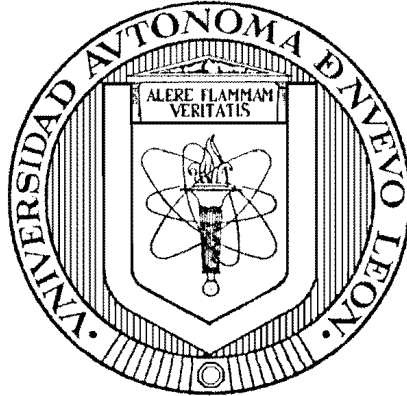


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



DESARROLLO DE ESQUEMAS DE CONTROL UTILIZANDO UN ENFOQUE
HÍBRIDO CON APLICACIÓN AL CONVERTIDOR MULTICELULAR DE 3
NIVELES.

POR

ING. LEONELA CRISTAL DE LEÓN MEDELLÍN

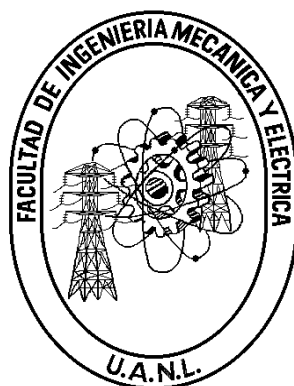
TESIS

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ORIENTACIÓN
EN CONTROL AUTOMÁTICO

CD. UNIVERSITARIA

ENERO DE 2013

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



DESARROLLO DE ESQUEMAS DE CONTROL UTILIZANDO UN ENFOQUE
HÍBRIDO CON APLICACIÓN AL CONVERTIDOR MULTICELULAR DE 3
NIVELES.

POR

ING. LEONELA CRISTAL DE LEÓN MEDELLÍN

TESIS

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ORIENTACIÓN
EN CONTROL AUTOMÁTICO

CD. UNIVERSITARIA

ENERO DE 2013

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis "Desarrollo de esquemas de control utilizando un enfoque híbrido con aplicación al convertidor multicelular de 3 niveles." realizada por el alumno Ing. Leonela Cristal de León Medellín, matrícula número 1248979 sea aceptada por su defensa como opción al grado de **Maestro en Ciencias** de la Ingeniería Eléctrica con Orientación en Control Automático.

El Comité de Tesis



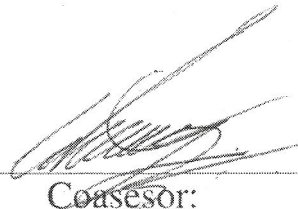
Asesor

Dr. Marco Tulio Mata Jiménez



Coasesor:

Dr. Miguel F. Escalante Gutiérrez



Coasesor:

Dr. Pedro Daniel Alaniz Lumbreras



Vo. Bo.

Dr. Moisés Hinojosa Rivera
División de Estudios de Posgrado

Cd. Universitaria, a Enero de 2013

A Omar, con quién no sólo comparto mi vida, sino el gusto por seguir aprendiendo y, en especial a mi pequeño Bruno Amaya de León, quién estuvo conmigo desde el comienzo de esta tesis. Mi hombrecito, espero siempre tenerte a mi lado en cada logro que tenga en la vida, porque tu cariño y el de nuestra familia es lo que hace que esto valga la pena...

Agradecimientos

A Sr. Jehová por todo lo que me ha dado a lo largo de mi vida...

A mis padres Catalina y Leonardo, así como a mis hermanos Katy y Leonardo, quienes han estado a mi lado desde que tengo memoria y siempre han creído en mi...

A Omar por apoyarme incondicionalmente en las buenas y en las malas...

A Bruno por impulsarme día a día...

A mis compañeros y amigos por las experiencias compartidas...

A mi asesor el Dr. Marco Tulio Mata Jiménez por brindarme la oportunidad de trabajar con él y guiarme en este estudio...

A mis revisores el Dr. Miguel F. Escalante Gutiérrez y el Dr. Pedro Daniel Alaniz Lumbreras por enriquecer mis conocimientos...

A CONACYT por el apoyo otorgado para llevar a cabo mis estudios de maestría sin los cuales no hubiera sido posible realizar este trabajo.

Leonela Cristal de León Medellín
Enero del 2013

RESUMEN

Publicación No. _____

Leonela Cristal de León Medellín, M. C. en Ingeniería Eléctrica

Universidad Autónoma de Nuevo León, 2013

Profesor Asesor: Marco Tulio Mata Jiménez

En el presente trabajo proponemos una nueva estrategia de control híbrida aplicada a un convertidor multicelular de 3 niveles. A diferencia de la mayoría de los trabajos estudiados en la literatura, modelamos el convertidor como un sistema dinámico híbrido, considerando todas las dinámicas no lineales no lisas del sistema. Nuestro estudio toma ventaja de las características híbridas del modelo, variables continuas representando la evolución del estado del sistema físico (la tensión en el condensador y la corriente en la carga) y variables discretas representando el estado de los interruptores (entrada de control); así como la naturaleza lineal de los diferentes modos de operación del sistema físico.

El enfoque propuesto consiste en utilizar dos controladores: un controlador estabilizante a fin de generar un ciclo límite, alrededor de los valores de referencia, que posea ciertas características deseadas y un controlador auxiliar que lleve la trayectoria del sistema a la región de atracción del controlador estabilizante. El principio de operación de este esquema es simple: para una condición inicial dada (generalmente fuera de la región de atracción del ciclo límite) se activa el controlador auxiliar para llevar la trayectoria a la región de operación del controlador estabilizante, una vez alcanzada esta región conmutamos a dicho controlador.

La síntesis del controlador está basada en la determinación de las secuencias de conmutación asegurando tanto la estabilidad del ciclo límite como la convergencia de las trayectorias hacia su región de atracción. Para ilustrar el desempeño del esquema de control propuesto presentamos algunas simulaciones numéricas.

Índice General

Agradecimientos	IV
Resumen	V
Índice General	VI
Índice de Tablas	IX
Índice de Figuras	X
Símbolos y Acrónimos	XIII
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	3
1.2. Planteamiento del problema	4
1.3. Revisión de trabajos relacionados	5
1.4. Objetivo de la Tesis	8
1.5. Estructura de la Tesis	8
2. Sistemas híbridos	9
2.1. Introducción	9
2.2. Representación de sistemas híbridos	11
2.3. Ejemplos de sistemas dinámicos híbridos	19
2.3.1. Pelota que rebota	19
2.3.2. Convertidor de potencia	22
2.4. Conclusiones	25

3. Modelo de un convertidor multicelular de 3 niveles	26
3.1. Introducción	26
3.2. Convertidor multicelular	28
3.2.1. Modelo híbrido de un convertidor multicelular	30
3.3. Aplicación a un convertidor multicelular de 3 niveles	31
3.3.1. Modelo híbrido	32
3.3.2. Solución para los modos de operación del sistema híbrido	34
3.4. Conclusiones	36
4. Diseño de esquemas de control con enfoque híbrido	37
4.1. Introducción	37
4.2. Modelo híbrido del convertidor multicelular para síntesis del controlador	38
4.3. Principio de operación del controlador híbrido	40
4.4. Regiones de operación	40
4.5. Controlador estabilizante	43
4.5.1. Controlador estabilizante para baja potencia	44
4.5.2. Controlador estabilizante para alta potencia	47
4.6. Controlador auxiliar	51
4.6.1. Controlador auxiliar para baja potencia.	51
4.6.2. Controlador auxiliar para alta potencia	54
4.6.3. Análisis de estabilidad del controlador híbrido	56
4.7. Existencia del ciclo límite	68
4.7.1. Cálculo del Δv crítico	69
4.7.2. El máximo invariante en \mathbb{R}_e	71
4.8. Resultados de simulación	75
4.9. Conclusiones	80
5. Conclusiones y perspectivas	81
5.1. Conclusiones acerca del modelo híbrido	81
5.2. Conclusiones acerca del controlador híbrido propuesto	82
5.3. Contribución	82
5.4. Trabajo futuro	83

A. Desempeño de modelo promediado vs híbrido	84
A.1. Modelo promediado	84
A.2. Modelo Híbrido	87
A.3. Conclusiones	90
B. Obtención de las soluciones a las ecuaciones en diferencia que representan cada modo de operación	91
B.1. Modo 1	91
B.2. Modo 2	93
B.3. Modo 3	94
B.4. Modo 4	97
Bibliografía	98

Índice de Tablas

- 4.1. Parámetros para baja potencia 75
- 4.2. Parámetros para alta potencia 78

Índice de figuras

2.1. Representación de un autómata mediante gráfico con vértices	13
2.2. Representación gráfica del autómata híbrido	18
2.3. Circuito de un convertidor Boost (elevador) con diodo de bloqueo	22
2.4. Relación V-I para el diodo ideal	23
3.1. Diagrama eléctrico de un convertidor multicelular de p-células	29
3.2. Modos de operación para un convertidor de 3 niveles (v_c - Tensión en el condensador, i - Corriente en la carga, R - Resistencia, L - Inductancia, C - Capacitancia, E - Fuente de alimentación CD, V_s - Tensión en la carga)	31
4.1. Esquema híbrido para un convertidor con 2 células	39
4.2. Espacio de alcance y la división de este en dominios determinantes para la configuración de operación del control	40
4.3. Distribución de los dominios de los controladores auxiliar y estabilizante	41
4.4. Bandas de operación para el <i>dominio</i> de la región de atracción del ciclo límite	42
4.5. Distribución de las regiones de operación para modos específicos, configuración baja potencia	43
4.6. Ciclo límite inducido para el caso de baja potencia	44
4.7. Ciclo límite generado para el caso de baja potencia	46
4.8. Distribución de las regiones de operación para modos específicos, configuración alta potencia	48
4.9. Ciclo límite inducido para el caso de alta potencia	49
4.10. Ciclo límite generado para el caso de alta potencia	50
4.11. Distribución de las regiones de operación para modos específicos (baja potencia)	52
4.12. Trazo de trayectoria para 4 condiciones iniciales diferentes (baja potencia)	53

4.13. Distribución de las regiones de operación para modos específicos (alta potencia) . . . 54

4.14. Trazo de trayectoria para 4 condiciones iniciales diferentes (alta potencia) 55

4.15. Esquema de acción del modo q_1 en concatenación con el modo q_4 56

4.16. Esquema de acción del modo q_1 en concatenación con el modo q_4 59

4.17. Esquema de acción del modo q_1 en concatenación con el modo q_4 62

4.18. Esquema de acción del modo q_1 en concatenación con el modo q_4 65

4.19. Forma generalizada de ciclo límite 68

4.20. Forma del ciclo límite. 69

4.21. Ciclo límite para baja potencia, se asocia un tiempo de acción para cada modo de
operación (el orden numeral tiene que ver con el orden de ocurrencia). 71

4.22. Evolución de la corriente en la carga 76

4.23. Evolución de la tensión en el condensador 76

4.24. Señales de control para los interruptores 76

4.25. Modo de operación 77

4.26. Plano de fase para baja potencia ($v_{ref} = 50V$, $\Delta v = 1,1V$, $i_{ref} = 2A$ y, $\Delta i = 1A$). . 77

4.27. Evolución de la corriente en la carga 78

4.28. Evolución de la tensión en el condensador 78

4.29. Señales de control para los interruptores 79

4.30. Modo de operación 79

4.31. Plano de fase para alta potencia ($v_{ref} = 50V$, $\Delta v = 3,5V$, $i_{ref} = 6A$ y, $\Delta i = 1A$). . 80

A.1. Convertidor Boost 85

A.2. Planos de fase convertidor Boost, comparación entre modelo original desarrollado en
PSIM y modelo promediado en Simulink-MatLab 85

A.3. Convertidor Buck 86

A.4. Planos de fase convertidor Buck, comparación entre modelo original desarrollado en
PSIM y modelo promediado en Simulink-MatLab 86

A.5. Planos de fase convertidor Boost, comparación entre modelo original desarrollado en
PSIM y modelo híbrido en Simulink-MatLab 87

A.6. Planos de fase convertidor Buck, comparación entre modelo original desarrollado en
PSIM y modelo híbrido en Simulink-MatLab 88

A.7. Integral del error cuadrático convertidor Boost 89

A.8. Integrales de error cuadrático convertidor Buck	89
--	----

Símbolos y Acrónimos

SEP	Sistema Eléctrico de Potencia
EFF	Fórmula de Flujo de Eventos
u_p	Señal de control binaria
R	Resistencia
L	Inductancia
V_s	Tensión a la salida (en la carga)
$v_{c(p-1)}$	Tensiones flotantes
i	Corriente en la carga
v_c	Tensión en el condensador
C	Capacitancia
E	Fuente de alimentación CD
CD	Corriente Directa
u_1	Estado del interruptor 1
u_2	Estado del interruptor 2
x	Vector de estados continuos
Q	conjunto de estados discretos (locación discreta)
$f_{q_1}(x)$	Campo vectorial asociado al estado discreto q_1
$f_{q_2}(x)$	Campo vectorial asociado al estado discreto q_2
$f_{q_3}(x)$	Campo vectorial asociado al estado discreto q_3
$f_{q_4}(x)$	Campo vectorial asociado al estado discreto q_4
$T(q_i, q_j)$	Conjunto de posibles transiciones en el autómata

t	Tiempo final
t_k	Tiempo en el instante inicial k
\mathbb{R}_e	Región del controlador estabilizante
$X(q)$	Campo invariante para un estado discreto q
$G(q_i, q_j)$	Restricción de transiciones (condición de guarda)
\bar{E}	Espacio de alcance del sistema
\overline{BP}	Región de baja potencia
\overline{AP}	Región de alta potencia
Δ	Región alrededor de $\frac{E}{2R}$
I_c	Corriente crítica
\mathbb{R}_a	Región del controlador auxiliar
i_{ref}	Corriente de referencia
i_{ref}^+	Corriente de referencia superior
i_{ref}^-	Corriente de referencia inferior
Δi	Variación para la corriente de referencia
v_{ref}	Tensión de referencia
v_{ref}^+	Tensión de referencia superior
v_{ref}^-	Tensión de referencia inferior
Δv	Variación para la tensión de referencia
$X(q_1)$	Condición de invarianza del modo q_1
$X(q_2)$	Condición de invarianza del modo q_2
$X(q_3)$	Condición de invarianza del modo q_3
$X(q_4)$	Condición de invarianza del modo q_4
$Init$	Condiciones iniciales
$f_{(.)}(\cdot)$	Campo vectorial asociado con cada estado discreto
X	Estados continuos

V_C	Tensión en el condensador
I_L	Corriente en el inductor
D	Ciclo de trabajo
u	Estado del interruptor

Capítulo 1

Introducción

Muchos sistemas físicos encontrados en la naturaleza poseen una dinámica que combina comportamientos de sistemas continuos y de sistemas discretos. Entre estos sistemas podemos mencionar los sistemas mecánicos sometidos a restricciones unilaterales, sistemas conmutados y algunos sistemas biológicos. También, muchos sistemas de ingeniería complejos presentan este tipo de comportamiento al combinar subsistemas discretos, o lógicos, con subsistemas continuos. A nuestro alrededor podemos encontrar muchos ejemplos, como son: automóviles, computadoras, lavadoras, convertidores estáticos de potencia, entre otros.

Este tipo de sistemas puede ser representado, mediante un modelo matemático, donde la variable continua es modelada como real y la variable discreta como booleana. Esto da lugar a lo que se conoce como sistemas dinámicos híbridos. Es necesario comentar que este tipo de sistemas no pueden ser estudiados mediante las teorías desarrolladas para los sistemas continuos o discretos, exclusivamente.

El creciente papel que tienen las computadoras en el control de procesos físicos ha aumentado el interés en el estudio de sistemas híbridos. Dado que al combinar componentes digitales, algoritmos de control con implementación computacional y procesos físicos continuos, nos lleva a un sistema que acopla dinámicas continuas y discretas, característica fundamental de los sistemas dinámicos híbridos.

Algunas comunidades científicas han presentado recientes desarrollos en el área, cada una con su enfoque e intereses particulares, entre las que podemos mencionar [1]:

Ciencias Computacionales. Se considera al sistema híbrido como un programa discreto (computadora) que interactúa con el sistema considerado análogo.

Modelado y Simulación. Esta disciplina considera que los sistemas físicos pueden comúnmente operar en diferentes modos y, la transición de un modo a otro puede ser idealizado como una transición discreta instantánea.

Sistemas y Control. Considera sistemas jerárquicos con un nivel de decisión discreta y un nivel de implementación continua (control supervisado o multiagente de control). Los esquemas de control conmutado y control de relé conducen a sistemas híbridos.

La elección del tipo de modelo depende de los objetivos del mismo, por ejemplo si se necesita un modelo para simular un fenómeno físico podría ser más útil emplear las definiciones dadas por el área de modelado y simulación, en cambio si nuestro interés es controlar dicho fenómeno los modelos propuestos por el área de sistemas y control serían más adecuados.

En nuestro caso de estudio tomaremos las definiciones dadas por el área de modelado y simulación así como sistemas y control dado que nuestro interés es modelar y controlar un sistema conmutado considerado como una subclase de los sistemas híbridos que cambia de modo entre transiciones disparadas por los eventos de control.

Un sistema de control conmutado es un caso particular de sistema híbrido el cual consiste en varios subsistemas y una ley de conmutación que activa algún subsistema en cada instante de tiempo [2]. Las propiedades de este tipo de modelos han sido muy estudiadas dado que los sistemas conmutados tienen numerosas aplicaciones en el control de sistemas mecánicos, control de procesos, control de vuelo, control de tráfico y control de convertidores de potencia.

La técnica utilizada en este estudio será desarrollada para el control de un convertidor estático de potencia, el cual resulta un candidato idóneo para ser modelado y controlado mediante técnicas híbridas dado que es inherentemente híbrido en estructura. Particularmente se analizará el convertidor multicelular de tres niveles, el cual está basado en una asociación de células elementales de conmutación en serie, el cual pertenece a la clase de sistemas conocidos como sistemas lineales conmutados dado que todos sus subsistemas son descritos por sistemas lineales entre conmutaciones.

1.1. Antecedentes

Se puede visualizar en la siguiente línea de tiempo, cómo con el paso de los años se fue desarrollando un mayor interés en el área de sistemas híbridos:

1966. *Witsenhausen* ponía en evidencia las dificultades que los sistemas híbridos representaban para las técnicas de control tradicional [3].

80's. Los investigadores comienzan a desarrollar las bases teóricas de los diferentes modelos de sistemas denominados híbridos.

1995. *A. Stephen Morse* desarrolla la primera estructura de un control híbrido, basado en la lógica de conmutación [4].

1996 – 1998. *Henzinger* bifurca el estudio de los sistemas híbridos debido a aspectos conceptuales [5, 6].

2000. *Alur* llama a la variedad de sistema híbrido de estructura única, sistema de dinámica híbrida [7].

2007 *K. Benmansour et al.* desarrollan un control híbrido para un convertidor multicelular [8].

