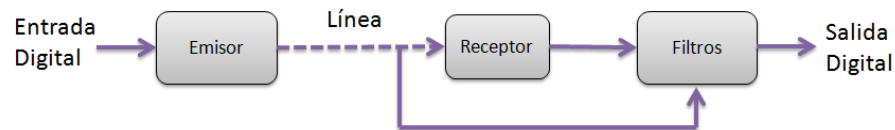


Figura 6.2: Esquema de encriptado por modulación.

- **Encriptado por conmutación entre atractores caóticos:** Consiste en seleccionar uno o más parámetros del oscilador transmisor y alternarlos entre dos valores distintos r y \hat{r} (se utiliza para encriptar sólomente señales binarias), verificando que el transmisor se mantenga funcionando en régimen caótico todo el tiempo. Ésto hará que el oscilador transmisor se encuentre conmutando entre dos atractores caóticos distintos. En los osciladores receptores se mantiene fijo el conjunto de valores de parámetros r y esto provoca que en un intervalo de tiempo, los dos osciladores estén sincronizados y en otro no. En la figura 6.3 se muestra un esquema de este tipo de encriptamiento.

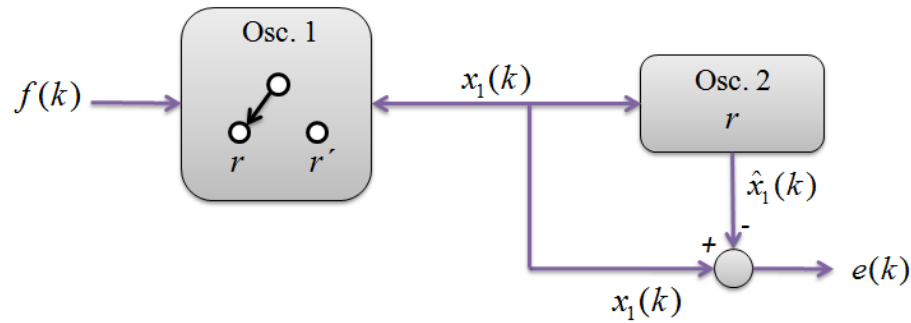


Figura 6.3: Esquema de transmisión de información empleando conmutación caótica.

Este capítulo está dedicado a la transmisión de información encriptada usando caos. En particular, usaremos únicamente la sincronización de redes formada por osciladores caóticos discretos, aplicando el método de encriptamiento aditivo con dos líneas de transmisión.

6.2. Encriptamiento caótico aditivo usando dos líneas de transmisión

Para ilustrar el esquema propuesto para enviar señales de información encriptadas, se diseña a continuación un sistema de encriptamiento utilizando dos canales de transmisión. Este sistema está basado en la sincronización completa o de salida entre los osciladores caóticos idénticos utilizando matriz de acoplamiento. Para este propósito, considere la ley de control $u(k)$ descrita en el capítulo anterior como:

$$u(k) = c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (6.2.1)$$

cuyos parámetros se describen en (5.1.2).

Esta ley de control (6.2.1) permite proponer el esquema de encriptamiento que se muestra en la figura 6.4.

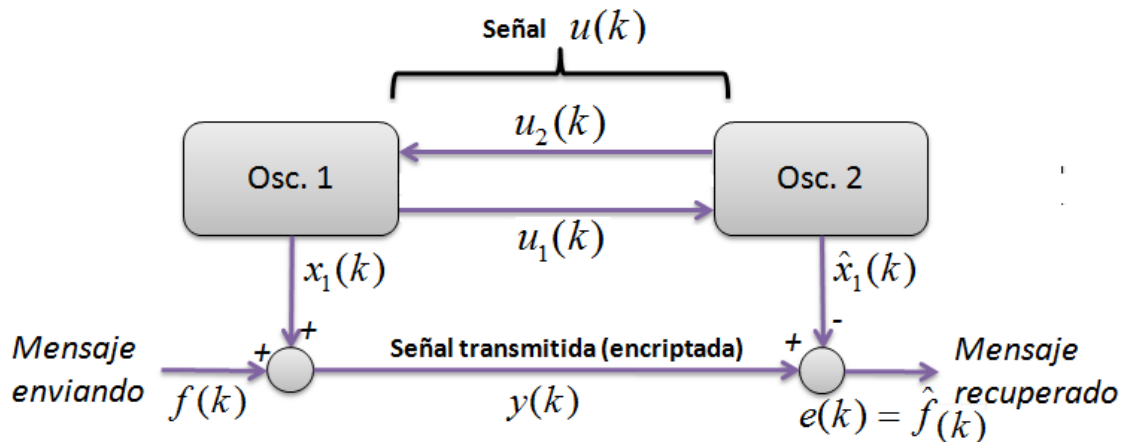


Figura 6.4: Esquema de encriptamiento aditivo empleando dos canales de transmisión basado en la sincronía de matriz de acoplamiento.

En la cual $u_1(k)$ es la señal de control del bloque *Osc. 1*, $u_2(k)$ es la señal de control del bloque *Osc. 2*, los osciladores que componen la red serán bidireccionales, o si es el caso de que exista oscilador aislado dentro de la red, será unidireccional, simplemente $u_1(k)$ sería la salida del *Osc. 1* y $u_2(k)$ la entrada al *Osc. 2*.

Con este esquema, se alcanzan dos objetivos simultáneos: se obtiene sincronización completa de salida eficiente rápida (dependiendo de la ganancia usada en la fuerza de acoplamiento c de (6.2.1)) y alta privacidad para encriptar información.

Se proponen dos canales de transmisión en los osciladores receptores de la red: un canal se usa para enviar la señal de control $u(k)$ con el único propósito de lograr sincronización completa, sin ninguna conexión con los mensajes privados $f(k)$. El otro canal se destina para transmitir el mensaje $f(k)$ encriptado a través de $y(k) = x_1(k) + f(k)$. Este mensaje es reconstruido mediante la comparación entre el estado en sincronía del *Osc. 2* y la señal de transmisión $f(k)$, es decir, $\hat{f}(k) = y(k) - \hat{x}_1(k)$.

A continuación se presentan algunas simulaciones numéricas, que ilustran la transmisión de mensajes encriptados usando el esquema de dos canales de transmisión.

6.2.1. Encriptamiento de una imagen en una red irregular formada por osciladores Fold con oscilador maestro

Considere una red formada de manera aleatoria por un usuario, sabemos que en la actualidad, las redes que nos rodean en el mundo están conectadas en topologías irregulares, sin un patrón definido, en este caso la red queda como en la figura 6.5.

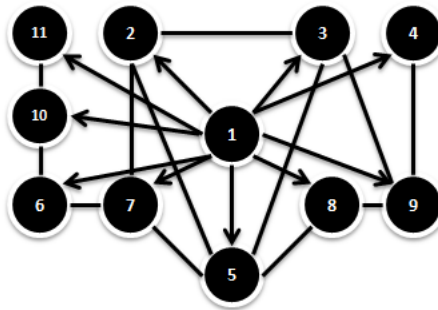


Figura 6.5: Red irregular compuesta por 11 nodos con nodo maestro.

Nótese que la red presentada cuenta con un oscilador maestro que impone su dinámica al resto de los osciladores. El sistema caótico discreto seleccionado es el Fold, cuyas ecuaciones no lineales son:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) + ax_1(k) + u_1, \\ x_2(k+1) &= x_1(k)^2 + b, \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

donde se sabe que los parámetros del oscilador para que tenga un comportamiento caótico son: $a = -0.1$ y $b = -1.7$ [7]. En la figura 6.6 se muestra el atractor caótico del sistema en el espacio de

estados donde se observa el comportamiento caótico del sistema. Con la metodología presentada de matriz de acoplamiento en el capítulo anterior, obtenemos las leyes de control para cada oscilador de la red como en (5.1.2), calculando el valor de fuerza de acoplamiento de $c = 0.265$ para obtener sincronía en los osciladores de la red.

La evolución temporal de los estados en sincronía de cada oscilador se presenta en la figura 6.7.

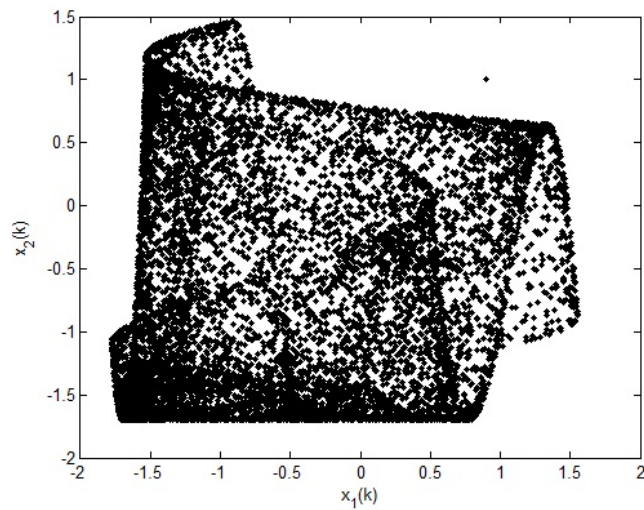


Figura 6.6: Atractor caótico del sistema Fold (6.7).

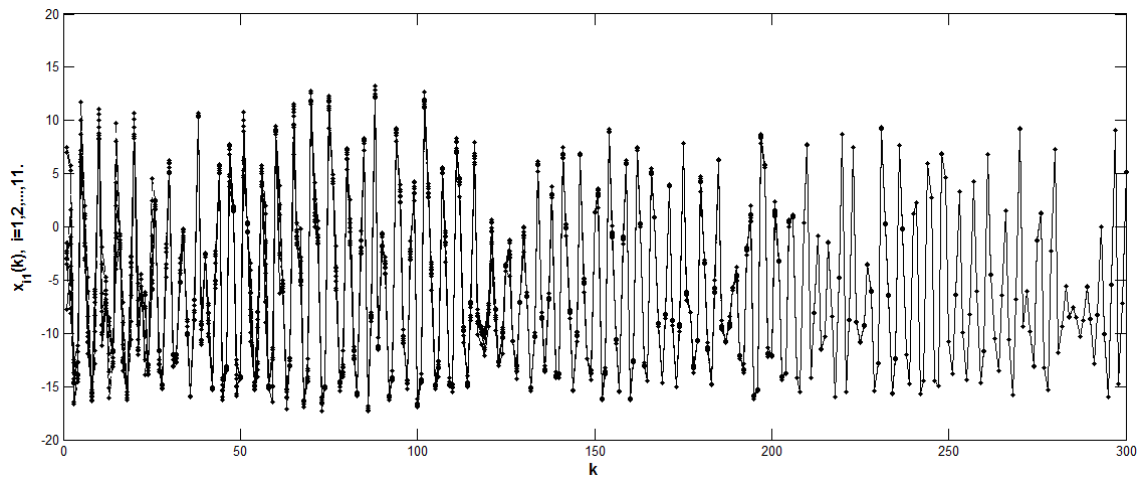


Figura 6.7: Evolución temporal de los estados $x_{i1}(k)$, $x_{21}(k)$, $x_{31}(k)$, ..., $x_{11,1}(k)$ de los osciladores en sincronía.

El mensaje original a transmitir será la imagen mostrada en la figura 6.8 que es la entrada principal de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la UANL en formato .png. La imagen seleccionada no es de alta resolución, ya que lo que nos interesa es la señal de la imagen para poder encriptarla con la señal caótica. Una imagen digital puede mirarse como el resultado de efectuar sobre una señal continua un proceso de muestreo en dos direcciones perpendiculares con un paso o distancia entre muestras que se fija en para cada dirección. La gráfica 6.9 muestra esta señal.



Figura 6.8: Imagen original a encriptar.

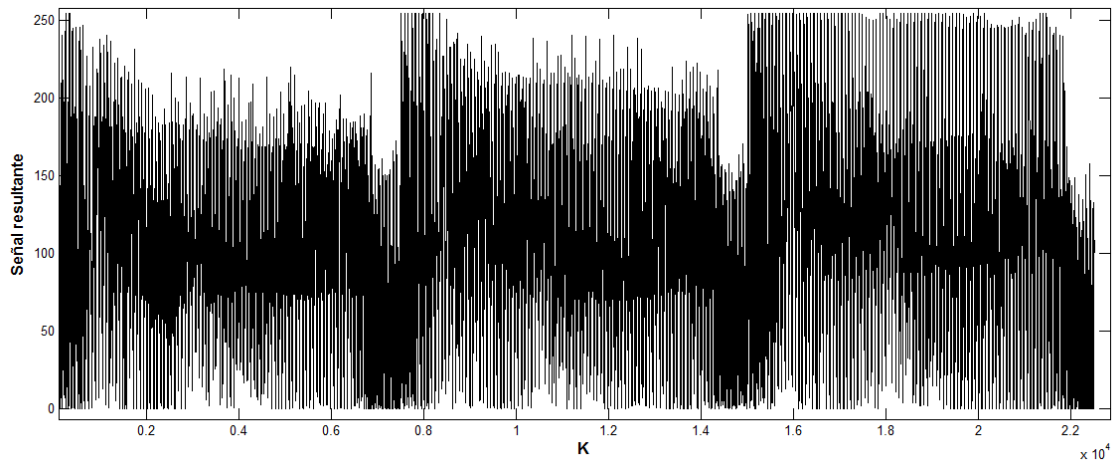


Figura 6.9: Señal de la imagen en muestras.

Comparando la amplitud de ambas señales, la señal caótica $x_1(k)$ contra la señal 6.9 $m_o(k)$, nótese que la amplitud de la señal caótica de la figura 6.7 es muy pequeña para poder ocultar la señal $m_o(k)$, para esto es necesario disminuir la señal $m_o(k)$ dividiéndola por una ganancia, en este caso su valor será 10. En la figura 6.10 se grafican ambas señales para observar la diferencia de amplitud y frecuencia entre ellas. Realizando el encriptamiento aditivo como lo muestra el esquema 6.4, $m_e(k) = x_{i1}(k) + m_o(k)$, encriptaremos la señal $m_o(k)$ de 6.9 con la señal $x_{i1}(k)$ del sistema Fold 6.7, obteniendo como resultado la figura 6.11.

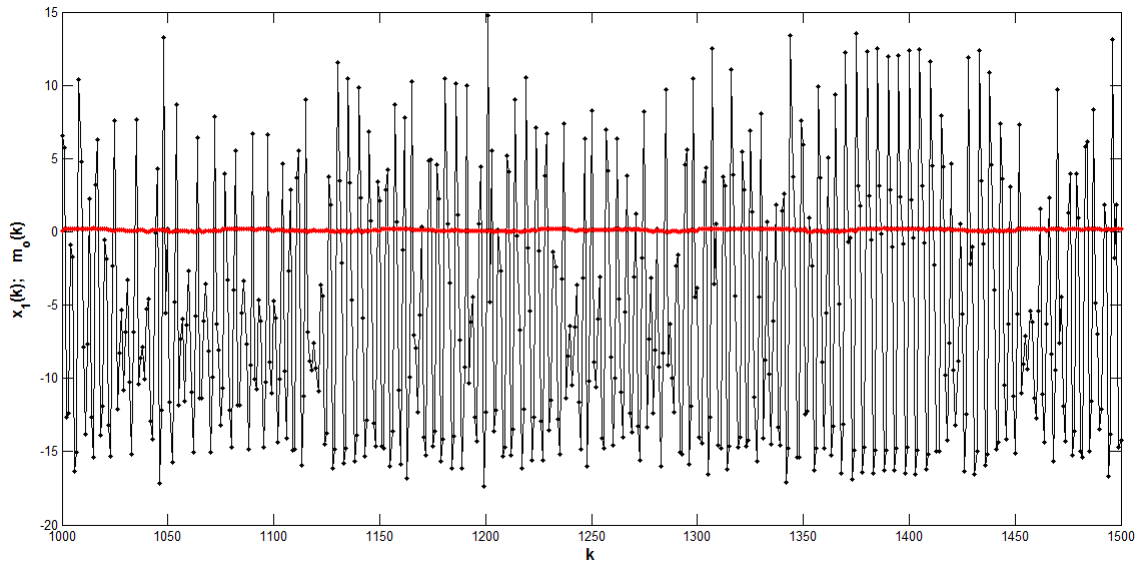


Figura 6.10: Evolución temporal de la señal caótica $x_1(k)$ y la señal de imagen a encriptat $m_o(k)$.