- 2008 *D. Patino et al.* desarrollan un control predictivo basado en entradas de control binarias para un convertidor multicelular de 3 células - 4 niveles [9].
- 2008 *H. Cormerais et al.* elaboran un control basado en pasividad aplicado a un convertidor multicelular (sistema conmutado) utilizando formalismos de bond graph [10].
- 2008 *X. Xu* estudia el problema de la estabilidad práctica de los sistemas afines conmutados.
- 2009 *H. Lin et al.* estudian las propiedades de estabilidad y estabilización de sistemas lineales conmutados.
- 2011 *O. Benzineb et al.* desarrollan el control de un convertidor multicelular por modos deslizantes, partiendo de un modelo híbrido [11].

Se puede apreciar que tanto el control automático como el control de sistemas electrónicos de potencia, son áreas de investigación muy activas y en años recientes sus intereses han coincidido, dado que el análisis de sistemas híbridos es una herramienta prometedora para el control de sistemas conmutados.

1.2. Planteamiento del problema

Como se mencionó previamente, el análisis de sistemas conmutados desde un enfoque híbrido para el control de este tipo de sistemas es una herramienta prometedora, debido a que provee la posibilidad de capturar los fenómenos generados por la naturaleza híbrida del mismo; dentro de la clasificación de sistemas conmutados, se tiene a los convertidores estáticos, dentro de los cuales, se encuentra el convertidor multicelular.

La naturaleza del convertidor multicelular es identificada como híbrida, debido a que, el sistema implica el manejo de dinámicas continuas (tensiones y corrientes) y dinámicas discretas (interruptores). En nuestro caso empleamos el convertidor multicelular de 3 niveles para aplicar la metodología

aquí propuesta.

Es sabido que un mismo sistema físico puede ser representado por diferentes modelos, pero la efectividad y desempeño de los mismos dependerá del propósito de uso. Para el caso particular del convertidor multicelular, en la literatura de control, se pueden encontrar diferentes modelos como: modelos híbridos, modelos promediados y modelos armónicos [9] [10] [12] .

Para el convertidor multicelular, generalmente las técnicas de control propuestas están basadas en modelos promediados, dichos modelos son una aproximación de la dinámica real del sistema y podría no capturar ciertos fenómenos presentes en el sistema (es evidente que algo que no es observado es difícilmente controlado).

La forma en que se podría tener un modelo más sencillo y compacto es mediante el desarrollo de un modelo híbrido, a través del cual, se puede aprovechar la información extra que éste nos pudiera proveer. Así, partiendo de una representación que conserve la estructura inherentemente híbrida y manteniendo las características no lineales no lisas del sistema, se pretende desarrollar esquemas de control con un enfoque híbrido. Por lo tanto, consideramos que el área de control de sistemas híbridos podría proveer herramientas efectivas para el análisis y síntesis de controladores para convertidores de potencia.

1.3. Revisión de trabajos relacionados

El control de convertidores estáticos de potencia es un área muy activa, a continuación se presentan sólo algunos trabajos previos realizados para el convertidor multicelular de tres niveles, los cuales hemos elegido para delimitar el contexto del estudio y las aportaciones que se pudieran lograr con el desarrollo de esta tesis.

- **K. Benmansour et al. *Control híbrido para un convertidor multicelular, 2006***

Proponen un nuevo esquema de conmutación para el control de un convertidor multicelular. Consideran un convertidor con dos células, el cual es representado como un sistema híbrido con 4 modos de operación, los cuales son gobernados por las referencias ajustables de voltaje y corriente. Este estudio está justificado por el comportamiento híbrido del sistema considerado, es decir, presenta variables discretas y continuas que representan el estado de los interruptores, y la evolución de la corriente y de la tensión flotante en las terminales del condensador, respectivamente. La síntesis del control está basada en la determinación de las secuencias de conmutación, asegurando la estabilidad y la integridad de los interruptores [8].

En los resultados de simulación, es posible observar que se genera un ciclo límite. Sin embargo, los autores no estudian las características de tal ciclo, ni su estabilidad. Otra posible limitación del controlador es que cuando esté cerca de la corriente crítica, podría presentar un comportamiento no deseado; es decir, que el controlador no sería capaz de asegurar que la dinámica de corriente del sistema tienda a la referencia establecida, sino que ésta podría permanecer en una pequeña región alrededor de su valor de referencia.

- **Diego Patino et al. *Control predictivo de convertidores multicelulares, 2008***

Desarrollan un control predictivo, basado en entradas de control binarias, con el fin de obtener un ciclo periódico óptimo partiendo de una referencia promedio para la corriente y la tensión. El ciclo obtenido es considerado como la referencia del control, en lazo cerrado, para el estado estacionario. Además, aseguran la implementación en tiempo real a través de una red neuronal. Y finalmente, verifican el desempeño del método en un convertidor multicelular de 3-células 4-niveles [9].

En este trabajo se establece la existencia de un ciclo límite, pero no se hace mención de sus características (amplitud y frecuencia), además de que no se analiza la estabilidad para tal ciclo.

- **H. Cormerais et al. *Modelado y control basado en Pasividad de sistemas conmutados partiendo del formalismo de bond graph: Aplicación a convertidores multicelulares*, 2008**

Muestra el modelado y la síntesis de un control para sistemas conmutados con entradas booleanas. Se propone un Control Basado en Pasividad utilizando formalismos de bond graph (PBC). Deducen las ecuaciones de estado del modelo promediado equivalente, partiendo del bond graph original utilizando el concepto de células de conmutación e implementándolas de acuerdo con el formalismo de Puertos Hamiltonianos Controlados (PCH). El enfoque completo es presentado formalmente, siendo aplicado a un convertidor multicelular serie ampliamente utilizado y de creciente interés en el área de SEP [10].

El inconveniente de un PBC es que no puede ser asegurada su estabilidad asintótica. Además, el desarrollo de este control parte exclusivamente de una perspectiva energética, acorde con el formalismo de bond graph, por lo cual es necesario emplear un modelo promediado en forma Euler-Lagrange o hamiltoniana para esta metodología, restando exactitud al modelo.

- **O. Benzineb et al. *Control de un convertidor multicelular por modos deslizantes*, 2011**

Desarrollan un control por modos deslizantes para un convertidor multicelular. Toman en cuenta los aspectos híbridos de la estructura de conversión, los cuales incluyen los estados continuos y discretos. La idea básica que utilizan es considerar los sistemas interconectados que representa el modelo híbrido y generar superficies de conmutación basadas en una función de Lyapunov satisfaciendo la estabilidad asintótica [11].

En sus resultados de simulación no es posible visualizar fácilmente la existencia de un *ciclo límite*, dado que su interés consistía únicamente en mantener la trayectoria del sistema en una región acotada; por consiguiente las características de la trayectoria del sistema en dicha región no son conocidas.

1.4. Objetivo de la Tesis

Diseñar un algoritmo de control, basado en técnicas no lineales e híbridas; con aplicación a un convertidor multicelular de 3 niveles, considerando una representación híbrida del sistema. Este esquema de control aprovecha las propiedades del sistema (la linealidad que posee entre conmutaciones) a fin de generar una trayectoria con ciertas características deseadas.

1.5. Estructura de la Tesis

La tesis está organizada en 5 capítulos. La introducción en el Capítulo 1 resalta la motivación de este estudio, estableciendo los antecedentes, el problema a tratar, una revisión de trabajos previos y por último definiendo los objetivos que se buscan alcanzar en esta investigación.

Sabiendo que para tener un mejor entendimiento del tema es necesaria la comprensión de los conceptos básicos relacionados con el área, en el Capítulo 2, se introduce a los *sistemas híbridos* estableciendo el origen de esta clasificación, así como las características que los identifican, formas existentes para la representación de este tipo de sistemas, así como unos ejemplos.

Dado que se partirá de un modelo híbrido como representación para el convertidor multicelular de 3 niveles, en el Capítulo 3, se desarrolla su modelo.

En base al modelo híbrido, se desarrolla un controlador híbrido, el cual está compuesto por un controlador auxiliar y un controlador estabilizante. El desarrollo de este controlador es explicado en el Capítulo 4.

Finalmente, en el Capítulo 5, se establecen las conclusiones generales de la investigación y perspectivas para trabajos futuros.

Capítulo 2

Sistemas híbridos

El propósito de este capítulo es establecer el concepto de “sistema híbrido” brindando las definiciones básicas de este campo. Dado que el área de sistemas híbridos es muy vasta y, aún está en etapa de formalización de definiciones, se pretende dar una descripción exhaustiva de la literatura existente. Para esta investigación se seleccionaron sólo algunas definiciones necesarias para comprender las bases teóricas de los sistemas dinámicos híbridos. La mayor parte de las definiciones y conceptos dados en este capítulo son una recopilación del material presentado en [1]

2.1. Introducción

En forma general, un *sistema híbrido* contiene dinámicas continuas y eventos discretos. Ambas dinámicas no sólo coexisten, sino que interactúan y, ocurren cambios en éstas en respuesta a eventos discretos instantáneos y en respuesta a dinámicas continuas.

Este enfoque es común a diversas comunidades científicas y, cada una de ellas ha presentado ciertos desarrollos en esta área, entre las cuales se pueden mencionar:

Primeramente la comunidad de *ciencias computacionales* que visualiza al sistema híbrido como un programa discreto interactuando con un ambiente continuo (también es utilizada la terminología

sistemas embebidos).

Por otro lado, el área de *modelado y simulación* también ha mostrado interés en el estudio de sistemas híbridos. Consideran que los sistemas físicos pueden operar en diferentes *modos*, y la transición de un modo a otro puede ser representada como una transición discreta e instantánea. Entre los ejemplos que exponen, incluyen a circuitos eléctricos con elementos interruptores como diodos (ideales) y transistores, así como sistemas mecánicos sujetos a restricciones, por mencionar algunos. Generalmente el tiempo en que ocurre la transición es más corto que el tiempo de acción para las dinámicas de los modos en forma individual, considerando lo anterior exponen lo ventajoso que pudiera ser modelar estas transiciones como instantáneas (el instante de tiempo en el cual toma lugar la transición es llamado *tiempo del evento*). Algunos indicadores de lo prometedor que pudiera ser una representación de este tipo es la existencia y unicidad de la solución y, la *simulación* eficiente de este tipo de sistemas físicos multi-modal.

Finalmente se tiene el área de *sistemas y control*. Esta comunidad considera a los sistemas de control como sistemas jerárquicos con un nivel de decisión discreta y un nivel de implementación continua (por ejemplo control supervisor o control multi-agente), además de ligar la idea de esquemas de control conmutado y control de relé con la de sistemas híbridos. Es sabido que para algunos casos de sistemas de control no lineal, no existe una retroalimentación *continua* de estados estabilizante, pero sí un control conmutado que logre estabilizarlo (*teoría de sistemas con eventos discretos* es un caso especial de la teoría de sistemas híbridos). En aplicaciones de control en convertidores de potencia y control de movimiento, se emplean estrategias de control de naturaleza híbrida.

El objetivo principal en la definición y representación de un sistema híbrido es especificar de una manera precisa la interacción entre las dinámicas discretas y continuas. Por ello es muy importante modelar un sistema híbrido complejo como la *interconexión* de subsistemas más simples.

2.2. Representación de sistemas híbridos

La definición conceptual más básica de un sistema híbrido, con el fin de especificar su comportamiento, considera la existencia de un conjunto de posibles trayectorias asociadas a las variables continuas y discretas del sistema. Por ello, el *modelo autómata híbrido*, es la representación más adecuada para proporcionar el marco de trabajo y terminología, que definen adecuadamente las características típicas de estos sistemas.

Sabemos que existe la posibilidad de desarrollar modelos en espacio de estados descritos por ecuaciones diferenciales para representar las dinámicas continuas, y la estructuración de un autómata finito para representar las dinámicas discretas. De hecho, la definición de un autómata híbrido básicamente combina ambos aspectos (se pudiera pensar en otras opciones para su representación, para lo continuo: ecuaciones diferenciales parciales y ecuaciones diferenciales estocásticas y, para lo discreto: autómata y máquinas de reestructuración).

Para este tipo de sistemas se pueden tener diferentes representaciones, entre las que se pueden mencionar:

- **Modelos en espacio de estados en tiempo continuo**

Un sistema en espacio de estados en tiempo continuo queda descrito por un conjunto de variables de *estado* x que toma valores en \mathbb{R}^n , y un conjunto de variables *externas* w que toma valores en \mathbb{R}^q , relacionados a través de un conjunto mezclado de ecuaciones diferenciales y algebraicas de la forma

$$F(x, \dot{x}, w) = 0 \tag{2.2.1}$$

Aquí \dot{x} denota la derivada de x con respecto al tiempo. Las soluciones de (2.2.1) son funciones en el tiempo (suficientemente suaves) $x(t)$ y $w(t)$ que satisfacen

$$F(x(t), \dot{x}(t), w(t)) = 0$$

para prácticamente todos los tiempos $t \in \mathbb{R}$.

Por supuesto, la definición anterior engloba la definición más común de un sistema entrada-estado-salida en tiempo continuo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x, u)\end{aligned}\tag{2.2.2}$$

donde hemos dividido el vector de variables externas w en un subvector u tomando valores en \mathbb{R}^m y un subvector y tomando valores en \mathbb{R}^p (con $m + p = q$), llamados vector de variables de *entrada* y vector de variables de *salida* respectivamente. Las únicas ecuaciones algebraicas en (2.2.2) son aquellas que relacionan las variables de *salida* y con x y u , mientras que generalmente en (2.2.1) hay restricciones algebraicas adicionales sobre las variables de espacio de estados x .

Una de las principales ventajas de sistemas generales en espacio de estados en tiempo continuo (2.2.1) sobre sistemas entrada-estado-salida en tiempo continuo (2.2.2) es el hecho de que la primera clase está cerrada bajo interconexión, mientras que en general la segunda clase no lo está. De hecho, los métodos de modelado que están basados en modularidad (viendo al sistema como la interconexión de sistemas más pequeños) casi invariablemente conducen a un conjunto mixto de ecuaciones diferenciales y algebraicas. Por supuesto, en un número de casos puede ser relativamente fácil eliminar las ecuaciones algebraicas en variables de espacio de estado, en cuyo caso (si se pudiera dividir fácilmente w en u y y) se podría convertir (2.2.1) en (2.2.2).

Note que la definición aún no satisface completamente el sistema en tiempo continuo, dado que no se ha considerado la obtención de la solución exacta de las ecuaciones diferenciales algebraicas (2.2.1). Por ejemplo, una elección razonable (pero no la única posible) es requerir que $w(t)$ sea continuo por partes (teniendo en cuenta las discontinuidades en las “entradas”) y $x(t)$ sea continua y diferenciable por partes, con (2.2.1) siendo satisfecha para casi todo t (excepto para el punto de discontinuidad de $w(t)$ y no diferenciable de $x(t)$).

■ Autómata finito

Un autómata finito está descrito por un triple (L, A, T) . Aquí L es un conjunto finito llamado *espacio de estados*, A es un conjunto finito llamado alfabeto cuyos elementos son llamados símbolos. T es la regla de transición; esto es un subconjunto de $L \times A \times L$ y sus elementos son llamados transiciones (o aristas, o eventos). Una secuencia $(l_0, a_0, l_1, a_1, \dots, l_{n-1}, a_{n-1}, l_n)$ con $(l_i, a_i, l_{i+1}) \in T$ para $i = 1, 2, \dots, n - 1$ es llamada una trayectoria o camino.

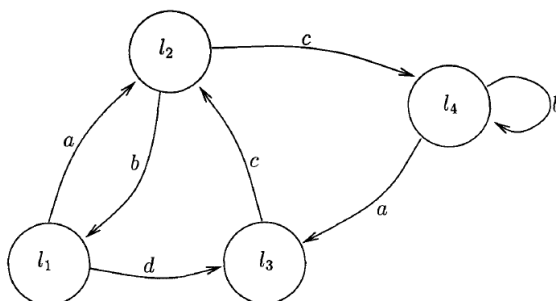


Figura 2.1: Representación de un autómata mediante gráfico con vértices

La forma usual de representación para un autómata es mediante un gráfico con vértices dados por los elementos de L , y vértices dados por los elementos de T , vea Figura 2.1. Entonces A puede ser visto como un conjunto de etiquetas que identifican las aristas. Algunas veces estas son llamadas etiquetas de sincronización, puesto que las interconexiones con otros autómatas toman lugar a través de estos símbolos. También se puede hacer más específica la definición autómata entrada-salida mediante la asociación de cada arista con *dos* símbolos, nombradas como un símbolo de *entrada* i y un símbolo de *salida* o , requiriendo que para cada símbolo de entrada haya sólo una arista originada por el estado dado con su símbolo de entrada (en ocasiones los autómatas son llamados autómata con entradas-salidas determinísticas). Un autómata entrada-salida *determinístico* puede ser representado por ecuaciones de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 l^\# &= \nu(l, i) \\
 o &= \eta(l, i)
 \end{aligned}
 \tag{2.2.3}$$

donde $l^\#$ denota el nuevo valor del estado discreto *después* de que el evento toma lugar, resultando del viejo valor del estado discreto l y la entrada i .

Comúnmente la definición de un autómata finito también incluye la especificación explícita de un subconjunto $I \subset L$ de estados *iniciales* y un subconjunto $F \subset L$ de estados *finales*. Una trayectoria $(l_0, a_0, l_1, a_1, \dots, l_{n-1}, a_{n-1}, l_n)$ es entonces llamada una trayectoria admisible si adicionalmente $l_0 \in I$ y $l_n \in F$.

En contraste con el sistema en tiempo continuo definido, el concepto de solución de un autómata finito (con o sin estados iniciales y finales) está completamente especificada: el comportamiento del autómata finito consiste de todos los caminos (admisibles). En lenguaje teórico de ciencias computacionales la definición de un autómata finito está dicha suponiendo una “semántica operacional”, completamente especificado en el lenguaje generado por el autómata finito.

Note que la definición de autómata finito no es conceptualmente muy diferente de la definición de un sistema en espacio de estados en tiempo continuo. De hecho se pudiera relacionar el espacio de estados L con el espacio de estados X , el símbolo del alfabeto A con el espacio W (donde las variables externas toman sus valores), y la regla de transición E con el conjunto de ecuaciones diferenciales-algebraicas dadas por (2.2.1). Además los caminos del autómata finito corresponden a las *soluciones* del conjunto de ecuaciones diferenciales-algebraicas. La analogía entre sistemas entrada-estado-salida en tiempo continuo (2.2.2) y el autómata entrada-salida (2.2.3) es obviamente con el operador diferenciador $\frac{d}{dt}$ reemplazado por el operador $\#$ del “siguiente estado”.

Una diferencia menor es que en el autómata finito se consideran trayectorias de duración finita, mientras que para sistemas en espacio de estados el énfasis es en soluciones extendidas en el tiempo \mathbb{R} . Esto podría ser remediado agregando al autómata finito un estado fuente, un estado resumidero y una etiqueta en blanco y, mediante la consideración de la solución definida bajo el eje completo del tiempo \mathcal{Z} el cual *comienza* en menos infinito en el estado fuente y *finaliza* en más infinito en el estado resumidero, mientras que se produce el símbolo en blanco cuando

se permanece en el estado fuente o resumidero. Además el conjunto I de estados iniciales y el conjunto F de estados finales en algunas definiciones de un autómata finito no tiene una analogía en la definición de un sistema en espacio de estados. No obstante en algún sentido, podrían ser vistos como una formulación de las especificaciones de desempeño del autómata.

En resumen, las diferencias básicas entre la definición de *modelos en espacio de estados en tiempo continuo*(1) y la de *autómata finito*(2) son las siguientes.

- Los espacios L y A son conjuntos finitos en lugar de espacios continuos como en X y W . (En algunas extensiones se permite para conjuntos contables L y A .)
- El eje de tiempo en la definición (1) es \mathbb{R} , mientras que el eje del tiempo en la definición (2) es \mathcal{Z} . Aquí, para ser precisos, \mathcal{Z} se entiende sin ninguna estructura de adición (sólo ordenamiento secuencial).
- En el modelo autómata finito el conjunto de posibles transiciones (eventos) está especificada explícitamente, mientras que la evolución de un sistema en espacio de estados en tiempo continuo está dada sólo implícitamente por el conjunto de ecuaciones diferenciales y ecuaciones algebraicas (se necesita resolver estas ecuaciones).

■ **Fórmula de flujo de eventos**

Una *fórmula de flujo de eventos* o EFF es una fórmula booleana cuyos elementos son cláusulas, ésta puede ser escrita en la forma $\mathbb{F} \vee \mathbb{E}$ donde \mathbb{F} es una combinación booleana de cláusulas de flujo y \mathbb{E} es una combinación Booleana de cláusulas de evento.

■ **Autómata Híbrido**

Combinando las definiciones (1) y (2) conlleva al siguiente tipo de definición para sistemas híbridos.

Un *autómata híbrido* está descrito por el septuple $(L, X, A, W, T, Inv, Act)$ donde los símbolos tienen el siguiente significado.

- L es un conjunto finito, llamado el conjunto de estados discretos o modos. Estos son los vértices del gráfico.
- X es el espacio de estados continuo del autómata híbrido en el cual las variables de estado continuo x toman sus valores. Para nuestro propósito $X \subset \mathbb{R}^n$ o X es un distribuidor n -dimensional.
- A es un conjunto finito de símbolos, los cuales sirven para etiquetar las aristas.
- $W = \mathbb{R}^q$ es el espacio de comunicación continua en el cual las variables externas continuas w toman sus valores.
- T es un conjunto finito de aristas llamadas transiciones (o eventos). Toda arista está definida por un quintuple $(l, a, Guard_W, Jump_W, l')$, donde $l, l' \in L, a \in A, Guard_W$ es un subconjunto de X y $Jump_W$ es una relación definida por un subconjunto de $X \times X$. La transición del estado discreto l a l' está disponible cuando el estado continuo x está en $Guard_W$, mientras que durante la transición el estado continuo x salta a un valor x' dado por la relación $(x, x') \in Jump_W$.
- Inv es un mapeo del modo L al conjunto de subconjuntos de X , que es $Inv(l) \subset X$ para todo $l \in L$. Siempre que el sistema está en un modo l , el estado continuo x debe satisfacer que $x \in Inv(l)$. El subconjunto $Inv(l)$ para $l \in L$ es llamado el *modo invariante* del modo l .
- Act es un mapeo que asigna a cada modo $l \in L$ un conjunto de ecuaciones diferenciales algebraicas F_l , relacionando las variables de estado continuas x con sus derivadas con respecto al tiempo \dot{x} y las variables continuas externas w :

$$F_l(x, \dot{x}, w) = 0 \quad (2.2.4)$$

Las soluciones de estas ecuaciones diferenciales algebraicas son llamadas las *actividades* del modo.

Claramente la definición anterior se basa en gran medida en la definición de *autómata finito*, el espacio de estados discreto L ahora llamado espacio de modos (note que el conjunto de aristas E en la definición anterior también define un subconjunto de $L \times A \times L$). De hecho, la definición de autómata híbrido extiende la de autómata finito al asociar con cada modo una dinámica continua cuyas soluciones son las actividades y , también asociando con cada transición $l \rightarrow l'$ un posible salto en el estado continuo.

Note que el *estado* de un autómata híbrido consiste de una parte discreta $l \in L$ y una parte continua en X . Además, las *variables externas* constan de una parte discreta tomando sus valores a en A y una parte continua w tomando sus valores en \mathbb{R}^q . También, las dinámicas consisten de transiciones discretas (de un modo a otro), junto con una parte continua que evoluciona en el modo invariante.

Se debe observar que la definición anterior de un autómata híbrido tiene la misma ambigüedad que la definición de un sistema en espacio de estados en tiempo continuo, ya que todavía tiene que ser complementada por una especificación precisa de las soluciones (actividades) de las ecuaciones diferenciales algebraicas asociadas con todo modo. De hecho, en la definición original de autómata híbrido las actividades de todo modo se supone son dadas explícitamente en lugar de ser generadas implícitamente como las soluciones de las ecuaciones diferenciales algebraicas. Por otro lado, alguien familiarizado con ecuaciones diferenciales podría no encontrar conveniente, en general, tener que especificar dinámicas continuas inmediatamente por las funciones de tiempo de \mathbb{R}^+ a X . En efecto, dinámicas en tiempo continuo son casi siempre descritas por conjuntos de ecuaciones diferenciales o ecuaciones algebraico-diferenciales y sólo en casos excepcionales (como sistemas dinámicos lineales) uno puede obtener soluciones explícitas. La descripción de un autómata híbrido es ilustrada en la Figura 2.2.

Una definición razonable de las trayectorias (o soluciones, o en terminología de ciencias computacionales, los *funcionamientos* o *ejecuciones*) de un autómata híbrido puede ser formulada

como sigue. Una trayectoria continua (l, δ, x, w) asociada con un modo l consiste de un tiempo δ no negativo (la *duración* de la trayectoria continua), una función continua por partes $w: [0, \delta] \rightarrow W$, y una función continua y diferenciable por partes $x: [0, \delta] \rightarrow X$ tal que

- $x(t) \in Inv(l)$ para todo $t \in (0, \delta)$,
- $F_l(x(t), \dot{x}(t), w(t)) = 0$ para todo $t \in (0, \delta)$ excepto para puntos de discontinuidad de w .

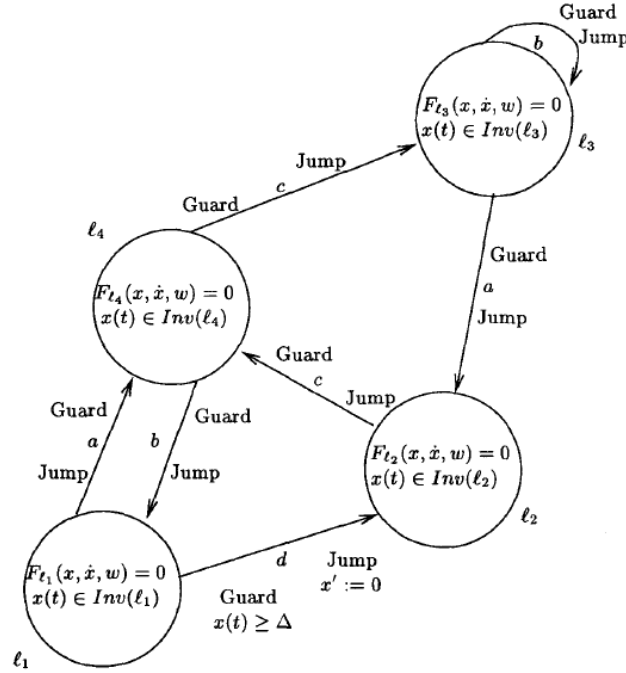


Figura 2.2: Representación gráfica del autómata híbrido

Una *trayectoria* del autómata híbrido es una secuencia (infinita) de trayectorias continuas

$$(l_0, \delta_0, x_0, w_0) \xrightarrow{a_0} (l_1, \delta_1, x_1, w_1) \xrightarrow{a_1} (l_2, \delta_2, x_2, w_2) \xrightarrow{a_2} \dots$$

tal que en los tiempos de eventos

$$t_0 = \delta_0, \quad t_1 = \delta_0 + \delta_1, \quad t_2 = \delta_0 + \delta_1 + \delta_2, \dots \quad (2.2.5)$$

las siguientes inclusiones se cumplen durante transiciones discretas:

$$x_j(t_j) \in Guard_{l_j l_{j+1}}(x_j(t_j), x_{j+1}(t_j)) \in Jump_{l_j l_{j+1}} \quad \text{para toda } j = 0, 1, 2, \dots$$

Además, para la j -ésima flecha \rightarrow en la secuencia anterior (con j iniciando en 0) uno asocia un símbolo (etiqueta) a_j , representando los valores de la “señal” discreta en la j -ésima transición.

En general, la calidad y efectividad de todo modelo matemático depende crucialmente del propósito de uso para éste. Esto es particularmente cierto para modelos de sistemas complejos y, por lo tanto aún más para sistemas híbridos. Además, modelos matemáticos del mismo sistema, los cuales son exactamente equivalentes, pueden tener propiedades muy diferentes desde el punto de vista del usuario. También, el modelo matemático que describe el funcionamiento del sistema pudiera no ser el lenguaje apropiado para la formulación de los requerimientos que el sistema espera satisfacer. Estas características están particularmente presentes en el campo de sistemas con eventos discretos (sistemas concurrentes o distribuidos) donde uno encuentra en la literatura una gran riqueza de descripciones diferentes.

En conclusión, diferentes representaciones tienen sus propios pros y contras, con ventajas y desventajas, por lo que no se puede esperar que una única representación sea situada en todos los casos y para todos los propósitos. En nuestro caso particular el autómata híbrido tiene las características necesarias para representar de una manera adecuada el fenómeno que estamos estudiando.

2.3. Ejemplos de sistemas dinámicos híbridos

Se tratarán algunos ejemplos de sistemas híbridos de diferentes áreas de aplicación, con el objetivo de ilustrar las nociones de modelos híbridos y dinámicas.

2.3.1. Pelota que rebota

Considere una pelota que rebota sobre una mesa; los rebotes son modelados como instantáneos, con un coeficiente de restitución e considerado en el intervalo abierto $(0, 1)$. No existen variables

discretas (sólo existe una locación), y hay sólo una variable continua, denotada por q ; esta variable indica la distancia entre la mesa y la pelota.

En el modelo autómatas híbrido de este sistema, el sistema conmuta de un único modo dentro de si mismo mientras que un salto (autónomo) ocurre en el estado continuo dado por la posición q y la velocidad \dot{q} , basado en que la velocidad cambia en un tiempo de evento (impacto) t desde $\dot{q}(t^{0\#})$ hacia $\dot{q}(t^\#) = -e\dot{q}(t^{0\#})$. La guarda de esta transición está dada por $q = 0, \dot{q} \leq 0$.

Las dinámicas del sistema pueden ser resumidas por la ecuación diferencial (después de normalizar todas las constantes)

$$\ddot{q} = -1 \quad (2.3.1)$$

si $q > 0$, junto con la transición discreta (regla de impacto) en un tiempo de evento τ

$$\dot{q}(\tau^\#) = -e\dot{q}(\tau^{0\#}), \quad (2.3.2)$$

lo que ocurre si $q = 0$ y $\dot{q} \leq 0$.

Además la conexión entre las dinámicas en un instante de tiempo “ordinario” y la transición discreta en un tiempo de evento τ es dada por las condiciones de compatibilidad

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow \tau} q(t) &= q(\tau^{0\#}) = q(\tau^\#) = \lim_{t \downarrow \tau} q(t) \\ \lim_{t \uparrow \tau} \dot{q}(t) &= \dot{q}(\tau^{0\#}) \\ \dot{q}(\tau^\#) &= \lim_{t \downarrow \tau} \dot{q}(t). \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Utilizando la convención de que las variables de estado son continuas a través de los eventos a menos que sea indicado de otra manera, se pueden escribir las ecuaciones (2.3.1) y (2.3.2) en una forma alternativa y más compacta como la EFF (en el vector de estados continuo $x = (q, \dot{q})$)

$$\left| \begin{array}{l} q \geq 0, \quad \ddot{q} = -1 \\ q = 0, \quad \dot{q}^+ = -e\dot{q}^- \end{array} \right. \quad (2.3.4)$$

Queda claro que el sistema puede ser inicializado consistentemente mediante la prescripción $q(0^-)$ y $\dot{q}(0^-)$, con $q(0^-) \geq 0$. En general puede ser una cuestión no trivial para una EFF para determinar los datos que uno tiene que proporcionar a 0^- con el fin de asegurar la existencia de una única solución con estos datos iniciales. Prescribiendo el dato a 0^- en lugar de en 0 permite que 0 sea un tiempo de evento.

En este ejemplo, los tiempos de evento deben tener puntos de acumulación; por ejemplo si se ajusta $q(0^-) = 0$ y $\dot{q}(0^-) = 1$, entonces es fácilmente verificado que los rebotes toman lugar en los tiempos $2, 2 + 2e, 2 + 2e + 2e^2, \dots$, así que se tiene un punto de acumulación en $\frac{2}{1-e}$. Sin embargo permanecemos dispuestos a definir una solución:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\tau &= \left\{ 2 \sum_{j=0}^{k-1} e^j \mid k \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{2}{1-e} \right\} \\ q(t) &= e^k t - \frac{1}{2} \left(t - 2 \sum_{j=0}^{k-1} e^j \right)^2 \quad \text{para } t \in \left(2 \sum_{j=0}^{k-1} e^j, 2 \sum_{j=0}^k e^j \right), k = 0, 1, 2, \dots \\ &= 0 \quad \text{para } t > \frac{2}{1-e} \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

(se ha empleado la convención estándar de que una suma sobre un conjunto vacío produce cero). Se puede verificar fácilmente que ésta es una solución diferenciable a trozos para (2.3.4) que es continua en el sentido de que los límites izquierdo y derecho de $q(t)$ existen y son iguales uno con el otro para todo t . Note que en el presente ejemplo la trayectoria híbrida puede ser naturalmente extendida *después* de la acumulación de puntos $t = 2(1-e)^{-1}$ de tiempos de eventos, ya que ambos estados el continuo y el discreto (hay sólo uno) convergen al punto de acumulación. En el presente caso la extensión sólo es la trayectoria cero, pero es fácil modificar el ejemplo de tal manera que la extensión

sea más complicada. Para algunos ejemplos de sistemas híbridos que tienen más de un modo, donde la existencia de una extensión después del punto de acumulación es más problemática.

2.3.2. Convertidor de potencia

Considere el convertidor de potencia en la Figura 2.3, tal circuito consiste en un inductor L vinculado a un campo magnético ϕ_L , un condensador C con carga eléctrica q_C y una carga resistiva R , junto con un diodo y un interruptor ideal, con posiciones del interruptor $s = 1$ (interruptor cerrado) y $s = 0$ (interruptor abierto).

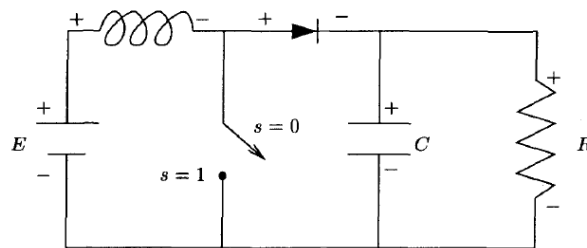


Figura 2.3: Circuito de un convertidor Boost (elevador) con diodo de bloqueo

El diodo es modelado como un diodo ideal con características de tensión-corriente dadas por la Figura 2.4. La relación constitutiva de un diodo ideal puede ser brevemente expresado como sigue:

$$v_D i_D = 0, \quad v_D \leq 0, \quad i_D \geq 0 \quad (2.3.6)$$

El circuito es utilizado para la obtención de la tensión en la resistencia de carga (tensión a la salida) que es mayor que la tensión E en la fuente de entrada; por lo tanto, es comúnmente llamado convertidor elevador.

Intuitivamente es claro que el sistema puede ser representado como un sistema híbrido con cuatro modos (o *locaciones*), correspondientes a los dos segmentos de las características del diodo y a las dos

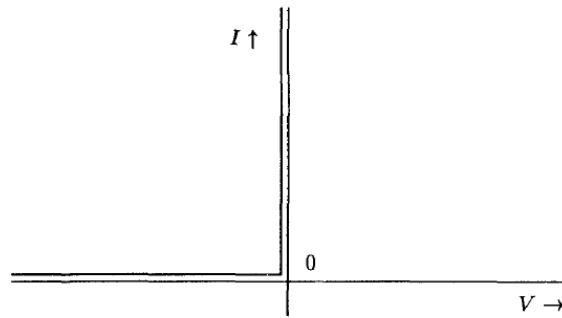


Figura 2.4: Relación V-I para el diodo ideal

posiciones del interruptor. Además, las transiciones de un modo con interruptor abierto a uno con interruptor cerrado, y viceversa, son *controladas* (inducidas externamente), mientras que las transiciones correspondientes al cambio de un segmento característico del diodo a otro son *autónomas*.

Tomando como variables de estado (energía) continuas la carga eléctrica q_C y el flujo magnético ϕ_L y, como la energía almacenada la función cuadrática $\frac{1}{2C}q_C^2 + \frac{1}{2L}\phi_L^2$ obtenemos las siguientes ecuaciones dinámicas del circuito:

$$\begin{bmatrix} \frac{dq_C}{dt} \\ \frac{d\phi_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R} & 1-s \\ s-1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{q_C}{C} \\ \frac{\phi_L}{L} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} E + \begin{bmatrix} si_D \\ (s-1)v_D \end{bmatrix} \quad (2.3.7)$$

Aquí $s = 0, 1$ denota el interruptor, E es la tensión en la fuente a la entrada y, i_D , v_D son respectivamente la corriente a través del diodo y el voltaje a través del diodo ideal. Las dinámicas del circuito están completamente especificadas en (2.3.7) junto con la posición del interruptor (una variable discreta) y la relación constitutiva del diodo ideal dado por (2.3.6).

Las dinámicas separadas de los cuatro modos son obtenidas sustituyendo las siguientes ecuaciones en (2.3.7).