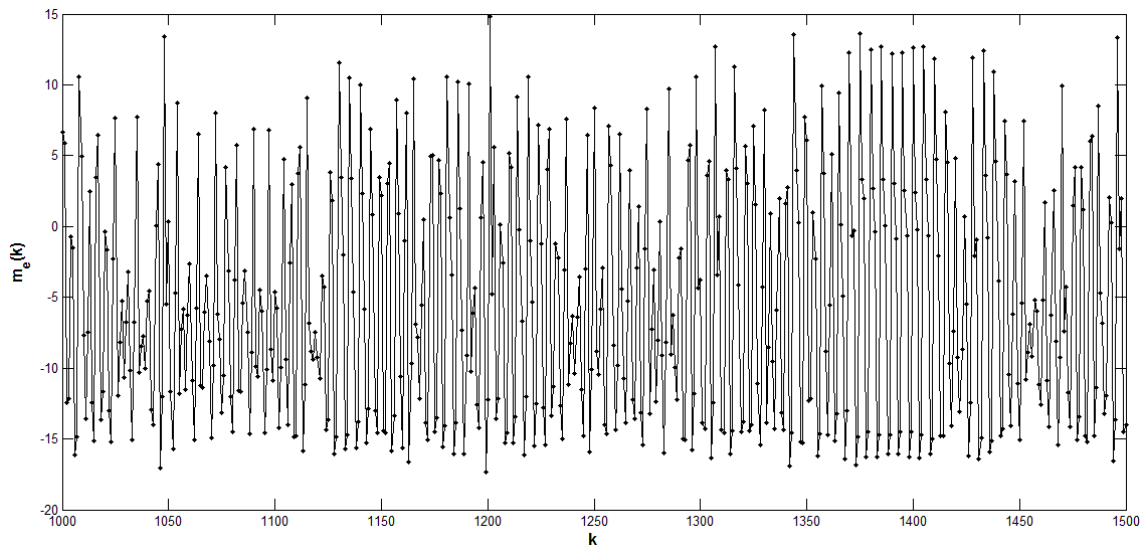


Figura 6.11: Señal de imagen encriptada $m_e(k)$ a través de la señal caótica del sistema (6.7).

Siguiendo el esquema 6.4 presentado en la sección anterior y obteniendo la señal encriptada mostrada en la figura 6.11, la imagen encriptada se muestra en la figura 6.12. Restando la señal de los osciladores que están en sincronía con el oscilador maestro dentro de la red, la señal $\hat{m}_o(k)$ será recuperado en su totalidad en cada oscilador, cumpliendo con la siguiente ecuación:

$$\|m_e(k) - x_{i1}(k)\| = \hat{m}_{oi}(k); \quad i = 3, 4, \dots, 10. \quad (6.2.3)$$

donde: $m_e(k)$ es el mensaje encriptado.

$x_{i1}(k)$, $i = 1, 2, \dots, 11$ son los estados de los osciladores en sincronía.

$\hat{m}_{oi}(k)$, $i = 1, 2, \dots, 11$ es el mensaje original recuperado en cada oscilador.

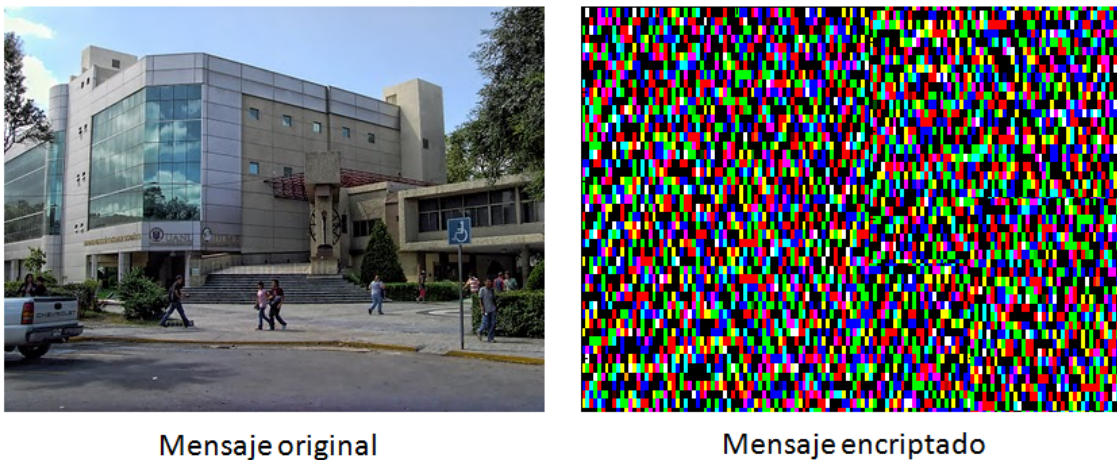


Figura 6.12: (a) Imagen original a transmitir. (b) Imagen encriptada transmitida.

En las figuras 6.13 y 6.14 se muestra la señal de imagen recuperada en cada oscilador. Se verifica que el mensaje transmitido sea igual al mensaje recuperado, tenemos:

$$\|m_e(k) - \hat{m}_{oi}(k)\| \equiv 0; \quad i = 3, 4, \dots, 11. \quad (6.2.4)$$

En las figuras 6.15 y 6.16 se muestra que se cumple lo anterior (6.2.7) convergiendo a cero el error entre señales $m_e(k)$ y $\hat{m}_o(k)$. Observamos que existe un transitorio al inicio de la evolución temporal de las señales de error, ésto es por el tiempo que tarda en sincronizar los osciladores esclavos al oscilador maestro de la red. En la figura 6.17 se obtiene la imagen recuperada del oscilador 3.

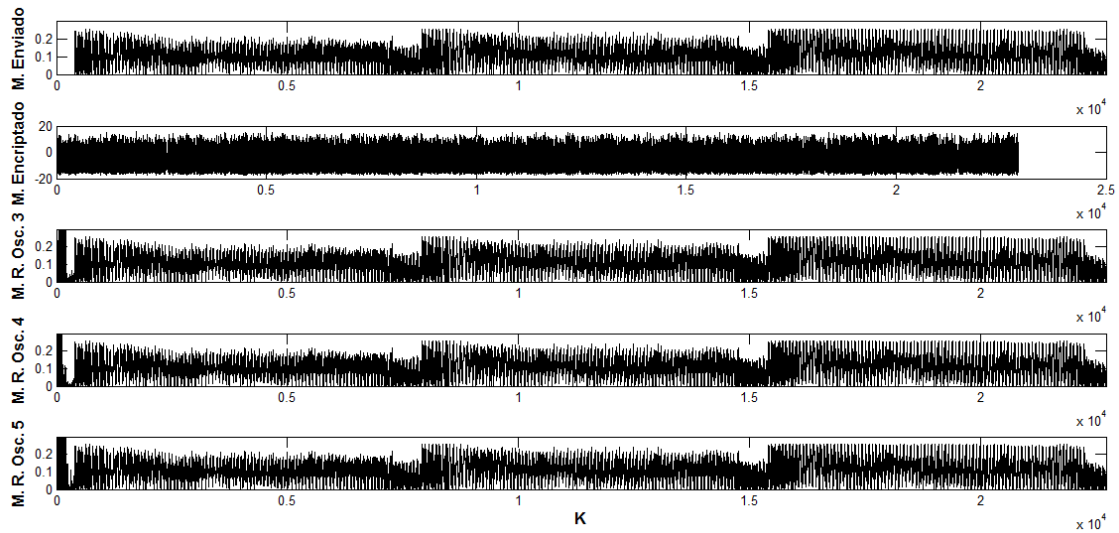


Figura 6.13: (a) Mensaje a transmitir (b) Señal encriptada (c) Mensaje recuperado en osc. 3 (d) Mensaje recuperado en osc. 4 (e) Mensaje recuperado en osc. 5.

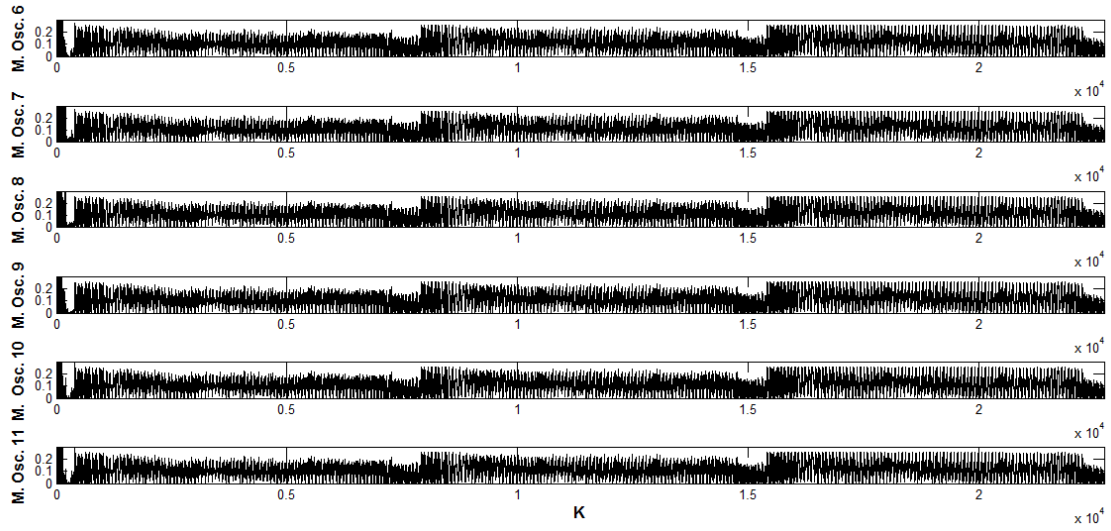


Figura 6.14: (a) Mensaje recuperado en osc. 6 (b) Mensaje recuperado en osc. 7 (c) Mensaje recuperado en osc. 8 (d) Mensaje recuperado en osc. 9 (e) Mensaje recuperado en osc. 10 (f) Mensaje recuperado en osc. 11.