- Modo 1: $s = 0$, $v_D = 0$
- Modo 2: $s = 1$, $i_D = 0$

- Modo 3: $s = 0, \quad i_D = 0$
- Modo 4: $s = 1, \quad v_D = 0$

Esto produce para cada uno de los cuatro modos las siguientes dinámicas continuas:

$$\begin{aligned} \sum_{Modo1} : & \begin{cases} \frac{dq_C}{dt} = -\frac{1}{L}\phi_L - \frac{1}{RC}q_C \\ \frac{d\phi_L}{dt} = -\frac{1}{C}q_C + E \end{cases} \\ \sum_{Modo2} : & \begin{cases} \frac{dq_C}{dt} = -\frac{1}{RC}q_C \\ \frac{d\phi_L}{dt} = E \end{cases} \\ \sum_{Modo3} : & \begin{cases} \frac{dq_C}{dt} = -\frac{1}{RC}q_C \\ \frac{d\phi_L}{dt} = 0 \end{cases} \\ \sum_{Modo4} : & \begin{cases} \frac{dq_C}{dt} = 0 \\ \frac{d\phi_L}{dt} = E \end{cases} \end{aligned}$$

Con el fin de encontrar el modo actualmente activo, primero se observa la posición del interruptor. Para $s = 0$ se tienen el modo 1 y 3. El modo 1 está determinado por $v_D = 0$ e $i_D = \frac{\phi_L}{L} \geq 0$. De la última desigualdad se obtiene el modo invariante $\phi_L \geq 0$. El modo 3 está dado por $i_D = \frac{\phi_L}{L} = 0$ y $v_D = E - \frac{q_C}{C} \leq 0$. Esto lleva a las locaciones invariante $\phi_L = 0$ y $q_C - E \geq 0$. Similarmente, si $s = 1$ entonces el sistema en el modo 2 para $i_D = 0$ y la tensión $v_D = -\frac{q_C}{C} \leq 0$, dado el modo invariante $q_C \geq 0$ y, en el modo 4 si $v_D = \frac{q_C}{C} = 0$ e $i_D \geq 0$, llevando al modo invariante $q_C = 0$.

Además, es sencillo (aunque tedioso) escribir todas las guardas de transición y las relaciones de saltos. De hecho, puede ser visto que en “operaciones normales”, lo que quiere decir, si se comienza desde un estado inicial continuo con $\phi_L \geq 0$ y $q_C \geq 0$ y -muy importante- con la entrada de tensión $E \geq 0$, entonces no ocurrirán saltos y, $\phi_L(t) \geq 0$ y $q_C \geq 0$ para todo $t > 0$.

Note que uno de los dos modos invariantes del modo 3, nombrada $q_C - E \geq 0$ explícitamente depende de las condiciones externas de la variable E . Por lo tanto, el ejemplo se ajusta en el modelo autómata híbrido generalizado, pero no en el modelo autómata híbrido. También note que toma sentido definir un espacio de estados continuo de las locaciones 3 y 4 dado por el espacio unidimensional

$\{(q_C, \phi_L) | \phi_L = 0\}$, respectivamente $\{(q_C, \phi_L) | q_C = 0\}$, de acuerdo con la observación hecha antes que en algunos casos es natural permitir el modelo autómata híbrido (generalizado) para espacio de estados *diferenciable* para varias locaciones.

Las ecuaciones (2.3.7) y la (2.3.6) proveen una EFF (incompleta) como descripción del sistema; incompleta debido a que las cláusulas de evento correspondientes al diodo no han sido especificadas. El ejemplo muestra que el modelo autómata híbrido (generalizado) puede estar lejos de una descripción eficiente de un sistema híbrido: mientras que el modelo flujos de eventos dado por (2.3.7) y (2.3.6) obtenido inmediatamente del modelado, implica la representación autómata híbrida de este ejemplo simple.

2.4. Conclusiones

A lo largo de este capítulo se han establecido diversas herramientas que hacen posible la representación de sistemas híbridos, tales como: *modelos en espacio de estados en tiempo continuo*, *autómata finito*, *fórmula de flujo de eventos* y *autómata híbrido*.

Un claro ejemplo de este tipo de sistemas son los circuitos conmutados, candidatos naturales para el análisis híbrido; particularmente el convertidor multicelular, utilizado por tal motivo para la aplicación de los esquemas de control desarrollados en este trabajo.

Desde la perspectiva del enfoque que se le da a este trabajo, concluimos que la mejor definición para *sistema híbrido*, en relación al caso del convertidor multicelular de 3 niveles, es aquella que lo identifica como una mezcla de dinámicas continuas y eventos discretos, ya que éste es considerado como un sistema lineal continuo entre conmutaciones.

Capítulo 3

Modelo de un convertidor multicelular de 3 niveles

En este capítulo se presenta el modelado de un convertidor multicelular de 3 niveles considerado como un sistema híbrido. Con el propósito de dar un marco teórico tanto para el desarrollo del modelo como para el controlador, presentamos algunos conceptos básicos relativos a los convertidores estáticos de potencia, así como algunas definiciones del modelo matemático híbrido.

3.1. Introducción

Los sistemas híbridos constituyen un área multi-disciplinaria que ha surgido en las últimas 2 décadas y se ha extendido entre los límites de ciencias computacionales, aplicaciones en ingeniería de control y matemáticas. El término sistema híbrido es empleado para representar algunos sistemas físicos complejos con estructura jerárquica y compuesta por subsistemas discretos y continuos, los cuales se comunican e interactúan el uno con el otro. Los circuitos conmutados en electrónica de potencia son candidatos naturales para el análisis híbrido, ya que son inherentemente híbridos en estructura.

Con el desarrollo de la electrónica de potencia se ha posibilitado el tratamiento y acondicionamiento de energía eléctrica a través del uso de dispositivos de estado sólido, como lo son los convertidores estáticos, que han adquirido gran relevancia puesto que es posible controlar el funcionamiento de máquinas eléctricas y conseguir un transporte eficiente en las redes eléctricas, a través de estos circuitos conmutados [13].

Entre los convertidores estáticos se encuentran los de tipo multicelular basados en una asociación en serie de células elementales de conmutación. Esta estructura, apareció a principios de los 90's, la cual permite tener restricciones de tensión compartidas por las células de conmutación conectadas en serie. De esta manera, el contenido armónico de la forma de onda es mejorado en gran medida al tener una mayor cuantización de las señales [11].

El modelado es un paso muy importante para la síntesis de leyes de control y observación. La precisión del modelado depende de los objetivos buscados, se pueden encontrar diferentes tipos de modelos para el mismo proceso y la elección entre ellos dependerá del uso que se le de. Para la síntesis de un control o de un observador, el modelo seleccionado debe ser suficientemente simple para que permita una implementación en tiempo real, pero lo suficientemente preciso para conseguir el comportamiento deseado. El modelado de un convertidor multicelular es generalmente complicado, ya que éste involucra variables continuas (corrientes y tensiones) y variables discretas (interruptores o locaciones discretas).

En la literatura disponible, pueden ser encontrados tres tipos de modelos:

1. *Modelo armónico* basado en el cálculo de la fase y la amplitud de los armónicos de la tensión, considerando la corriente de carga operando en estado estacionario [12].
2. *Modelo promediado* basado en los valores promedio de todas las variables en un período de muestreo. Sin embargo, este modelo no puede representar el balance natural de la tensión en los condensadores [10].

3. *Modelo híbrido* (también llamado modelo exacto o instantáneo) que toma en cuenta la evolución de todas las variables en el tiempo, incluyendo los estados del interruptor (locación discreta) [8, 11].

En este estudio consideraremos el modelo híbrido del convertidor multicelular, dado que para el esquema de control de regulación que se busca desarrollar, es necesario el empleo de un modelo que considere todas las características dinámicas del sistema, siendo el modelo híbrido el más indicado.

3.2. Convertidor multicelular

Los convertidores multinivel pueden ser empleados útilmente en sistemas de interfaz y controladores de motores. Estos convertidores ofrecen una tensión a la salida baja, y una alta eficiencia y un alto factor de potencia.

En la literatura [14] podemos encontrar que los convertidores multinivel se dividen en tres topologías principales:

1. Convertidor multinivel con *diodo fijador*
2. Convertidor multinivel en *cascada*
3. Convertidor multinivel con *condensadores flotantes* (multicelular)

Los convertidores multinivel requieren indispensablemente que sea controlada la tensión en los condensadores, logrando un balance de la carga de los mismos.

En este trabajo se analiza un convertidor multinivel con condensadores flotantes, del cual pudieramos mencionar las siguientes ventajas:

- Grandes cantidades de condensadores de almacenamiento pueden proporcionar operación durante cortes de energía.
- El contenido armónico es suficientemente bajo como para no necesitar filtros.
- Puede funcionar en configuración troceador o inversor.
- En una configuración trifásica, el control de cada brazo es independiente.

La estructura de un convertidor multicelular está integrada por múltiples células de conmutación, donde cada una contiene dos componentes complementarios de electrónica de potencia (que funcionan como interruptores) que pueden ser controlados a través de una señal de control binaria u_p (Figura 3.1).

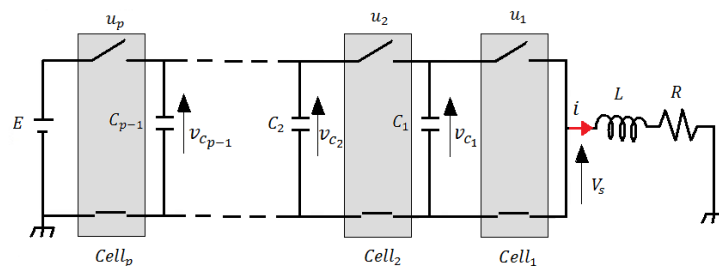


Figura 3.1: Diagrama eléctrico de un convertidor multicelular de p -células

La señal de control es igual a 1 cuando el interruptor superior de la célula está en conducción e igual a 0 cuando el interruptor complementario inferior de la célula está en conducción. Las células están asociadas en serie con una carga RL y separadas por condensadores que pueden ser considerados como fuentes de tensión continuas.

El convertidor de p -células tiene $p - 1$ fuentes de tensión flotantes. Con el fin de asegurar condiciones de operación normales, es necesario garantizar una distribución balanceada de las tensiones flotantes ($v_{c_{(p-1)}} = (p - 1)E/p$). La tensión a la salida V_s posee $(p + 1)$ niveles ($0, E/p, \dots, (p - 1)E/p, E$).

3.2.1. Modelo híbrido de un convertidor multicelular

El modelo del sistema se obtiene a partir de las leyes de Kirchoff aplicadas al circuito eléctrico (Figura 3.1) representado por p ecuaciones diferenciales, para el caso del convertidor multicelular de 2 células es necesario 2 ecuaciones diferenciales, quedando la representación en espacio de estados en términos de las tensiones flotantes $v_{c_{p-1}}$ y de la corriente en la carga i .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_{c_1}}{dt} = \frac{1}{C_1}(u_2 - u_1)i \\ \vdots \\ \frac{dv_{c_{p-1}}}{dt} = \frac{1}{C_{p-1}}(u_p - u_{p-1})i \\ \frac{di}{dt} = -(u_2 - u_1)\frac{v_{c_1}}{L} - (u_3 - u_2)\frac{v_{c_2}}{L} - \dots - (u_p - u_{p-1})\frac{v_{c_{p-1}}}{L} - \frac{R}{L}i + u_p\frac{E}{L} \end{array} \right. \quad (3.2.1)$$

El sistema (3.2.1) puede ser reescrito como sigue

$$\sum_{\text{Convertidor}} : \dot{x} = Ax + B(x)u \quad (3.2.2)$$

donde

$$x = \begin{bmatrix} v_{c_1} \\ v_{c_2} \\ \vdots \\ v_{c_{p-1}} \\ i \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

$$B(x) = \begin{bmatrix} -\frac{i}{C_1} & \frac{i}{C_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{i}{C_2} & \frac{i}{C_2} & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{i}{C_{p-1}} & \frac{i}{C_{p-1}} \\ \frac{v_{c_1}}{L} & \frac{v_{c_2} - v_{c_1}}{L} & \dots & \frac{v_{c_{p-1}} - v_{c_{p-2}}}{L} & \frac{E - v_{c_{p-1}}}{L} \end{bmatrix}$$

Como se puede apreciar, la topología del modelo resultante, es cambiante debido a que depende del estado de los interruptores; estos cambios reflejan las transiciones que ocurren entre los posibles modos de operación. Además, aunque los diferentes modos de operación tienen la propiedad de ser

lineales en forma aislada, si deseamos estudiar el comportamiento dinámico considerando los diversos modos de operación, el modelo es globalmente no lineal.

3.3. Aplicación a un convertidor multicelular de 3 niveles

Para el caso de un convertidor de 3 niveles, se cuenta con 2 interruptores principales y sus complementos ($n = 2$); lo cual da como información que existirán 2^n modos de operación, es decir, 4 modos de operación. En la Figura 3.2 se pueden apreciar los diagramas eléctricos de los 4 modos de operación.

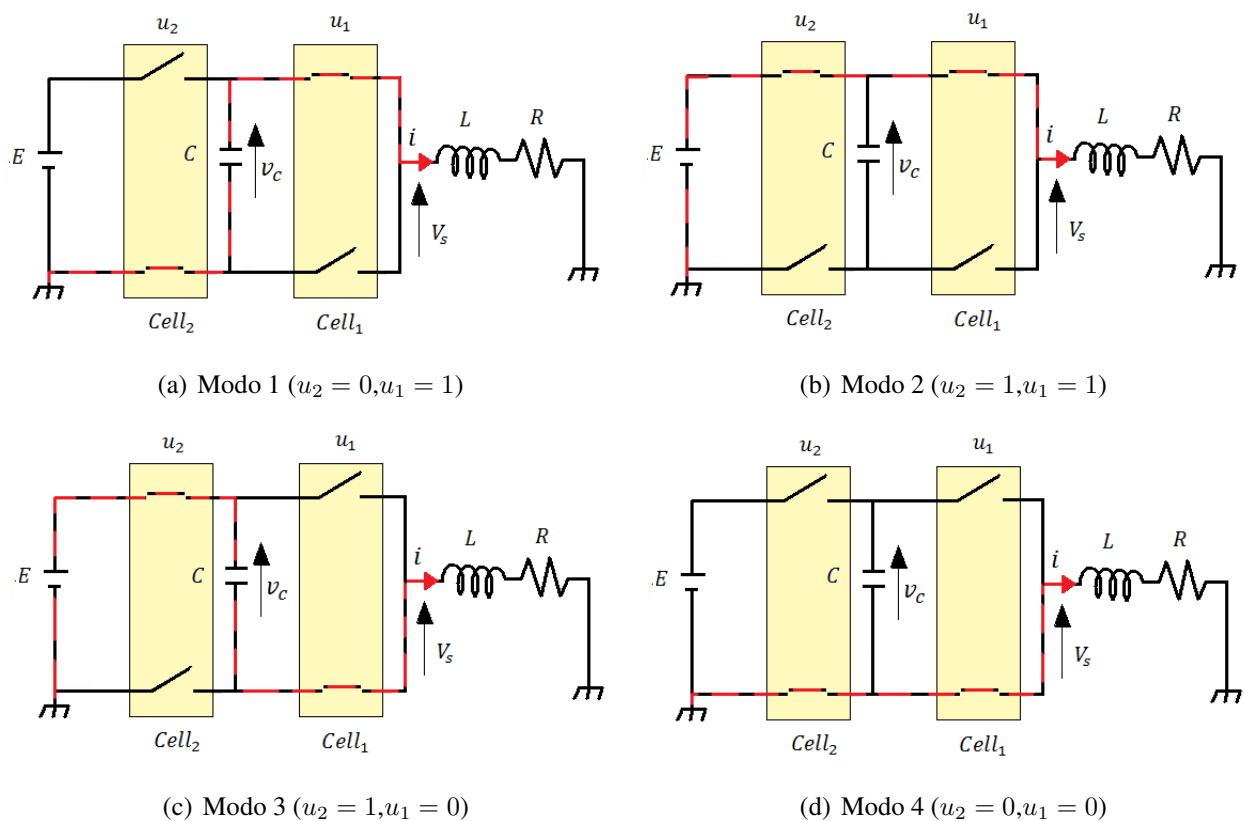


Figura 3.2: Modos de operación para un convertidor de 3 niveles (v_c - Tensión en el condensador, i - Corriente en la carga, R - Resistencia, L - Inductancia, C - Capacitancia, E - Fuente de alimentación CD, V_s - Tensión en la carga)

Nota 3.1. Cabe aclarar que la numeración de los modos es independiente de la equivalencia que pudiera tener la representación binaria u_2u_1 en el sistema decimal.

3.3.1. Modelo híbrido

El modelo instantáneo correspondiente está dado por

$$\begin{cases} \frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C} (u_2 - u_1) i \\ \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} i + \frac{E}{L} u_2 - \frac{(u_2 - u_1)}{L} v_c \end{cases} \quad (3.3.1)$$

donde E denota la fuente de alimentación CD, R representa la resistencia de carga, C es la capacitancia del condensador, L denota la inductancia del inductor, v_c es la tensión en el condensador, i representa la corriente en la carga, u_1 representa el estado del interruptor 1 (0-abierto 1-cerrado) y u_2 denota el estado del interruptor 2 (0-abierto 1-cerrado).

El vector de estados continuos es $x = [x_1 \quad x_2]^T$, donde x_1 representa la tensión flotante v_c y x_2 representa la corriente en la carga i . Dependiendo de los valores de las señales discretas u_1 y u_2 , son posibles cuatro configuraciones. Por lo tanto, se pueden distinguir cuatro modos de operación dados por $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$. Cada modo de operación está definido en el espacio de $X_{q_i} = \mathbb{R}^2, \forall q_i \in Q$. Aquí las dinámicas continuas pueden ser dadas por cada modo de operación como sigue:

$$\dot{x} = f_q(x) = A(q)x + B(q)$$

Con el sistema de ecuaciones (3.3.1) es posible la representación de los 4 modos de operación que poseen dinámicas continuas, en función de los estados de los interruptores u_1 y u_2 que representan los eventos discretos. Se puede decir que este modelo captura ambos aspectos del sistema original, nos referimos a que se trata del *modelo híbrido del convertidor de 3 niveles*, el cual servirá como punto de partida para el diseño de esquemas de control con un enfoque híbrido para este sistema.

En este caso, las dinámicas continuas son los estados de cada modo de operación, es decir, cada modo de operación tiene su propia dinámica la cual esta determinada por un sistema de ecuaciones

diferenciales; mientras que los eventos discretos, que hacen referencia a las transiciones entre modos de operación del sistema, son representados por los estados de los interruptores.

- Para el Modo 1 ($u_2 = 0, u_1 = 1$), se tiene la representación dada por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$f_{q_1}(x) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} x \quad (3.3.2)$$

El cual representa un sistema pasivo donde la energía es proveída por los condensadores flotantes. El condensador se descarga y su energía va directamente hacia la carga. Y la corriente de carga tiende a cero conforme el tiempo tiende a infinito.

- Para el Modo 2 ($u_2 = 1, u_1 = 1$), se tiene la representación dada por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$f_{q_2}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{E}{L} \end{bmatrix} \quad (3.3.3)$$

En este caso, la energía es proveída por la fuente de tensión E . La corriente de carga se incrementa y la tensión del condensador flotante permanece sin cambio.