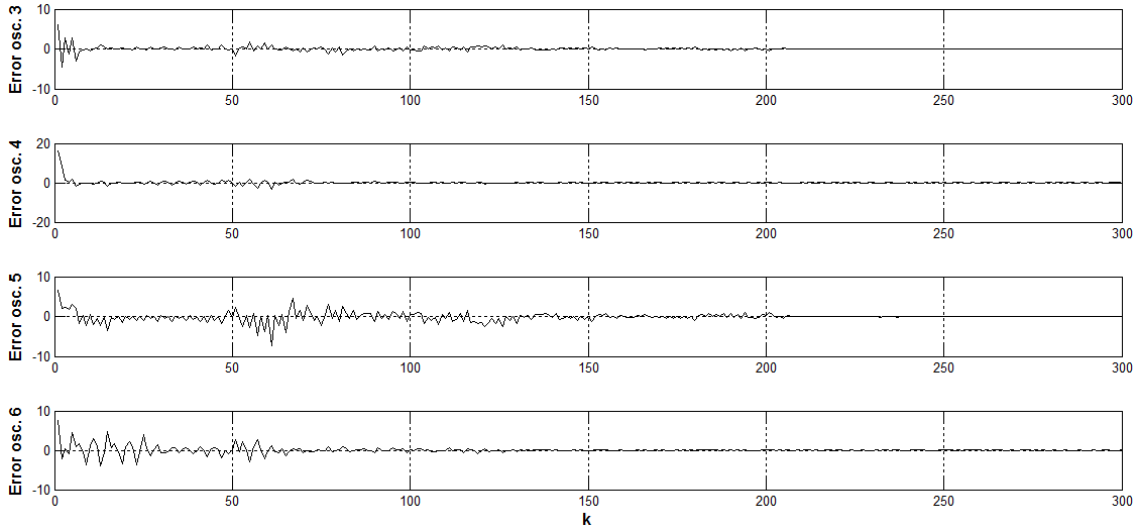


Figura 6.15: Errores de imagen recuperada: $e_3(k) = m_e(k) - \hat{x}_{o3}(k)$, $e_4(k) = m_e(k) - \hat{x}_{o4}(k)$, $e_5(k) = m_e(k) - \hat{x}_{o5}(k)$, $e_6(k) = m_e(k) - \hat{x}_{o6}(k)$.

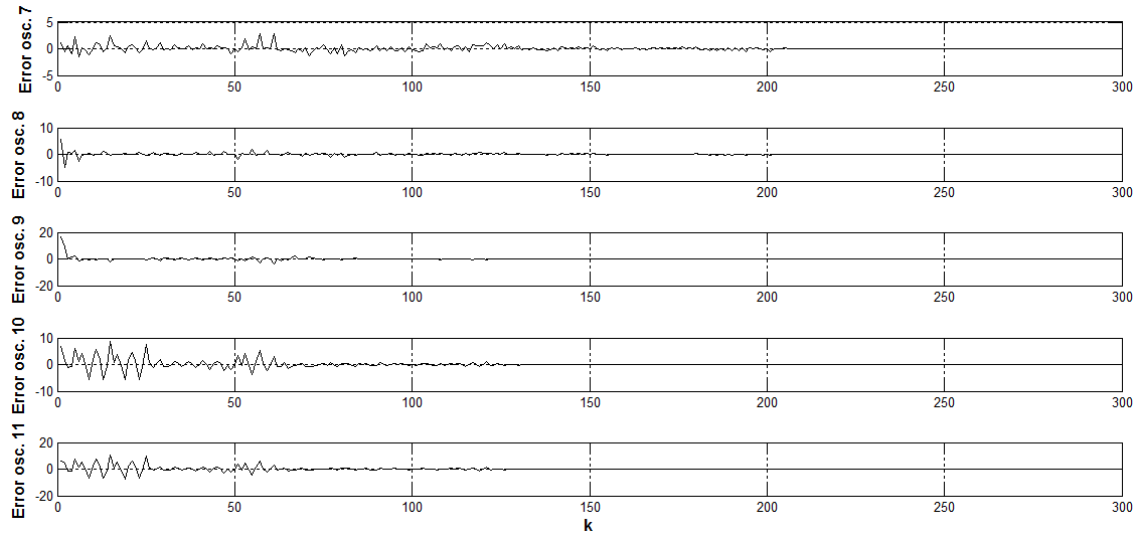


Figura 6.16: Errores de imagen recuperada: $e_7(k) = m_e(k) - \hat{x}_{o7}(k)$, $e_8(k) = m_e(k) - \hat{x}_{o8}(k)$, $e_9(k) = m_e(k) - \hat{x}_{o9}(k)$, $e_{10}(k) = m_e(k) - \hat{x}_{o10}(k)$, $e_{11}(k) = m_e(k) - \hat{x}_{o11}(k)$.



Mensaje recuperado

Figura 6.17: Imagen recuperada.

6.2.2. Encriptamiento de un mensaje de audio en una red irregular formada por osciladores Gingerbreadman

Este sistema está basado en la sincronización completa de una red (podría ser la salida o un estado del oscilador), como lo hemos mencionado en los capítulos anteriores, es necesario que nuestra red esté completamente en sincronía en todos los osciladores para poder obtener la información segura que se transmitirá a través de ella. Para este propósito considere la siguiente red de la figura 6.18.

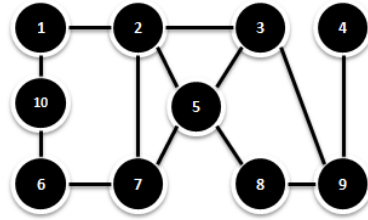


Figura 6.18: Red irregular compuesta por 10 osciladores.

Los osciladores están compuestos por el sistema caótico Gingerbreadman, descrito por las siguientes ecuaciones no lineales:

$$\begin{aligned} x_{i1}(k+1) &= 1 - x_{i2}(k) + |x_{i1}(k)|, \\ x_{i2}(k+1) &= x_{i1}(k) + u_i(k), \end{aligned} \quad \text{donde } i = 1, 2, \dots, 10, \quad (6.2.5)$$

se conoce que el sistema (6.2.5) con ciertos valores en sus parámetros exhibe un comportamiento caótico [52]. En la figura 6.2.5 se muestra el atractor caótico del sistema en el espacio de estados. La red presentada en la figura 6.18 está en una configuración irregular, calculando su matriz de acoplamiento como en (3.3.3), se obtiene la ley de control de toda la red como se hizo anteriormente con la ecuación (5.1.2) calculando una fuerza de acoplamiento de $c = 0.0825$ para obtener sincronía en la red. La dinámica caótica de la red en sincronía se muestra en la figura 6.20, ésta será la señal caótica en donde ocultaremos la señal que se quiere transmitir.

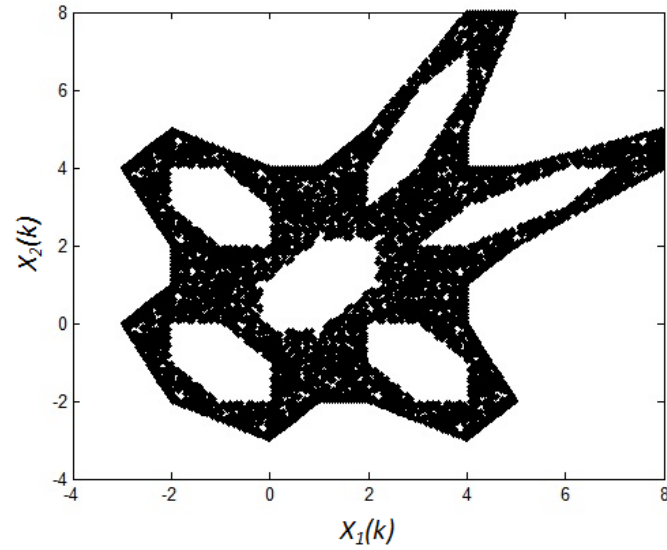


Figura 6.19: Atractor caótico del sistema (6.2.5).

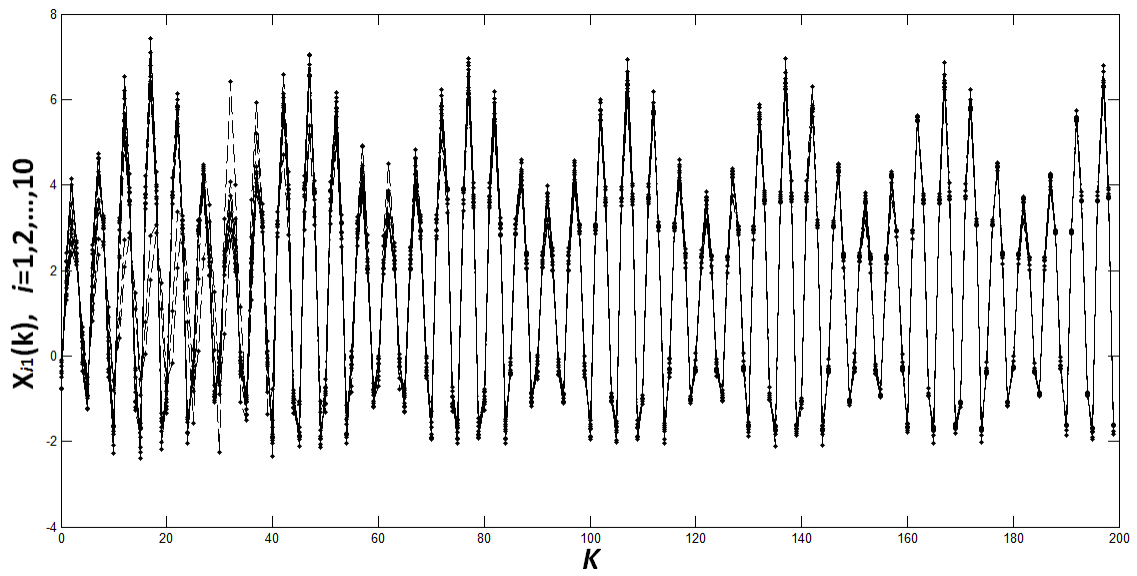


Figura 6.20: Evolución temporal de los estados $x_{11}(k), x_{21}(k), x_{31}(k), \dots, x_{10,1}(k)$ de los osciladores caóticos en sincronía.

Se seleccionó una señal de audio ideal para apreciar mejor el encriptamiento, en este caso es una sinfonía el mensaje a transmitir. La figura 6.21 muestra la señal de audio a encriptar.

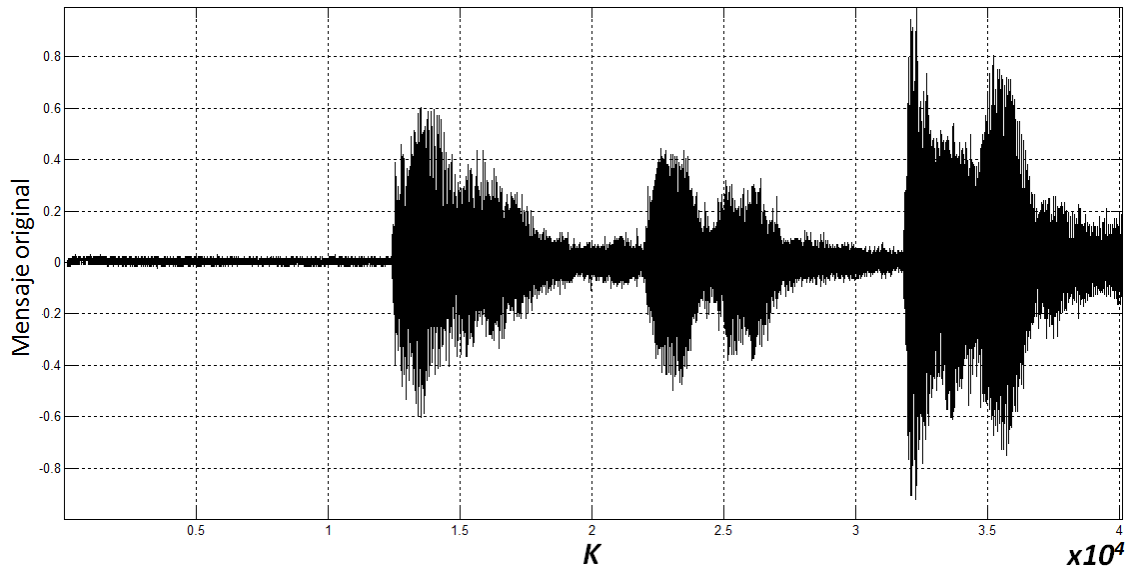


Figura 6.21: Señal de audio de una sinfonía.

Notese que la señal caótica necesita ser aumentada para poder ocultar el mensaje de audio a transmitir, para esto se multiplica el estado $x_{i1}(k)$ donde $i = 1, 2, \dots, 10$ por una ganancia con valor de 10. En la figura 6.22 se hace la comparación de ambas señales.

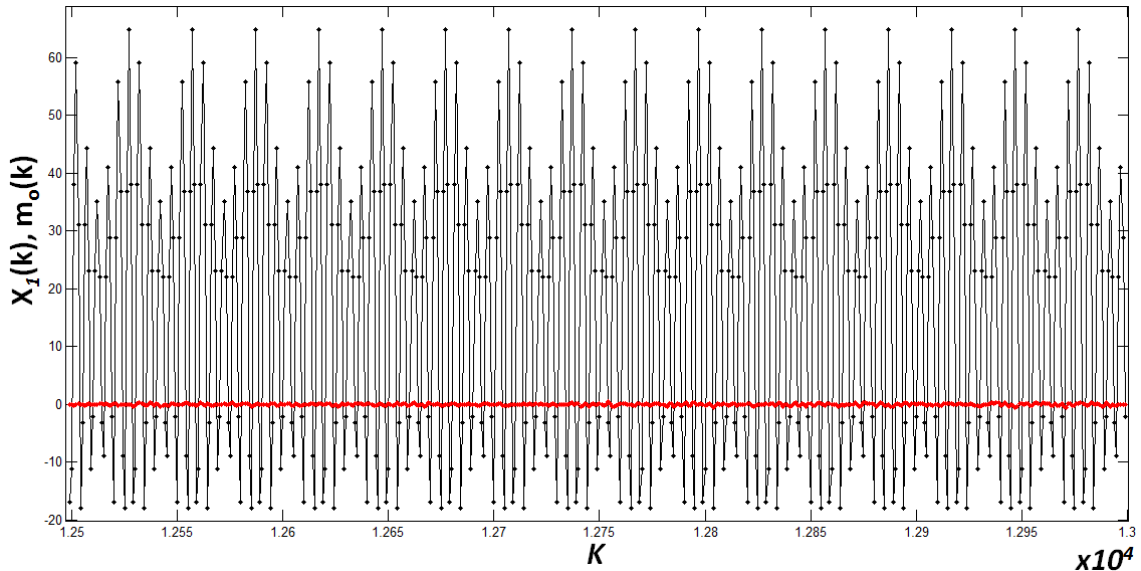


Figura 6.22: Evolución temporal de la señal caótica $x_1(k)$ y señal de audio a transmitir $m_o(k)$.

Realizando el encriptado de la señal de audio como se representa en el esquema 6.4, tenemos para este caso $x_1(k) + m_o(k) = m_e(k)$. El mensaje encriptado se presenta en la figura 6.23. Para obtener el mensaje original de audio transmitido del mensaje encriptado, restaremos la señal de los osciladores en sincronía restantes de la red y el mensaje original será recuperado en su totalidad. De esta manera se cumple:

$$||m_e(k) - x_{i1}(k)|| = \hat{m}_{oi}(k); \quad i = 2, 3, \dots, 10, \quad (6.2.6)$$

donde:

$m_e(k)$ es el mensaje encriptado.

$x_{i1}(k)$, $i = 2, 3, \dots, 10$ son los estados de los osciladores en sincronía.

$\hat{m}_{oi}(k)$, $i = 2, 3, \dots, 10$ es el mensaje original recuperado en cada oscilador.

En las figuras 6.24 y 6.25 se muestran las señales de audio recuperados en cada oscilador de la

red.