- Para el Modo 3 ($u_2 = 1, u_1 = 0$), se tiene la representación dada por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$f_{q_3}(x) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{E}{L} \end{bmatrix} \quad (3.3.4)$$

En este modo, el condensador almacena la energía proveída por la fuente de tensión E , mientras que la corriente de carga tiende a cero conforme el tiempo tiende a infinito.

- Para el Modo 4 ($u_2 = 0, u_1 = 0$), se tiene la representación dada por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$f_{q_4}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} x \quad (3.3.5)$$

En este modo, ninguna fuente de tensión es aplicada a la carga. La tensión del condensador flotante permanece sin cambios, pero la corriente en la carga decrece exponencialmente.

El modelo nos permite conmutar de un modo a cualquier otro, sin embargo, en la práctica existen algunas restricciones que reducen el número de transiciones admisibles. A fin de minimizar las pérdidas de energía, en general, es común imponer que en cada transición posible, sólo una modificación en los interruptores u_p es admitida. Con esta restricción el conjunto de transiciones de conmutación, del modo de operación q_i al modo de operación q_j , es encontrado y definido por

$$T = \{(q_i, q_j), \forall i \neq j, \text{ para } i, j = 1, \dots, 4\}$$

Nota 3.2. *En casos críticos excepcionales, como cuando la estabilidad del sistema está en juego, está restricción se puede relajar.*

3.3.2. Solución para los modos de operación del sistema híbrido

Dado que el comportamiento dinámico entre transiciones es lineal, podemos encontrar la solución para cada modo de operación del sistema (obtenidas en Apéndice B). Dicha solución explícita nos permite construir las *trayectorias* deseadas generadas por el controlador. Las soluciones del sistema son:

Modo 1 Retomando el sistema de ecuaciones (3.3.2) obtenemos su solución explícita entre dos conmutaciones sucesivas:

$$\begin{aligned} v_c(t - t_k) &= \left\{ \left(\frac{R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) v_c(t_k) + \left(\frac{-1}{CN} \right) i(t_k) \right\} e^{-\lambda_1(t-t_k)} \\ &+ \left\{ \left(\frac{-R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) v_c(t_k) + \left(\frac{1}{CN} \right) i(t_k) \right\} e^{-\lambda_2(t-t_k)} \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

$$\begin{aligned} i(t - t_k) &= \left\{ \left(\frac{1}{LN} \right) v_c(t_k) + \left(\frac{-R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) i(t_k) \right\} e^{-\lambda_1(t-t_k)} \\ &+ \left\{ \left(\frac{-1}{LN} \right) v_c(t_k) + \left(\frac{R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) i(t_k) \right\} e^{-\lambda_2(t-t_k)} \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

donde:

$$\lambda_1 = \frac{R}{2L} - \frac{1}{2}N$$

$$\lambda_2 = \frac{R}{2L} + \frac{1}{2}N$$

$$N = \sqrt{\frac{R^2}{L} - 4\frac{1}{LC}}$$

t_k - Tiempo en el instante inicial k

Modo 2 Retomando el sistema de ecuaciones (3.3.3) obtenemos su solución explícita entre dos conmutaciones sucesivas:

$$v_c(t - t_k) = v_c(t_k) \quad (3.3.8)$$

$$i(t - t_k) = \left[i(t_k) + \frac{-E}{R} \right] e^{-\frac{R}{L}(t-t_k)} + \frac{E}{R} \quad (3.3.9)$$

Modo 3 Retomando el sistema de ecuaciones (3.3.4) obtenemos su solución explícita entre dos conmutaciones sucesivas:

$$v_c(t - t_k) = E + \left\{ \left(\frac{R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) v_c(t_k) + \left(\frac{1}{CN} \right) i(t_k) + \frac{2E}{LCN(-\frac{R}{L} + N)} \right\} e^{-\lambda_1(t-t_k)} \\ + \left\{ \left(\frac{-R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) v_c(t_k) + \left(\frac{-1}{CN} \right) i(t_k) + \frac{2E}{LCN(\frac{R}{L} + N)} \right\} e^{-\lambda_2(t-t_k)} \quad (3.3.10)$$

$$i(t - t_k) = \left\{ \left(\frac{-1}{LN} \right) v_c(t_k) + \left(\frac{-R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) i(t_k) + \frac{E}{LN} \right\} e^{-\lambda_1(t-t_k)} \\ + \left\{ \left(\frac{1}{LN} \right) v_c(t_k) + \left(\frac{R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) i(t_k) + \frac{-E}{LN} \right\} e^{-\lambda_2(t-t_k)} \quad (3.3.11)$$

Modo 4 Retomando el sistema de ecuaciones (3.3.5) obtenemos solución explícita entre dos conmutaciones sucesivas:

$$v_c(t - t_k) = v_c(t_k) \quad (3.3.12)$$

$$i(t - t_k) = i(t_k) e^{-\frac{R}{L}(t-t_k)} \quad (3.3.13)$$

Nota 3.3. Se considera la siguiente restricción $\frac{R^2}{L} > 4\frac{1}{LC}$, es decir, el sistema se restringe a ser caracterizado por valores propios reales y diferentes.

En el siguiente capítulo, tomaremos ventaja del conocimiento de la solución entre conmutaciones sucesivas para la síntesis del controlador.

3.4. Conclusiones

El modelo obtenido para este estudio es el modelo híbrido, formalismo de sistemas híbridos para hacer referencia a aquel modelo que es lineal entre conmutaciones y a su vez es globalmente no lineal.

El modelo híbrido se considera es el más adecuado para la representación de este tipo de sistemas, ya que es el que más se pudiera asemejar a las dinámicas del sistema original en comparación al modelo promediado utilizado más frecuentemente en la literatura (ver Apéndice A).

A base del conocimiento de la solución para cada modo de operación, es posible construir una trayectoria, ya que ésta no es más que la concatenación de tales soluciones obtenidas.

Capítulo 4

Diseño de esquemas de control con enfoque híbrido

En este capítulo se desarrolla un control basado en estrategias híbridas, implementado en un convertidor multicelular de 3 niveles para dos casos de operación: baja potencia y alta potencia.

4.1. Introducción

Se propone desarrollar un control híbrido, que tome ventaja de la naturaleza híbrida del sistema tratado. La idea principal del enfoque propuesto es utilizar dos controladores independientes trabajando de manera complementaria (sólo un controlador está activo a la vez): un controlador estabilizante, el cual genera un ciclo límite alrededor de los valores de referencia que posea ciertas características deseadas y, un controlador auxiliar para llevar la trayectoria del sistema a la región de atracción del controlador estabilizante.

El principio de operación de este esquema es simple: para una condición inicial dada, generalmente fuera de la región de atracción \mathbb{R}_e del ciclo límite generado por el controlador estabilizante, se activa el controlador auxiliar. La función del controlador auxiliar es guiar la trayectoria del sistema a la región \mathbb{R}_e , y una vez detectado su ingreso en ésta, conmutar al controlador estabilizante.

La base operativa para cada controlador consiste en dividir el espacio de alcance del sistema en regiones y, establecemos para cada región determinada un modo de operación activo en relación a los valores de la corriente en la carga y de la tensión en el condensador. Cabe aclarar que el principio de operación para el controlador auxiliar y el controlador estabilizante es el mismo, la diferencia radica en la región en la cual actuarán cada uno de los modos.

Dentro de esta estrategia híbrida propuesta, el controlador auxiliar actúa como una *red de seguridad* alrededor de la región de atracción del ciclo límite. Dentro de la región de operación del controlador estabilizante se establece un ciclo límite de la trayectoria inducido por tal controlador, y si el sistema fuese afectado por una perturbación que llevara la trayectoria fuera del dominio establecido para el ciclo límite, la distribución de modos del controlador auxiliar llevaría la trayectoria de regreso dentro de tal dominio para restablecer el ciclo límite.

4.2. Modelo híbrido del convertidor multicelular para síntesis del controlador

La estrategia híbrida será desarrollada para un convertidor multicelular de 3 niveles representado como un sistema conmutado. Retomando el modelo híbrido representando al convertidor obtenido en el capítulo precedente (3.3.1), tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{dv_c}{dt} &= \frac{1}{C} (u_2 - u_1) i \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{R}{L} i + \frac{E}{L} u_2 - \frac{(u_2 - u_1)}{L} v_c\end{aligned}$$

El modelo puede ser representado en variables de estado, de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \frac{dv_c}{dt} \\ \frac{di}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{u_2 - u_1}{C} \\ -\frac{u_2 - u_1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{u_2}{L} \end{bmatrix} E$$

El modelo híbrido también puede ser completamente descrito por el siguiente sistema:

$$H = \{Q, X, Init, f, X(q), T, G\}$$

Donde:

- $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$
- $\bar{E} \subset \mathbb{R}^2$, espacio de alcance del sistema dado por R (resistencia) y E (fuente de CD).
- $X = \bar{E} = \{v_c, i\}, \quad \forall q_i \in Q$
- $Init = \mathbb{R}_a$
- $f = \{f_{q_1}(x), f_{q_2}(x), f_{q_3}(x), f_{q_4}(x)\}$
- $X(q) = \{X(q_1), X(q_2), X(q_3), X(q_4)\}$
- $T = \{(q_i, q_j), \forall i \neq j, \text{ para } i, j = 1, \dots, 4\}$
- $G = \{G(q_1, q_3), G(q_3, q_1), G(q_2, q_4), G(q_4, q_2)\}$

Retomando los conceptos del Capítulo 2, este convertidor que posee 4 modos de operación posibles, puede ser representado en la forma *autómata híbrido* (Figura 4.1).

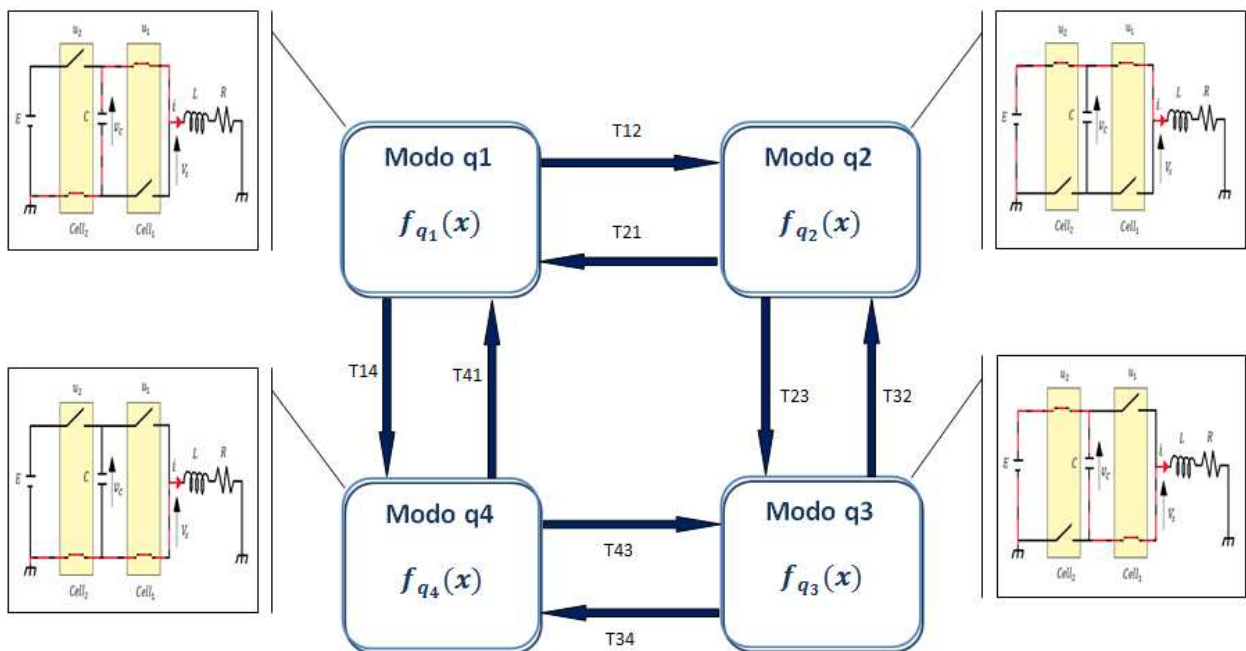


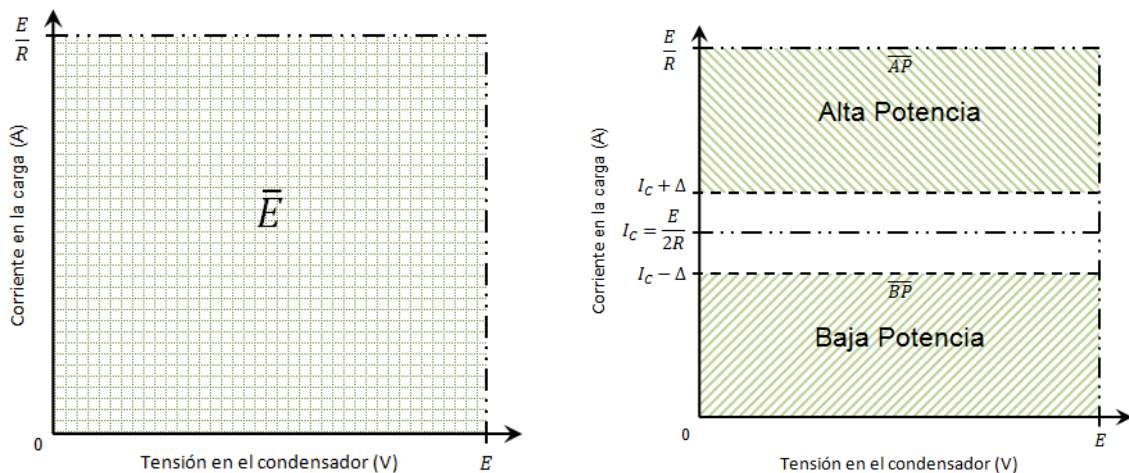
Figura 4.1: Esquema híbrido para un convertidor con 2 células

Nota 4.1. En la Figura 4.1 se puede observar la asociación de cada modo de operación con su respectivo esquema eléctrico, así como la indicación de las transiciones permitidas.

4.3. Principio de operación del controlador híbrido

El diseño del controlador híbrido consiste en el desarrollo de un control estabilizante, cuya función es inducir un ciclo límite estable alrededor de un punto de operación arbitrario deseado (respetando la regla de adyacencia, al permitir sólo el cambio del estado de un interruptor a la vez) y un *control auxiliar*, cuya función es llevar la trayectoria dentro de la región de estabilidad del ciclo límite.

Nota 4.2. Es claro, que para el sistema estudiado ningún controlador puede estabilizar asintóticamente la trayectoria del sistema en un punto de operación deseado, dada la naturaleza híbrida del modelo. Por tal motivo, el objetivo del controlador propuesto es generar un ciclo límite, con ciertas características alrededor de tal punto de operación.



(a) Espacio de alcance determinado para el sistema físico (b) Partición del espacio de alcance en un dominio para baja potencia y uno para alta potencia

Figura 4.2: Espacio de alcance y la división de este en dominios determinantes para la configuración de operación del control

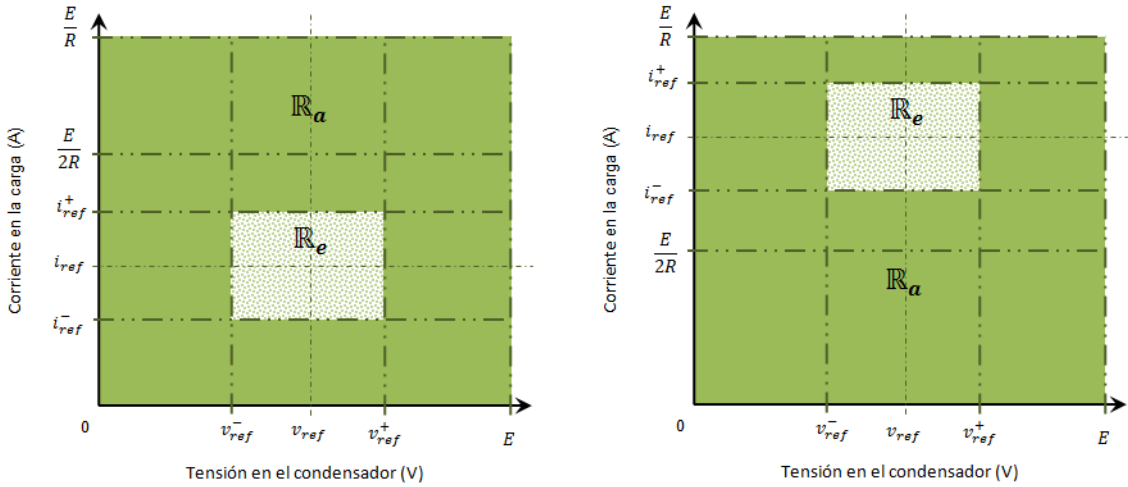
4.4. Regiones de operación

En principio es necesario delimitar el espacio de alcance \bar{E} del sistema (Figura 4.2(a)), i.e. el espacio alcanzable por el estado del sistema, el cual es función de los parámetros E y R .

Proponemos 2 configuraciones de acción para el control, definidas como control para *baja potencia* y control para *alta potencia*. El controlador (baja potencia o alta potencia) a utilizar es determinado en base a los parámetros y la ubicación de la región \mathbb{R}_e en el espacio de alcance del sistema. Tenemos una región de baja potencia llamada \overline{BP} y una región de alta potencia llamada \overline{AP} (Figura 4.2(b)), para las cuales se establece lo siguiente:

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : [(0 \leq v_c \leq E) \wedge (0 \leq i \leq \frac{E}{R})]\} \\ \overline{BP} &= \{x \in \bar{E} : [(0 \leq v_c \leq E) \wedge (0 \leq i \leq \frac{E}{2R} - \Delta)]\} \\ \overline{AP} &= \{x \in \bar{E} : [(0 \leq v_c \leq E) \wedge (\frac{E}{2R} + \Delta \leq i \leq \frac{E}{R})]\}\end{aligned}$$

donde Δ define una región alrededor de $\frac{E}{2R}$ (la forma de calcular el valor Δ será abordada posteriormente).



(a) Distribución de \mathbb{R}_e y \mathbb{R}_a para baja potencia

(b) Distribución de \mathbb{R}_e y \mathbb{R}_a para alta potencia

Figura 4.3: Distribución de los dominios de los controladores auxiliar y estabilizante

Dentro del espacio de alcance definimos dos regiones llamadas \mathbb{R}_e y \mathbb{R}_a , las cuales determinan la región de acción para el *control estabilizante* y el *control auxiliar*, respectivamente. Cabe recordar que la estrategia de control está basada en utilizar los controladores estabilizante y auxiliar de manera complementaria por lo tanto \mathbb{R}_a es el complemento de \mathbb{R}_e ($\mathbb{R}_a = \mathbb{R}_e^c$) en el espacio alcance \bar{E} .

La región de atracción del ciclo límite \mathbb{R}_e inducida por el controlador es delimitada por cuatro barreras alrededor del punto de operación deseado $(v_{ref}, i_{ref}) \in \bar{E}$. Dichas barreras están dadas por:

$$\begin{aligned}i_{ref}^+ &= i_{ref} + \Delta i & v_{ref}^+ &= v_{ref} + \Delta v \\ i_{ref}^- &= i_{ref} - \Delta i & v_{ref}^- &= v_{ref} - \Delta v\end{aligned}$$

donde:

i_{ref} :	Corriente de referencia	v_{ref} :	Tensión de referencia
i_{ref}^+ :	Corriente de referencia superior	v_{ref}^+ :	Tensión de referencia superior
i_{ref}^- :	Corriente de referencia inferior	v_{ref}^- :	Tensión de referencia inferior
Δi :	Variación para la corriente de referencia	Δv :	Variación para la tensión de referencia

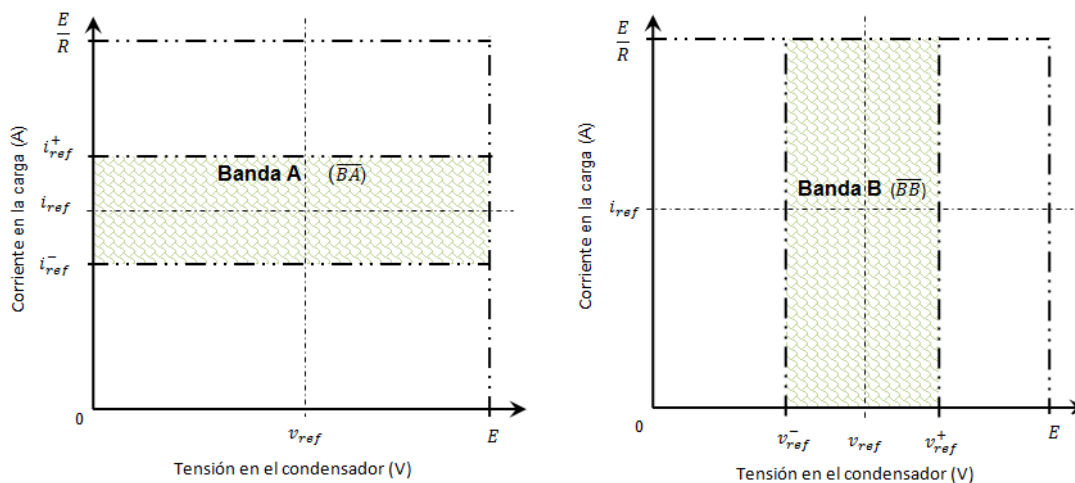
Utilizando las definiciones anteriores, las regiones de operación de los controladores complementarios están dadas por:

$$\mathbb{R}_e = \{x \in \bar{E} : [(|v_c - v_{ref}| \leq \Delta v) \wedge (|i - i_{ref}| \leq \Delta i)]\}$$

$$\mathbb{R}_a = \{x \in \bar{E} \mid x \notin \mathbb{R}_e\}$$

Dependiendo de la ubicación del dominio \mathbb{R}_e se determina la configuración a utilizar; es decir, para ser utilizada la configuración de baja potencia es necesario que \mathbb{R}_e esté contenido completamente en \overline{BP} , y para ser utilizada la configuración de alta potencia es necesario que \mathbb{R}_e esté contenido completamente en \overline{AP} (Figura 4.3). Lo anterior queda dado por:

- Las condiciones para que se aplique la configuración de baja potencia son $(\mathbb{R}_e \subset \overline{BP}) \wedge (v_{ref} = \frac{E}{2})$.
- Las condiciones para que se aplique la configuración de alta potencia son $(\mathbb{R}_e \subset \overline{AP}) \wedge (v_{ref} = \frac{E}{2})$.



(a) Dominio de la banda A, delimitada por las barreras i_{ref}^+ e i_{ref}^- (b) Dominio de la banda B, delimitada por las barreras v_{ref}^+ y v_{ref}^-

Figura 4.4: Bandas de operación para el dominio de la región de atracción del ciclo límite

Además, se definen 2 barreras para la corriente en la carga, sobre el plano de fase de este sistema ($v_c - i$), tiene una banda de corriente de operación “A” y, por otro lado ubicando las 2 barreras para la tensión en el condensador, se tendrá una banda de tensión de operación “B”.(Figura 4.4)

En las secciones siguientes se hará uso de esta división del espacio de alcance.

4.5. Controlador estabilizante

Este controlador actúa una vez que se registra el ingreso de la trayectoria en la llamada región \mathbb{R}_e , generando un ciclo límite y tomando en cuenta las restricciones impuestas (i.e. $G(q_1, q_3)$, $G(q_3, q_1)$, $G(q_2, q_4)$ y $G(q_4, q_2)$ no está permitidas). Cabe aclarar que existen 2 secuencias diferentes de conmutaciones (control), para generar el ciclo límite, la determinación de cuál secuencia de conmutación será la aplicada dependerá del valor de referencia que se tenga para la corriente: control para baja potencia (cuando $i_{ref}^+ < I_C - \Delta$) y otro para alta potencia (cuando $i_{ref}^- > I_C + \Delta$).

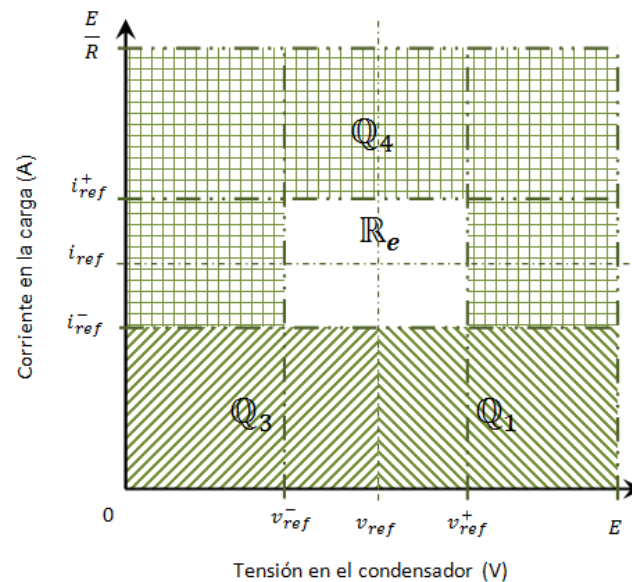


Figura 4.5: Distribución de las regiones de operación para modos específicos, configuración baja potencia

4.5.1. Controlador estabilizante para baja potencia

Para este caso se tienen las condiciones de invarianza de los modos de operación dadas por:

$$\begin{aligned}
 X(q_1) &= \{x \in \bar{E} : [(|v_c - v_{ref}| \leq \Delta v) \wedge (|i - i_{ref}| \leq \Delta i) \\
 &\quad \vee [(i \leq i_{ref}^-) \wedge (v_c \geq v_{ref})]] \} \\
 X(q_3) &= \{x \in \bar{E} : [(|v_c - v_{ref}| \leq \Delta v) \wedge (|i - i_{ref}| \leq \Delta i) \\
 &\quad \vee [(i \leq i_{ref}^-) \wedge (v_c < v_{ref})]] \} \\
 X(q_4) &= \{x \in \bar{E} : i \geq i_{ref}^-\}
 \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

Además se puede visualizar la distribución de las regiones de operación correspondientes para los modos, en el plano de fase en la Figura 4.5.

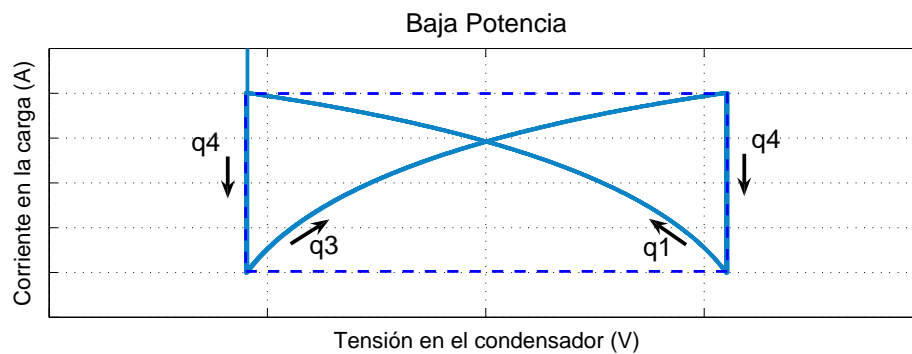


Figura 4.6: Ciclo límite inducido para el caso de baja potencia

Como podemos apreciar en la Figura 4.6, la secuencia de operación para formar el ciclo límite en baja potencia queda determinado únicamente por los modos: 1, 3 y 4.

Transiciones en los modos para baja potencia

Para el caso del controlador estabilizante en baja potencia, el cual induce un ciclo límite, se tienen las siguientes condiciones de transición:

$$T = \{(q_i, q_j), \forall i \neq j, \text{ para } i, j = 1, \dots, 4\}.$$

donde el conjunto de transiciones está definido por

$$\begin{aligned}
T(q_1, q_4) &= \left\{ x \in \bar{E} : \left[(|i - i_{ref}| \leq \Delta i) \wedge (v_c \leq v_{ref}^-) \right] \right. \\
&\quad \left. \vee \left[(v_{ref}^- \leq v_c < v_{ref}) \wedge (i \geq i_{ref}^+) \right] \right\} \\
T(q_4, q_3) &= \left\{ x \in \bar{E} : (v_{ref}^- \leq v_c < v_{ref}) \wedge (i \leq i_{ref}^-) \right\} \\
T(q_3, q_4) &= \left\{ x \in \bar{E} : \left[(|i - i_{ref}| \leq \Delta i) \wedge (v_c \geq v_{ref}^+) \right] \right. \\
&\quad \left. \vee \left[(v_{ref} \leq v_c \leq v_{ref}^+) \wedge (i \geq i_{ref}^+) \right] \right\} \\
T(q_4, q_1) &= \left\{ x \in \bar{E} : (v_{ref} \leq v_c \leq v_{ref}^+) \wedge (i \leq i_{ref}^-) \right\}
\end{aligned} \tag{4.5.2}$$

Condiciones de viabilidad de los ciclos límite para baja potencia

El controlador propuesto únicamente nos proporciona las condiciones necesarias para la existencia del ciclo al confinar la trayectoria del sistema a la región \mathbb{R}_e . Una condición suficiente para demostrar que el ciclo límite deseado no coexiste con otras trayectorias sería demostrar que es el mayor invariante dentro de dicha región.

Para asegurar la existencia del ciclo límite es necesario verificar las llamadas condiciones de viabilidad:

$$\begin{aligned}
X(q_1) &= \left\{ x \in \bar{E} : \left[(|v_c - v_{ref}| \leq \Delta v) \wedge (|i - i_{ref}| \leq \Delta i) \right] \right. \\
&\quad \left. \vee \left[(i \leq i_{ref}^-) \wedge (v_c \geq v_{ref}) \right] \right\} \\
X(q_3) &= \left\{ x \in \bar{E} : \left[(|v_c - v_{ref}| \leq \Delta v) \wedge (|i - i_{ref}| \leq \Delta i) \right] \right. \\
&\quad \left. \vee \left[(i \leq i_{ref}^-) \wedge (v_c < v_{ref}) \right] \right\} \\
X(q_4) &= \left\{ x \in \bar{E} : i \geq i_{ref}^- \right\}
\end{aligned}$$

Mediante estas condiciones pertenecientes al control estabilizante para baja potencia, es posible la construcción del ciclo límite mostrado en la Figura 4.7(b).

En la Figura 4.7(a) se puede apreciar claramente la secuencia que genera el ciclo límite, mediante la cual se pudiera obtener el período de tiempo que dura un ciclo y así determinar la frecuencia de conmutación a la cual se establece esta trayectoria periódica. Además se puede apreciar la forma que toma tal ciclo.

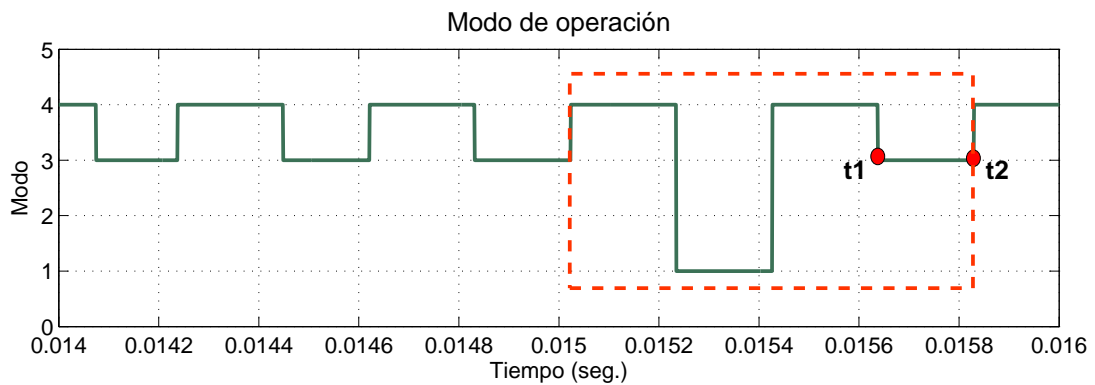
Ya que contamos con las soluciones para cada modo de operación, realizaremos a continuación un análisis de las dinámicas continuas del modo 3:

$$v_c(t - t_k) = E + \left\{ \left(\frac{R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) v_c(t_k) + \left(\frac{1}{CN} \right) i(t_k) + \frac{2E}{LCN \left(-\frac{R}{L} + N \right)} \right\} e^{-\lambda_1(t-t_k)}$$

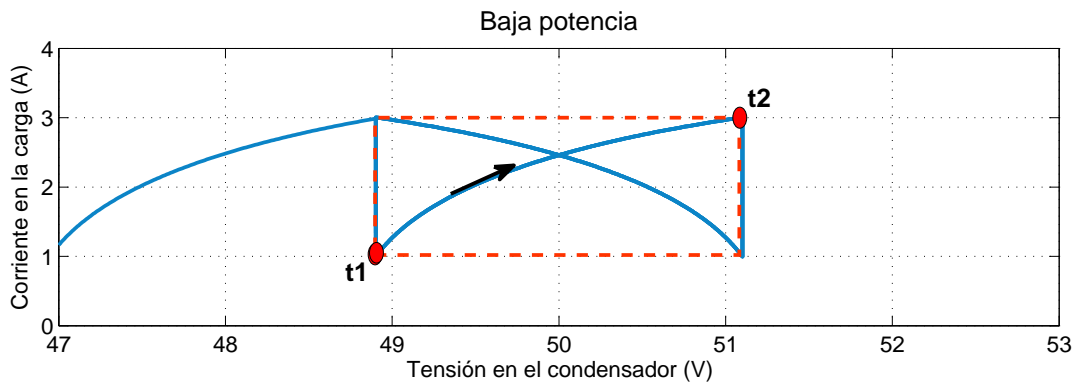
$$+ \left\{ \left(\frac{-R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) v_c(t_k) + \left(\frac{-1}{CN} \right) i(t_k) + \frac{2E}{LCN \left(\frac{R}{L} + N \right)} \right\} e^{-\lambda_2(t-t_k)}$$

$$i(t - t_k) = \left\{ \left(\frac{-1}{LN} \right) v_c(t_k) + \left(\frac{-R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) i(t_k) + \frac{E}{LN} \right\} e^{-\lambda_1(t-t_k)}$$

$$+ \left\{ \left(\frac{1}{LN} \right) v_c(t_k) + \left(\frac{R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) i(t_k) + \frac{-E}{LN} \right\} e^{-\lambda_2(t-t_k)}$$



(a) Secuencia para la formación de un ciclo límite



(b) Ciclo límite generado por el controlador estabilizante

Figura 4.7: Ciclo límite generado para el caso de baja potencia

Las condiciones de existencia para el ciclo límite con respecto al modo 3 son las siguientes (relacionado con Figura 4.7):

$$\begin{aligned} i(t1) &= i_{ref} - \Delta i \\ v(t1) &= v_{ref} - \Delta v \\ v(t2) &= v_{ref} + \Delta v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |i(t) - i_{ref}| &< \Delta i \quad \forall t \in (t1, t2) \\ |v_c(t) - v_{ref}| &< \Delta v \quad \forall t \in (t1, t2) \end{aligned}$$

$$(i_{ref} - \Delta i) < i(t2) \leq (i_{ref} + \Delta i)$$

y la condición que aseguraría el alcance del límite superior i_{ref}^+ (una cierta condición de frontera) para i es la siguiente:

$$i(t2) = i_{ref} + \Delta i$$

El análisis de viabilidad se realiza únicamente para el modo 3 ya que podemos demostrar que el modo 1 es un modo espejo del modo 3. Para esto proponemos escribir la dinámica de ambos modos en un sistema de coordenadas de error de tensión, i.e. $z_{1j} = v_c - \frac{E}{2}$, $z_{2j} = i$ con j como el modo:

$$\Sigma_{q3} : \begin{cases} \frac{dz_{13}}{dt} = \frac{1}{C} z_{23} \\ \frac{dz_{23}}{dt} = -\frac{1}{L} z_{13} - \frac{R}{L} z_{23} + \frac{E}{2L} \end{cases} \quad \Sigma_{q1} : \begin{cases} \frac{dz_{11}}{dt} = -\frac{1}{C} z_{21} \\ \frac{dz_{21}}{dt} = \frac{1}{L} z_{11} - \frac{R}{L} z_{21} + \frac{E}{2L} \end{cases}$$

Es fácil encontrar una matriz de transformación que transforme el modo 1 en el modo 3 (y viceversa), esta matriz está dada por:

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} z_{13} \\ z_{23} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{21} \end{bmatrix}$$

Así, la evolución de ambos sistemas es un espejo con respecto a la $E/2$, i.e para condiciones iniciales $z_{13}(0) = -z_{11}(0)$ y $z_{23}(0) = z_{21}(0)$ la evolución de la corriente del modo 1 y 3 será idéntica mientras para la tensión serán iguales en magnitud con signo contrario.

4.5.2. Controlador estabilizante para alta potencia

En cambio, para este caso se tienen las siguientes condiciones de invarianza, dadas por (4.5.3). Además se puede visualizar, en el plano de fase, la distribución de las regiones de operación correspondiente para los modos utilizados para inducir el ciclo límite en esta configuración Figura 4.8.