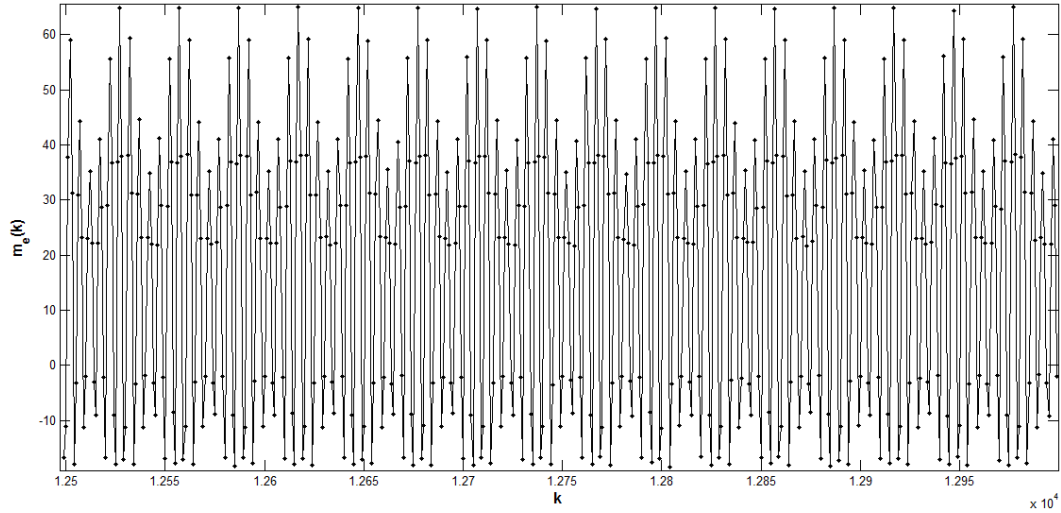


Figura 6.23: Mensaje de audio encriptado $m_e(k)$ a través de la señal caótica del sistema (6.2.5)

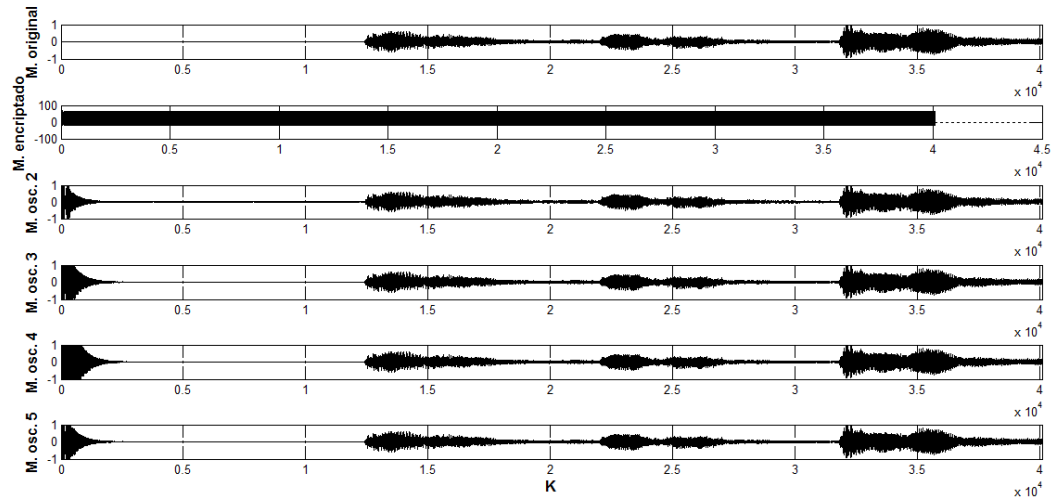


Figura 6.24: (a) Mensaje a transmitir (b) Señal encriptada (c) Mensaje recuperado en osc. 2 (d) Mensaje recuperado en osc. 3 (e) Mensaje recuperado en osc. 4 (f) Mensaje recuperado en osc. 5.

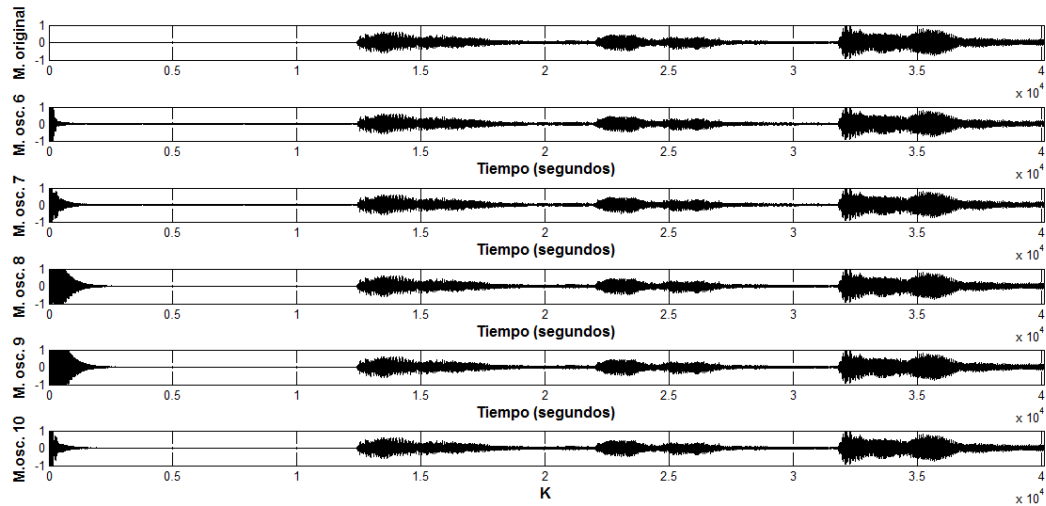


Figura 6.25: (a) Mensaje a transmitir (b) Mensaje recuperado en osc. 6 (c) Mensaje recuperado en osc. 7 (d) Mensaje recuperado en osc. 8 (e) Mensaje recuperado en osc. 9 (f) Mensaje recuperado en osc. 10.

Verificando que la señal original de audio que se transmitió en el oscilador 1 es idéntica a la recuperada en cada oscilador, se tiene que:

$$\|m_e(k) - \hat{m}_{oi}(k)\| \equiv 0; \quad i = 2, 3, \dots, 10, \quad (6.2.7)$$

de esta manera se asegura que el mensaje encriptado es recuperado en su totalidad en cada oscilador. En las figuras 6.26 y 6.27 se observa como la diferencia del mensaje encriptado y el mensaje original convergen a cero. Observe que al principio de la gráfica existe un transitorio, éste ocurre debido a que es el tiempo que tarda en que los osciladores se sincronicen. En la reproducción del sonido recuperado en los diferentes osciladores, notamos que se escucha con mucha claridad el mensaje recuperado y no existe ninguna interferencia con algún otro ruido, con esto aseguramos que nuestro encriptado tuvo éxito por el mensaje original recuperado, en este caso, la sinfonía transmitida.

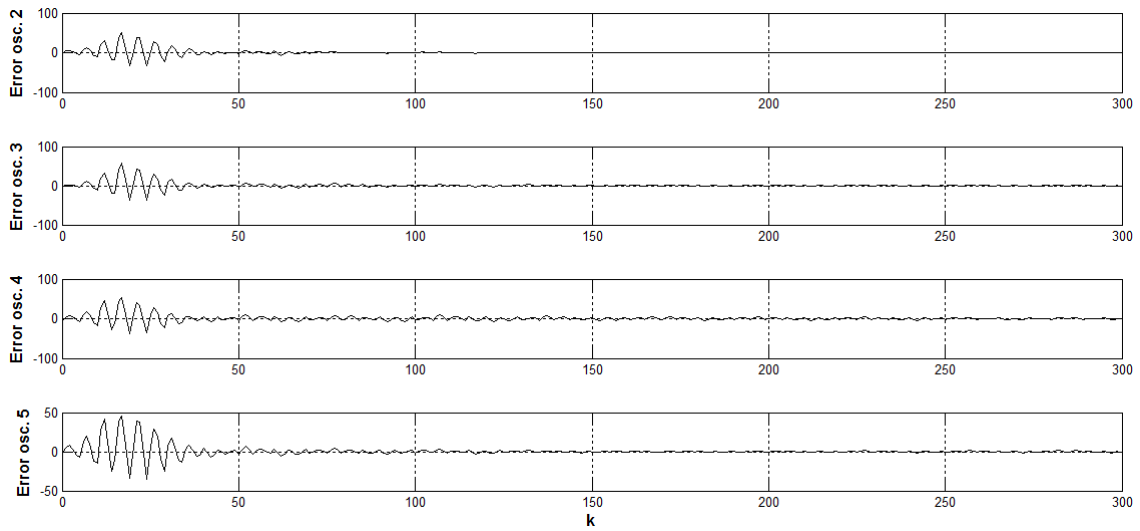


Figura 6.26: Errores de imagen recuperada: $e_2(k) = m_e(k) - \hat{x}_{o2}(k)$, $e_3(k) = m_e(k) - \hat{x}_{o3}(k)$, $e_4(k) = m_e(k) - \hat{x}_{o4}(k)$, $e_5(k) = m_e(k) - \hat{x}_{o5}(k)$.

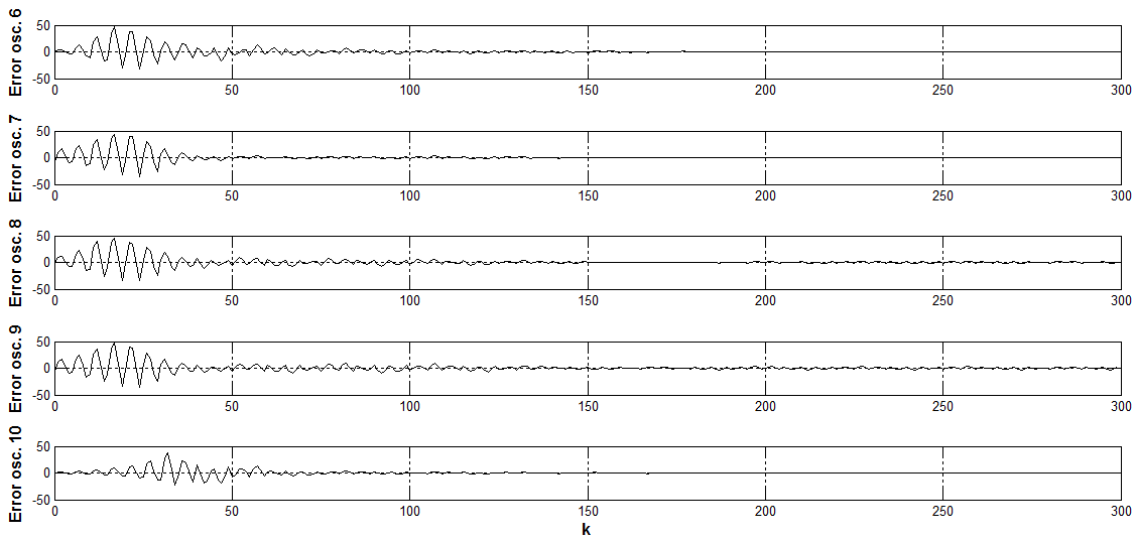


Figura 6.27: Errores de imagen recuperada: $e_6(k) = m_e(k) - \hat{x}_{o6}(k)$, $e_7(k) = m_e(k) - \hat{x}_{o7}(k)$, $e_8(k) = m_e(k) - \hat{x}_{o8}(k)$, $e_9(k) = m_e(k) - \hat{x}_{o9}(k)$, $e_{10}(k) = m_e(k) - \hat{x}_{o10}(k)$.

Con los ejemplos mostrados en este capítulo, pudimos apreciar que es posible utilizar este tipo de osciladores acoplados en redes para encriptar información, para esto es necesario que exista sincronía en la red, ya sea sincronización completa o al menos sincronización de salida. La metodología utilizada para poder sincronizar los osciladores en estas redes es eficiente, ya que obtenemos el mensaje original del mensaje encriptado en su totalidad, debido a que no existe error en la sincronización entre los osciladores.

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo de tesis de maestría se presentó la **sincronización de redes complejas formadas por osciladores caóticos discretos**. Se emplearon dos metodologías que permiten sincronizar una red compleja con osciladores caóticos discretos. Primero se revisó la metodología de acoplamiento a modelos [43] en donde se observó que sólo es posible sincronizar una red en configuración estrella con oscilador aislado, ya que los osciladores siguen la dinámica de un oscilador maestro, y segundo, con la metodología de matriz de acoplamiento empleada por Wang y Chan [16] fue posible sincronizar redes complejas en las diferentes topologías presentadas en este trabajo. Mediante simulaciones numéricas se logró mostrar sincronización en osciladores caóticos discretos Fold, Lozi, Gingerbreadman y Tinkerbell. Se consideró únicamente la sincronización de osciladores idénticos logrando la sincronización completa en los osciladores. Las condiciones iniciales en todos los ejemplos mostrados, fueron seleccionadas aleatoriamente para observar el tiempo de sincronización.

Se utilizó también el encriptamiento aditivo para encriptar información en este tipo de redes. Se presentaron dos ejemplos de sincronización de datos: imagen y audio. La sincronización de redes usando osciladores caóticos discretos, tiene la oportunidad de ser usada bajo otros sistemas de encriptamiento utilizando la ventaja computacional en el tiempo del procesamiento de señales discretas.

Las principales aportaciones que arrojó este trabajo de maestría se resume a continuación:

- Extensión del método de sincronización por acoplamiento a modelos (estaba originalmente demostrado que sólo para 2 osciladores) a una red estrella formada por osciladores discretos con nodo maestro.
- Se extendió el método de matriz de acoplamiento para sincronizar redes formadas por osciladores discretos.
- La extensión del método de matriz de acoplamiento se aplicó a diferentes clases de sistemas discretos, mostrando así, una versatilidad del método de sincronización de redes complejas en diferentes topologías.
- Se aplicó este método para redes complejas formadas desde 2 hasta 12 osciladores caóticos.
- Se logró encriptar imagen y audio en una red conformada por osciladores discretos (originalmente se reportaba sólo en dos sistemas)

7.0.3. Trabajo a futuro

A continuación se mencionan algunos problemas abiertos detectados y que presentan posible trabajo a futuro en esta dirección:

- Aplicar la metodología a sincronización de osciladores no idénticos.
- Estudiar la robustez a variaciones paramétricas y a ruido en la señal acoplante en la sincronización de una red.
- Explorar diferentes topologías teniendo una red con diferentes tipos de osciladores, ya sea que tenga dos maestros por ejemplo.

- Utilizar otro tipo de encriptamiento más seguro para incrementar la seguridad en el escenario de redes.
- Explorar el encriptado de video.

Bibliografía

- [1] POSADAS CASTILLO C, CRUZ-HERNÁNDEZ C. AND LÓPEZ-GUTIERREZ R. M, *Experimental realization of synchronization in complex networks with Chua's circuits like nodes Chaos, Solitons and Fractals*, 40(2009), pp. 1963- 1975, Elsevier Editorial, ISSN: 0960-0779. doi:10.1016/j.chaos.2007.09.076., 2009.
- [2] PIKOVSKY A, ROSENBLUM M. AND KURTHS J, *Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences*, Cambridge University Press, United Kingdom, 2001.
- [3] SCHECHTER B, *How the brain gets rhythm*, Science, 274(5286), doi: 10.1126/science.274.5286.339, pp. 339-340, 1996.
- [4] GOLDBREICH P, *Explanation of a frequent encounterment of commensurable average motions in solar systems*, In Tides and resonances in solar systems M.:Mir, 1975.
- [5] WOLF R, *Mensajes químicos: de la planta del maíz a la sincronía menstrual*, Avance y Perspectiva, 17, pp. 3-13, 1998.
- [6] POSADAS CASTILLO C, CRUZ HERNÁNDEZ C, LÓPEZ GUTIÉRREZ R.M. Y LOYA CABRERA A, *Sincronización de Redes complejas*, 2009.
- [7] STORK M, *Discrete-Time Chaotic Systems Synchronization and Communication*, Logistics and Industrial Informatics, 2009. LINDI 2009. 2nd International.
- [8] POSADAS CASTILLO C, LÓPEZ GUTIERREZ R.M. Y CRUZ HERNÁNDEZ C, *Synchronization of chaotic solid-state Nd:YAG lasers: Application to secure communication*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 13(8), pp. 1655-1667, 2008.
- [9] WANG X. F, *Complex networks: Topology, dynamics and synchronization*, International Journal of Bifurcation and Chaos, 12(5), pp. 885-916. 2002.
- [10] NETOFF T.I, CLEWLEY R, ARNO S, KECK T. AND WHITE J.A, *Epilepsy in small-world networks* The Journal of Neuroscience, 24(37), pp. 8075-8083,2004.
- [11] WASSERMAN S. AND FAUST K, *Social Networks Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