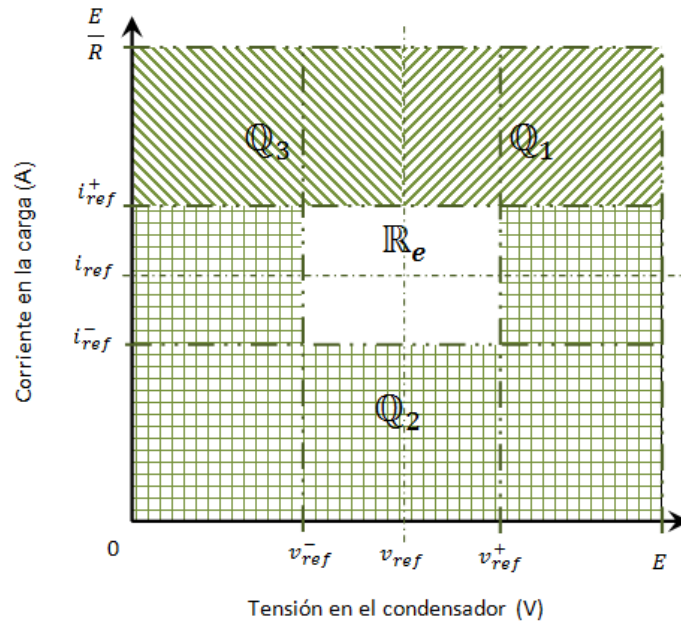


Figura 4.8: Distribución de las regiones de operación para modos específicos, configuración alta potencia

$$\begin{aligned}
 X(q_1) &= \{x \in \bar{E} : [(|v_c - v_{ref}| \leq \Delta v) \wedge (|i - i_{ref}| \leq \Delta i)] \\
 &\quad \vee [(i \geq i_{ref}^+) \wedge (v_c \geq v_{ref})] \} \\
 X(q_2) &= \{x \in \bar{E} : i \leq i_{ref}^+ \} \\
 X(q_3) &= \{x \in \bar{E} : [(|v_c - v_{ref}| \leq \Delta v) \wedge (|i - i_{ref}| \leq \Delta i)] \\
 &\quad \vee [(i \geq i_{ref}^+) \wedge (v_c < v_{ref})] \}
 \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

Para el caso de alta potencia en la Figura 4.9 se aprecia la formación del ciclo límite correspondiente, en el cual a diferencia del caso de baja potencia éste queda determinado únicamente por los modos: 1, 3 y 2.

Transiciones entre modos para alta potencia

Para el caso del controlador estabilizante en alta potencia, el cual induce un ciclo límite, se tienen las siguientes condiciones de transición:

$$T = \{(q_i, q_j), \forall i \neq j, \text{ para } i, j = 1, \dots, 4\}.$$

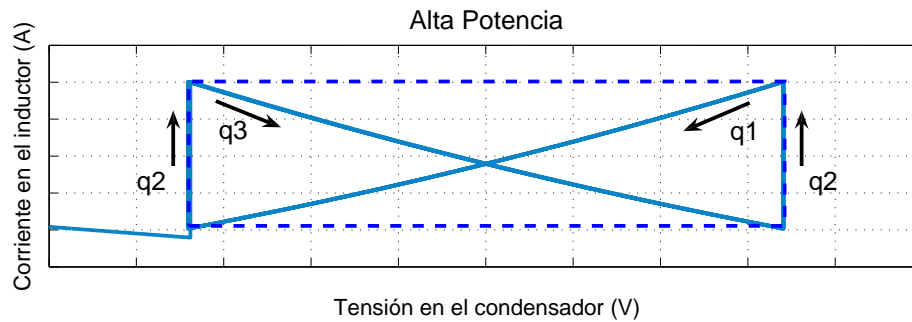


Figura 4.9: Ciclo límite inducido para el caso de alta potencia

donde el conjunto de transiciones está definido por

$$\begin{aligned}
 T(q_1, q_2) &= \left\{ x \in \bar{E} : \left[(|i - i_{ref}| \leq \Delta i) \wedge (v_c \leq v_{ref}^-) \right] \right. \\
 &\quad \left. \vee \left[(v_{ref}^- \leq v_c < v_{ref}) \wedge (i \leq i_{ref}^-) \right] \right\} \\
 T(q_2, q_3) &= \left\{ x \in \bar{E} : (v_{ref}^- \leq v_c < v_{ref}) \wedge (i \geq i_{ref}^+) \right\} \\
 T(q_3, q_2) &= \left\{ x \in \bar{E} : \left[(|i - i_{ref}| \leq \Delta i) \wedge (v_c \geq v_{ref}^+) \right] \right. \\
 &\quad \left. \vee \left[(v_{ref} \leq v_c \leq v_{ref}^+) \wedge (i \leq i_{ref}^-) \right] \right\} \\
 T(q_2, q_1) &= \left\{ x \in \bar{E} : (v_{ref} \leq v_c \leq v_{ref}^+) \wedge (i \geq i_{ref}^+) \right\}
 \end{aligned} \tag{4.5.4}$$

Condiciones de viabilidad para alta potencia

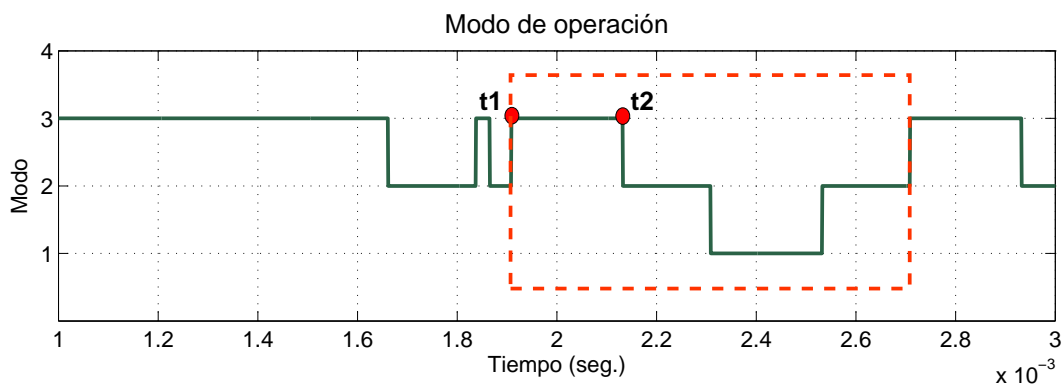
Para asegurar la existencia del ciclo límite es necesario verificar las condiciones de viabilidad:

$$\begin{aligned}
 X(q_1) &= \left\{ x \in \bar{E} : \left[(|v_c - v_{ref}| \leq \Delta v) \wedge (|i - i_{ref}| \leq \Delta i) \right] \right. \\
 &\quad \left. \vee \left[(i \geq i_{ref}^+) \wedge (v_c \geq v_{ref}) \right] \right\} \\
 X(q_2) &= \left\{ x \in \bar{E} : i \leq i_{ref}^+ \right\} \\
 X(q_3) &= \left\{ x \in \bar{E} : \left[(|v_c - v_{ref}| \leq \Delta v) \wedge (|i - i_{ref}| \leq \Delta i) \right] \right. \\
 &\quad \left. \vee \left[(i \geq i_{ref}^+) \wedge (v_c < v_{ref}) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

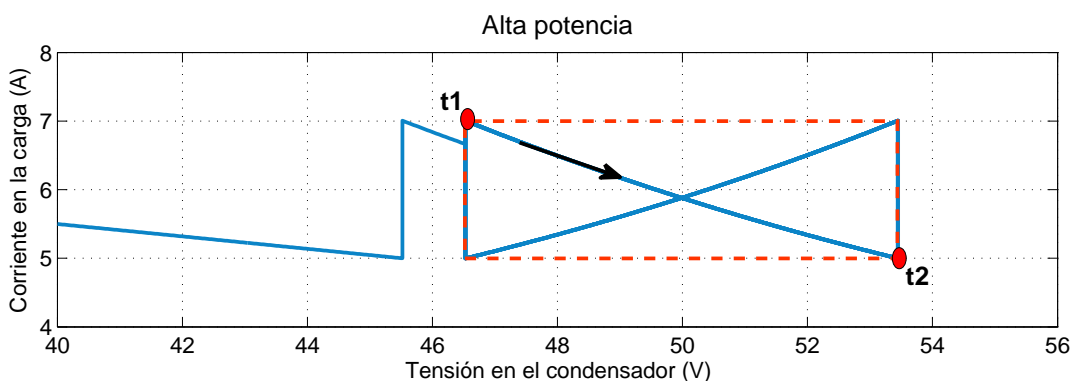
Mediante estas condiciones pertenecientes al control estabilizante para alta potencia, fue posible la construcción del siguiente ciclo límite mostrado en la Figura 4.10(b).

En la Figura 4.10(a) se puede apreciar claramente la secuencia que genera el ciclo límite, mediante la cual se podría obtener el período de tiempo que dura un ciclo y así determinar la frecuencia de conmutación a la cual se establece esta trayectoria periódica. Además se puede apreciar la forma que toma tal ciclo.

Ya que contamos con las soluciones para cada modo de operación, realizaremos a continuación un análisis de las dinámicas continuas del modo 3:



(a) Secuencia para la formación de un ciclo límite



(b) Ciclo límite generado por el controlador estabilizante

Figura 4.10: Ciclo límite generado para el caso de alta potencia

$$\begin{aligned}
 v_c(t - t_k) &= E + \left\{ \left(\frac{R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) v_c(t_k) + \left(\frac{1}{CN} \right) i(t_k) + \frac{2E}{LCN \left(-\frac{R}{L} + N \right)} \right\} e^{-\lambda_1(t-t_k)} \\
 &+ \left\{ \left(\frac{-R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) v_c(t_k) + \left(\frac{-1}{CN} \right) i(t_k) + \frac{2E}{LCN \left(\frac{R}{L} + N \right)} \right\} e^{-\lambda_2(t-t_k)} \\
 i(t - t_k) &= \left\{ \left(\frac{-1}{LN} \right) v_c(t_k) + \left(\frac{-R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) i(t_k) + \frac{E}{LN} \right\} e^{-\lambda_1(t-t_k)} \\
 &+ \left\{ \left(\frac{1}{LN} \right) v_c(t_k) + \left(\frac{R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) i(t_k) + \frac{-E}{LN} \right\} e^{-\lambda_2(t-t_k)}
 \end{aligned}$$

Las condiciones de existencia para el ciclo límite con respecto al modo 3 son las siguientes (relacionado con Figura 4.10):

$$\begin{aligned}i(t1) &= i_{ref} + \Delta i \\v_c(t1) &= v_{ref} - \Delta v \\v_c(t2) &= v_{ref} + \Delta v\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|i(t) - i_{ref}| &< \Delta i \quad \forall t \in (t1, t2) \\|v_c(t) - v_{ref}| &< \Delta v \quad \forall t \in (t1, t2)\end{aligned}$$

$$(i_{ref} - \Delta i) \leq i(t2) < (i_{ref} + \Delta i)$$

La condición que aseguraría el alcance del límite inferior i_{ref}^- para i es la siguiente:

$$i(t2) = i_{ref} - \Delta i$$

Para el modo 1 se puede generalizar el análisis anterior, ya que es el reflejo del modo 3, lo cual se demostró en el apartado anterior referente a las condiciones de viabilidad para baja potencia.

Mediante este análisis se pudieran conocer las características del ciclo límite, como son la amplitud y la frecuencia del mismo.

Nota 4.3. *Es importante mencionar que trayectorias más complejas podrían existir o coexistir con los ciclos límites inducidos por nuestra ley de control, sin embargo sólo estamos interesados en generar ciclos límites con características deseadas. Si \mathbb{R}_e está contenida por completo en \overline{BP} o en \overline{AP} , se asegura la formación de un ciclo límite con las características deseadas.*

Nota 4.4. *Las transiciones $G(q_1, q_3)$, $G(q_3, q_1)$, $G(q_2, q_4)$ y $G(q_4, q_2)$ no son admisibles debido a que no cumplen con la regla de adyacencia (excepción establecida en Nota 3.2).*

4.6. Controlador auxiliar

La función de éste es llevar la trayectoria dentro de la región de estabilidad del ciclo límite. Así como para el controlador estabilizante, se tienen dos configuraciones para el controlador auxiliar, que se emplean en complemento a cada caso, ya sea para baja potencia o para alta potencia.

4.6.1. Controlador auxiliar para baja potencia.

El controlador auxiliar desarrollado para baja potencia, tiene la siguiente distribución de regiones para la activación de modos específicos de operación (vea Figura 4.11).

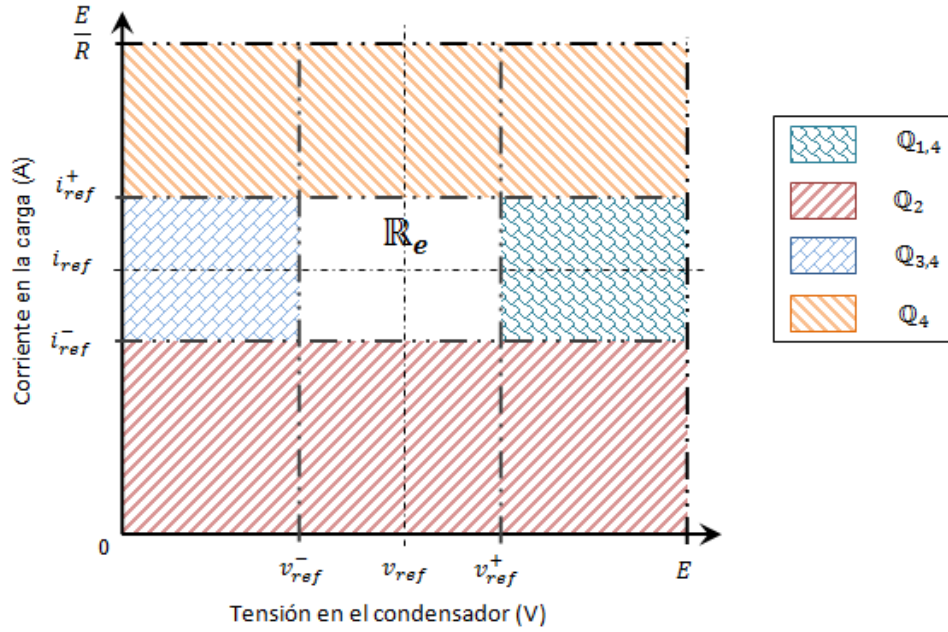


Figura 4.11: Distribución de las regiones de operación para modos específicos (baja potencia)

Las regiones están delimitadas como se denota a continuación:

$$\begin{aligned}
 Q_{1,4} &= \{x \in \bar{E} : [(v_{ref}^+ < v_c \leq E) \wedge (i_{ref}^- \leq i \leq i_{ref}^+)]\} \\
 Q_2 &= \{x \in \bar{E} : [(0 \leq v_c \leq E) \wedge (0 \leq i < i_{ref}^-)]\} \\
 Q_{3,4} &= \{x \in \bar{E} : [(0 \leq v_c < v_{ref}^-) \wedge (i_{ref}^- \leq i \leq i_{ref}^+)]\} \\
 Q_4 &= \{x \in \bar{E} : [(0 \leq v_c \leq E) \wedge (i_{ref}^+ < i \leq \frac{E}{R})]\}
 \end{aligned} \tag{4.6.1}$$

En base a la partición estructurada de regiones dada por (4.6.1), se pueden desarrollar las condiciones de invarianza dadas por (4.6.2).

$$\begin{aligned}
 X(q_1) &= \{x \in \bar{E} : (v_{ref}^+ < v_c \leq E) \wedge (i_{ref}^- \leq i \leq i_{ref}^+)\} \\
 X(q_2) &= \{x \in \bar{E} : (0 \leq v_c \leq E) \wedge (0 \leq i < i_{ref}^-)\} \\
 X(q_3) &= \{x \in \bar{E} : (0 \leq v_c < v_{ref}^-) \wedge (i_{ref}^- \leq i \leq i_{ref}^+)\} \\
 X(q_4) &= \{x \in \bar{E} : [(i_{ref}^- \leq i \leq i_{ref}^+) \wedge ((0 \leq v_c < v_{ref}^-) \vee (v_{ref}^+ < v_c \leq E))] \\
 &\quad \vee [(0 \leq v_c \leq E) \wedge (i_{ref}^+ < i \leq \frac{E}{R})]\}
 \end{aligned} \tag{4.6.2}$$

En la Figura 4.12 podemos apreciar como es que en base a tal distribución de regiones se logra que la trayectoria sea guiada dentro de \mathbb{R}_e .

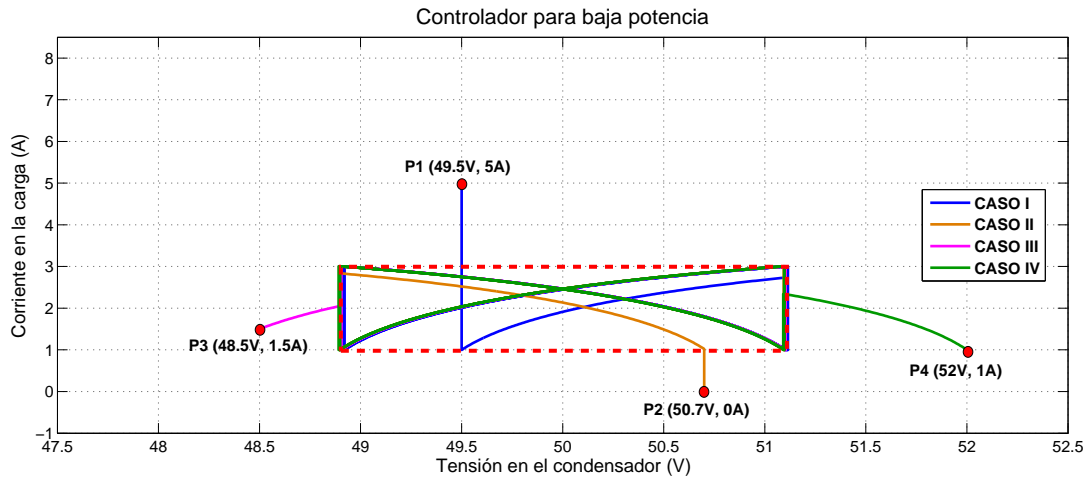


Figura 4.12: Trazo de trayectoria para 4 condiciones iniciales diferentes (baja potencia)

Transiciones entre modos para baja potencia

El conjunto de transiciones está definido por

$$T = \{(q_i, q_j), \forall i \neq j, \text{ para } i, j = 1, \dots, 4\}.$$

Para el caso del controlador auxiliar, el cual guía la trayectoria hacia la región de atracción del ciclo límite inducido, se tienen las siguientes condiciones de transición:

$$\begin{aligned}
 T(q_2, q_3) &= \{x \in \bar{E} : (0 \leq v_c < v_{ref}^-) \wedge (i \geq i_{ref}^-)\} \\
 T(q_2, q_1) &= \{x \in \bar{E} : (v_{ref}^+ < v_c \leq E) \wedge (i \geq i_{ref}^-)\} \\
 T(q_3, q_4) &= \{x \in \bar{E} : (0 \leq v_c < v_{ref}^-) \wedge (i \geq i_{ref}^+)\} \\
 T(q_1, q_4) &= \{x \in \bar{E} : (v_{ref}^+ < v_c \leq E) \wedge (i \geq i_{ref}^+)\} \\
 T(q_4, q_3) &= \{x \in \bar{E} : (0 \leq v_c < v_{ref}^-) \wedge (i \leq i_{ref}^-)\} \\
 T(q_4, q_1) &= \{x \in \bar{E} : (v_{ref}^+ < v_c \leq E) \wedge (i \leq i_{ref}^-)\}
 \end{aligned} \tag{4.6.3}$$

Nota 4.5. Las transiciones $G(q_1, q_3)$, $G(q_3, q_1)$, $G(q_2, q_4)$ y $G(q_4, q_2)$ no son admisibles debido a que no cumplen con la regla de adyacencia (excepción establecida en Nota 3.2).