- [12] SCOTT J, *Social network analysis: A handbook*, 2da ed., Sage Publications, Londres, 2000.
- [13] ALBERT R, JEONG H. AND BARABÁSI A. L, *Diameter of the World-Wide Web*, Nature, 401, pp. 130-131, 1999.
- [14] NEWMAN M. E. J, *Scientific collaboration networks. I. Network construction and fundamental results*, Physical Review E, 64(1), pp. 016131-1 - 016131-8, 2001.
- [15] SOVAN LEK, MARC DELACOSTE, PHILIPPE BARAN, IOANNIS DIMOPOULOS, JACQUES LAURA, STÉPHANE AULAGNIER, APPLICATION OF NEURAL NETWORKS TO MODELLING NONLINEAR RELATIONSHIPS IN ECOLOGY, Ecological Modelling 90, 39-52, 1996.
- [16] WANG X. F. AND CHEN G, *Synchronization in scale-free dynamical networks: Robustness and fragility*, IEEE Trans. Circuits Syst.I, 49(1), pp. 54-62, 2002.
- [17] WANG X. F. AND CHEN G, *Synchronization in small-world dynamical networks*, International Journal of Bifurcation and Chaos, 12(1), pp. 187-19, (2002)
- [18] RODRÍGUEZ ANGELES A. AND NIJMEIJER H, *Mutual synchronization of robots via estimated state feedback: a cooperative approach*, IEEE Transactions on Control Systems Technology, 12(4), pp. 542-554, 2004.
- [19] BELYKH I, HASLER M, LAURENT M. AND NIJMEIJER H, *Synchronization and graph topology*, International Journal of Bifurcation and Chaos, 15(11), pp. 3423-3433, 2005.
- [20] YALCIN M.E, SUYKENS J. A. K. AND VANDEWALLE J. P. L, *Cellular neural networks, multi-scrrol chaos and synchronization*, World Scientific Publishing Co. Ltd. Singapore, 2005.
- [21] POSADAS CASTILLO C, CRUZ-HERNÁNDEZ C. AND LÓPEZ MANCILLA D, *Synchronization of chaotic neural networks: A generalized Hamiltonian systems approach*, International Conference on Fuzzy Systems, Neural Networks and Genetic Algorithms (FNG 2005), Tijuana, México, 13 al 14 octubre, 2005.
- [22] POSADAS CASTILLO C, CRUZ HERNÁNDEZ C. AND LÓPEZ GUTIÉRREZ R. M, *Experimental realization of synchronization in complex networks with Chua's circuits like nodes*, Chaos, Solitons and Fractals. In press, doi:10.1016/j.chaos.2007.09.076, 2008.
- [23] LIPING ZHANG AND HAIBO JIANG, *Impulsive generalized synchronization for a class of nonlinear discrete chaotic systems Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Volume 16, Issue 4, Pages 2027-2032, April 2011.
- [24] HONG-LI AN AND YONG CHEN, *The function cascade synchronization scheme for discrete-time hyperchaotic systems Original Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Volume 14, Issue 4, Pages 1494-1501, April 2009.
- [25] EISENCRAFT M AND BATISTA A. M, *Discrete-time chaotic systems synchronization performance under additive noise Signal Processing*, Volume 91, Issue 8, Pages 2127-2131, August 2011.

- [26] SU H. AND DING X.H, *Synchronization in time-discrete delayed chaotic systems Original Neurocomputing*, Volume 73, Issues 1-3, Pages 478-483, December 2009.
- [27] AGUILAR BUSTOS A. Y. AND CRUZ HERNÁNDEZ C, *Synchronization of discrete-time hyperchaotic systems: An application in communications Chaos, Solitons and Fractals*, Volume 41, Issue 3, Pages 1301-1310, 15 August 2009.
- [28] SHANGBO ZHOU, XIAOFENG LIAO, JUEBANG YU AND KWOK-WO WONG, *Chaos and its synchronization in two-neuron systems with discrete delays Chaos, Solitons and Fractals*, Volume 21, Issue 1, Pages 133-142, July 2004.
- [29] POSADAS CASTILLO C, CRUZ HERNÁNDEZ C. AND LÓPEZ GUTIERREZ R. M, *Synchronization of Chaotic Neural Networks with Delay in Irregular Networks Applied Mathematics and Computation*, 205(2008), 487-496. Elsevier Editorial. ISSN: 0096-3003. doi: 10.1016/j.amc.2008.08.015., 2008.
- [30] YONG-AI ZHENG, YI-BEI NIAN AND FEI SUN, *Synchronization of discrete-time chaotic systems based on Takagi-Sugeno fuzzy model*, International Conference on Computational Intelligence and Natural Computing, IEEE, 2009.
- [31] GRASSI G, *Generalized synchronization between different chaotic maps via dead-beat control*, Chin. Phys. B Vol. 21, No. 5 050505, 2012.
- [32] LOZI R, *Un attracteur étrange du type attracteur de Hénon*, J. Phys. Colloque C5 39, Supplément au no. 8, 9-10 (French), 1978.
- [33] LI-QUN CHEN AND YAN-ZHU LIU, *AN OPEN-PLUS-CLOSED-LOOP APPROACH TO SYNCHRONIZATION OF CHAOTIC AND HYPERCHAOTIC MAPS*, Int. J. Bifurcation Chaos 12, 1219, 2002.
- [34] SCHENK HOPPÉ K.R, *Bifurcation scenarios of the noisy duffing-van der pol oscillator*, Nonlinear dynamics, Volume 11, Number 3, 255-274, 1996.
- [35] PARSOPOULOS K.E. AND VRAHATIS M.N, *Computing Periodic Orbits of Nondifferentiable/Discontinuous Mappings Through Particle Swarm Optimization*, Swarm Intelligence Symposium, 2003.
- [36] GODÓ B. AND NAGY Á, *Generalized complexity measures and chaotic maps*, Chaos 22, 023118, 2012.
- [37] WON-KI LEE, CHANG-HO HYUN, HEEJIN LEE, EUNTAI KIM AND MIGNON PARK, *Model reference adaptive synchronization of T-S fuzzy discrete chaotic systems using output tracking control Chaos, Solitons and Fractals*, Volume 34, Issue 5, Pages 1590-1598, December 2007.
- [38] PARLITZ U. AND KOCAREV, *Handbook of Chaos Control*, Ed. Springer-Verlag, 1998.
- [39] HASLER M, *Engineering chaos for encryption and broadband communication*, Phil. Trans. R. Soc. Lon. A, 353, 115-126, 1995.

- [40] PECORA L.M. Y CARROLL T.L, *Synchronization in chaotic systems*, Phys. Rev. Lett., 64, 821-824 p. 1990.
- [41] BOCCALETTI S, VALLADARES D. L, KURTHS J, MAZA D. AND MANCINI H, *Synchronization of chaotic structurally nonequivalent systems*, Phys. Rev. E61(4): 3712-3715, 2000.
- [42] KOTTA U, *Matching a nonlinear discrete-time system with a prescribed linear input-output behavior*, Aut. and Rem. Control, 49, 1286-1292 p. 1989.
- [43] CRUZ HERNÁNDEZ C. AND ÁLVAREZ GALLEGOS J, *Stability analysis of nonlinear model matching for a class of perturbed discrete-time systems*, Procs. of NOLCOS'95, Tahoe City, CA, USA, pp. 422-427 p. 1995.
- [44] CRUZ HERNÁNDEZ C, ÁLVAREZ GALLEGOS J. AND CASTRO R, *Stability of discrete nonlinear systems under nonvanishing perturbations: application to a nonlinear model matching problem*, IMA J. Math. Control and Information, 16, 23-41 p. 1999.
- [45] NIJMEIJER H. AND DER SCHAFT V. J, *Nonlinear dynamical control systems*, Springer-Verlag, 1990.
- [46] KOTTA U, *Inversion method in the discrete-time control systems synthesis problems*, Lecture notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, Berlin, 205 pp, 1995.
- [47] CRUZ HERNÁNDEZ C. AND NIJMEIJER H, *Synchronization through extended Kalman ltering*, New Trends in Nonlinear Observer Design, eds. Nijmeijer, H. and Fossen, T. I., Lecture Notes in Control and Information Sciences 244 (Springer-Verlag), 469-490 pp, 1999.
- [48] MONACO S. AND NORMAND CYROT D, *Minimum phase nonlinear discrete-time systems and feedback stabilization*, Proceedings of the 26th Conference on Decision and Control, Los Angeles CA, USA, 979-986 p, 1987.
- [49] CRUZ HERNÁNDEZ C, *Stability of discrete nonlinear systems under regular perturbations*, Ph D.Thesis CINVESTAV-IPN, México, 1995.
- [50] NIJMEIJER H, *Local (dynamic) input-output decoupling of discrete nonlinear systems*, IMA J. Math. Control and Information, 4, 237-250 p., 1987
- [51] BENEDICKS M. AND CARLESON L, *The dynamics of the Hénon map*, Ann. of Math, (2) 133, no. 1, 73..169, 1991.
- [52] DEVANEY R, *A piecewise linear model for the zones of instability of an area preserving map*, Physica D, vol. 10, pp. 387-393, 1984.
- [53] CUOMO K.M, OPPENHEIM AND STROGRATZ S.H, *Synchronization of Lorenz-based chaotic circuit with applications to comunicatios*, IEEE Trans. Circuits Syst. II 40, 626-633p. 1993.
- [54] ABEL A. AND SCHWARZ W, *Chaos Communications - Principles, Schemes, and System Analysis*, Proceedings of the IEEE Vol. 90, No. 5, May 2002.
- [55] DRACHSELT F. AND SCHWARZ W, *Chaos and Cryptography*, Fundamental Theory and applications, Vol. 48 No. 12, Dec 2001.