Considérese que las condiciones iniciales del sistema, están definidos para

$$Init = \{x \in \mathbb{R}_a\}$$

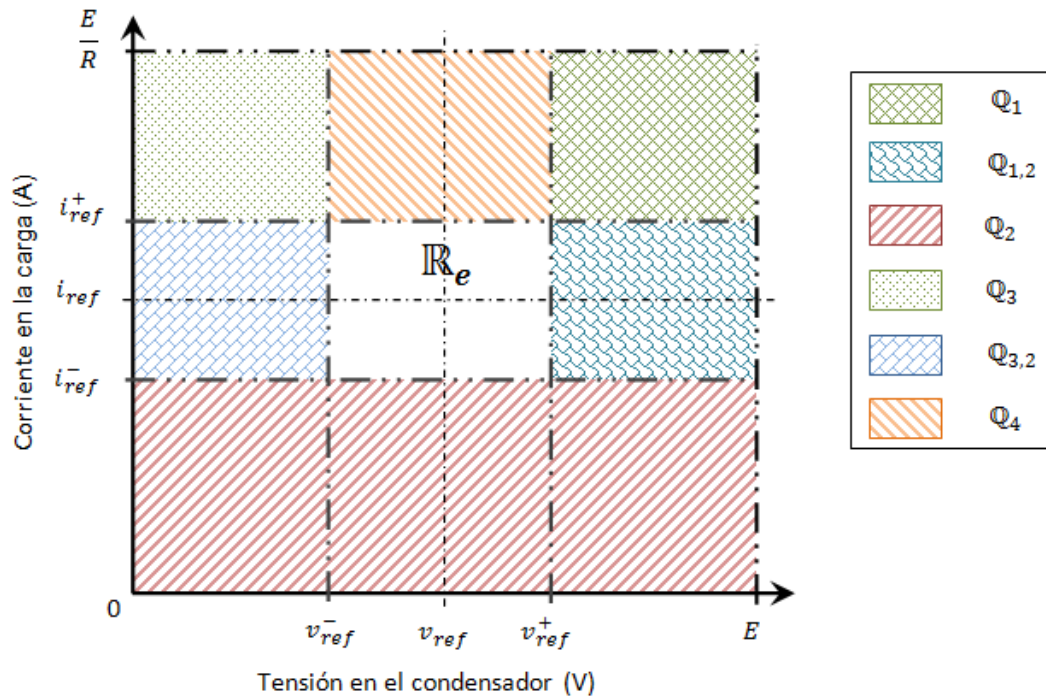


Figura 4.13: Distribución de las regiones de operación para modos específicos (alta potencia)

4.6.2. Controlador auxiliar para alta potencia

El controlador auxiliar desarrollado para alta potencia, tiene la siguiente distribución de regiones para la activación de modos específicos de operación (vea Figura 4.13).

Las regiones están delimitadas como se denota a continuación:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \left\{ x \in \bar{E} : \left[(v_{ref}^+ < v_c \leq E) \wedge (i_{ref}^+ < i \leq \frac{E}{R}) \right] \right\} \\
 Q_{1,2} &= \left\{ x \in \bar{E} : \left[(v_{ref}^+ < v_c \leq E) \wedge (i_{ref}^- \leq i \leq i_{ref}^+) \right] \right\} \\
 Q_2 &= \left\{ x \in \bar{E} : \left[(0 \leq v_c \leq E) \wedge (0 \leq i < i_{ref}^-) \right] \right\} \\
 Q_3 &= \left\{ x \in \bar{E} : \left[(0 \leq v_c < v_{ref}^-) \wedge (i_{ref}^+ < i \leq \frac{E}{R}) \right] \right\} \\
 Q_{3,2} &= \left\{ x \in \bar{E} : \left[(0 \leq v_c < v_{ref}^-) \wedge (i_{ref}^- \leq i \leq i_{ref}^+) \right] \right\} \\
 Q_4 &= \left\{ x \in \bar{E} : \left[(v_{ref}^- \leq v_c \leq v_{ref}^+) \wedge (i_{ref}^+ < i \leq \frac{E}{R}) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{4.6.4}$$

En base a la partición estructurada de regiones dada por (4.6.4), se pueden desarrollar las condiciones de invarianza dadas por (4.6.5).

$$\begin{aligned}
X(q_1) &= \left\{ x \in \bar{E} : (v_{ref}^+ < v_c \leq E) \wedge (i_{ref}^- \leq i \leq \frac{E}{R}) \right\} \\
X(q_2) &= \left\{ x \in \bar{E} : \left[(0 \leq v_c \leq E) \wedge (0 \leq i < i_{ref}^-) \right] \right. \\
&\quad \left. \vee \left[(i_{ref}^- \leq i \leq i_{ref}^+) \wedge ((0 \leq v_c < v_{ref}^-) \vee (v_{ref}^+ < v_c \leq E)) \right] \right\} \\
X(q_3) &= \left\{ x \in \bar{E} : (0 \leq v_c \leq v_{ref}^-) \wedge (i_{ref}^- \leq i \leq \frac{E}{R}) \right\} \\
X(q_4) &= \left\{ x \in \bar{E} : (|v_c - v_{ref}| \leq \Delta v) \wedge (i_{ref}^+ < i \leq \frac{E}{R}) \right\}
\end{aligned} \tag{4.6.5}$$

En la Figura 4.14 podemos apreciar como es que en base a tal distribución de regiones se logra que la trayectoria sea guiada dentro de \mathbb{R}_e .

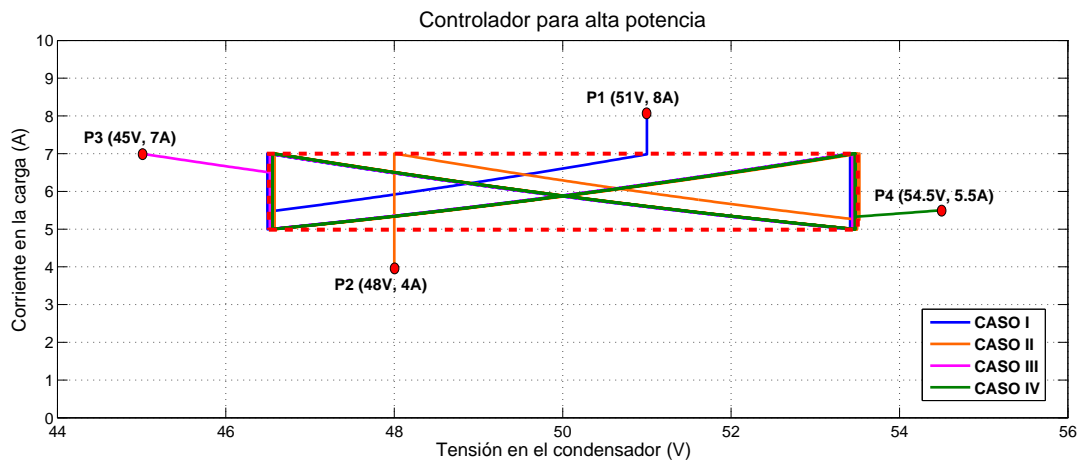


Figura 4.14: Trazo de trayectoria para 4 condiciones iniciales diferentes (alta potencia)

Transiciones entre modos para alta potencia

El conjunto de transiciones está definido por

$$T = \{(q_i, q_j), \forall i \neq j, \text{ para } i, j = 1, \dots, 4\}.$$

$$\begin{aligned}
T(q_2, q_3) &= \left\{ x \in \bar{E} : (0 \leq v_c < v_{ref}^-) \wedge (i \geq i_{ref}^+) \right\} \\
T(q_2, q_1) &= \left\{ x \in \bar{E} : (v_{ref}^+ < v_c \leq E) \wedge (i \geq i_{ref}^+) \right\} \\
T(q_3, q_2) &= \left\{ x \in \bar{E} : (0 \leq v_c < v_{ref}^-) \wedge (i \leq i_{ref}^-) \right\} \\
T(q_1, q_2) &= \left\{ x \in \bar{E} : (v_{ref}^+ < v_c \leq E) \wedge (i \leq i_{ref}^-) \right\} \\
T(q_3, q_4) &= \left\{ x \in \bar{E} : (i_{ref}^+ < i \leq \frac{E}{R}) \wedge (v_c \geq v_{ref}^-) \right\} \\
T(q_1, q_4) &= \left\{ x \in \bar{E} : (i_{ref}^+ < i \leq \frac{E}{R}) \wedge (v_c \leq v_{ref}^+) \right\}
\end{aligned} \tag{4.6.6}$$

Nota 4.6. Las transiciones $G(q_1, q_3)$, $G(q_3, q_1)$, $G(q_2, q_4)$ y $G(q_4, q_2)$ no son admisibles debido a que no cumplen con la regla de adyacencia (excepción establecida en Nota 3.2).

Considérese que las condiciones iniciales del sistema, están definidos para

$$Init = \{x \in \mathbb{R}_a\}$$

4.6.3. Análisis de estabilidad del controlador híbrido

El objetivo del controlador híbrido del convertidor es mantener la corriente en la carga i y la tensión flotante en el condensador v_c alrededor de sus valores de referencia, los cuales estarán confinados a la región \mathbb{R}_e . En esta sección, se demostrará que los conjuntos invariantes y de transiciones previamente definidos hacen posible asegurar este objetivo de control.

Teorema 4.1. *Considere que en el sistema de un convertidor con dos células existen transiciones entre los diversos modos de operación que este posee. Entonces, todas las trayectorias inicializadas en la región \mathbb{R}_a convergerá a la región \mathbb{R}_e , la cual es globalmente atractiva e invariante generando un ciclo límite estable.*

Mediante el controlador auxiliar es posible conseguir que la región \mathbb{R}_e sea globalmente atractiva, a continuación se tiene la demostración para la configuración de baja potencia y alta potencia.

Prueba para el controlador auxiliar, configuración de baja potencia.

- Región $\mathbb{Q}_{1,4}$. En esta región actúa el modo q_1 en concatenación con el modo q_4 , con la finalidad de dirigir la trayectoria inicializada dentro de $\mathbb{Q}_{1,4}$ hacia \mathbb{R}_e , en un tiempo finito t_k .

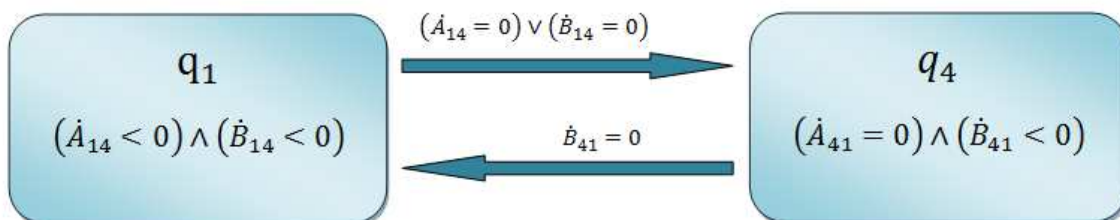


Figura 4.15: Esquema de acción del modo q_1 en concatenación con el modo q_4

Modo q_1 . Este modo es mantenido mientras no se alcance el v_{ref}^+ o la i_{ref}^+ .

$$\begin{cases} \frac{dv_c}{dt} = -\frac{1}{C}i \\ \frac{di}{dt} = \frac{1}{L}v_c - \frac{R}{L}i \end{cases}$$

Definimos A_{14} como la distancia cuadrática con respecto a la barrera v_{ref}^+ y B_{14} como la distancia cuadrática con respecto a la barrera i_{ref}^+ y, finalmente se evalúa su comportamiento con respecto al tiempo, obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} A_{14} &= \frac{1}{2} (v_c - v_{ref}^+)^2 \\ \dot{A}_{14} &= (v_c - v_{ref}^+) \frac{dv_c}{dt} = (v_c - v_{ref}^+) \left(-\frac{1}{C}i\right) \\ \dot{A}_{14} &< 0 && | (v_c - v_{ref}^+) \geq 0 \\ \\ B_{14} &= \frac{1}{2} (i - i_{ref}^+)^2 \\ \dot{B}_{14} &= (i - i_{ref}^+) \frac{di}{dt} = (i - i_{ref}^+) \left(\frac{1}{L}v_c - \frac{R}{L}i\right) \\ \dot{B}_{14} &< 0 && | [(i - i_{ref}^+) \leq 0] \wedge [(\frac{1}{L}v_c - \frac{R}{L}i) \geq 0] \end{aligned}$$

Para el modo q_1 el valor de v_c se aproxima a v_{ref}^+ , mientras que el de i se aproxima a i_{ref}^+ .

Nota 4.7. Partiendo de la expresión $\frac{1}{L}v_c - \frac{R}{L}i \geq 0$ y bajo la consideración $v_c = v_{ref} = \frac{E}{2}$, el cumplimiento de lo planteado es bajo la condición $i \leq I_c$; lo anterior se asegura, debido a que la región de operación deseada en baja potencia para la corriente queda delimitada mediante $0 \leq i \leq I_c - \Delta$.

Modo q_4 . Este modo es mantenido mientras no se alcance la i_{ref}^- .

$$\begin{cases} \frac{dv_c}{dt} = 0 \\ \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i \end{cases}$$

Definimos A_{41} como la distancia cuadrática con respecto a la barrera v_{ref}^+ y B_{41} como la distancia cuadrática con respecto a la barrera i_{ref}^- y, finalmente se evalúa su comportamiento con respecto al tiempo, obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned}
A_{41} &= \frac{1}{2} (v_c - v_{ref}^+)^2 \\
\dot{A}_{41} &= (v_c - v_{ref}^+) \frac{dv_c}{dt} = (v_c - v_{ref}^+) (0) \\
\dot{A}_{41} &= 0 \\
B_{41} &= \frac{1}{2} (i - i_{ref}^-)^2 \\
\dot{B}_{41} &= (i - i_{ref}^-) \frac{di}{dt} = (i - i_{ref}^-) \left(-\frac{R}{L}i\right) \\
\dot{B}_{41} &< 0 \quad | \quad (i - i_{ref}^-) \geq 0
\end{aligned}$$

Para el modo q_4 el valor de v_c se mantiene fijo, mientras que el de i se aproxima a i_{ref}^- .

- Región \mathbb{Q}_2 . En esta región actúa únicamente el modo q_2 , con la finalidad de dirigir la trayectoria inicializada dentro de la región \mathbb{Q}_2 hacia la región de operación deseada para la corriente (Banda A), en un tiempo finito t_k .

Modo q_2 . Este modo es mantenido mientras no se alcance el i_{ref}^- .

$$\begin{cases} \frac{dv_c}{dt} = 0 \\ \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i + \frac{E}{L} \end{cases}$$

Definimos A_2 como la distancia cuadrática con respecto a la barrera v_{ref}^+ y B_2 como la distancia cuadrática con respecto a la barrera i_{ref}^- y, para este caso se evalúa su comportamiento con respecto al tiempo, obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{1}{2} (v_c - v_{ref}^+)^2 \\
\dot{A}_2 &= (v_c - v_{ref}^+) \frac{dv_c}{dt} = (v_c - v_{ref}^+) (0) \\
\dot{A}_2 &= 0 \\
B_2 &= \frac{1}{2} (i - i_{ref}^-)^2 \\
\dot{B}_2 &= (i - i_{ref}^-) \frac{di}{dt} = (i - i_{ref}^-) \left(-\frac{R}{L}i + \frac{E}{L}\right) \\
\dot{B}_2 &< 0 \quad | \quad [(i - i_{ref}^-) \leq 0] \wedge [(-\frac{R}{L}i + \frac{E}{L}) \geq 0]
\end{aligned}$$

Para el modo q_2 el valor de v_c se mantiene fijo, mientras que el de i se aproxima a i_{ref}^- .

Nota 4.8. Partiendo de la expresión $-\frac{R}{L}i + \frac{E}{L} \geq 0$, el cumplimiento de lo planteado es bajo la condición $i \leq \frac{E}{R}$; lo anterior se asegura, debido a que la región de alcance del sistema para la corriente queda delimitada mediante $0 \leq i \leq \frac{E}{R}$.

- Región $\mathbb{Q}_{3,4}$. En esta región actúa el modo q_3 en concatenación con el modo q_4 , con la finalidad de dirigir la trayectoria inicializada dentro de $\mathbb{Q}_{3,4}$ hacia \mathbb{R}_e , en un tiempo finito t_k .

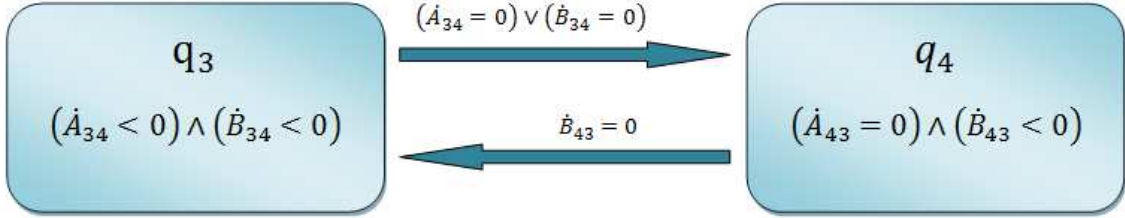


Figura 4.16: Esquema de acción del modo q_1 en concatenación con el modo q_4

Modo q_3 . Este modo es mantenido mientras no se alcance el v_{ref}^- o la i_{ref}^+ .

$$\begin{cases} \frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C}i \\ \frac{di}{dt} = -\frac{1}{L}v_c - \frac{R}{L}i + \frac{E}{L} \end{cases}$$

Definimos A_{34} como la distancia cuadrática con respecto a la barrera v_{ref}^- y B_{34} como la distancia cuadrática con respecto a la barrera i_{ref}^+ y, finalmente se evalúa su comportamiento con respecto al tiempo, obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} A_{34} &= \frac{1}{2} (v_c - v_{ref}^-)^2 \\ \dot{A}_{34} &= (v_c - v_{ref}^-) \frac{dv_c}{dt} = (v_c - v_{ref}^-) \left(\frac{1}{C}i \right) \\ \dot{A}_{34} &< 0 & | & (v_c - v_{ref}^-) \leq 0 \\ \\ B_{34} &= \frac{1}{2} (i - i_{ref}^+)^2 \\ \dot{B}_{34} &= (i - i_{ref}^+) \frac{di}{dt} = (i - i_{ref}^+) \left(-\frac{1}{L}v_c - \frac{R}{L}i + \frac{E}{L} \right) \\ \dot{B}_{34} &< 0 & | & [(i - i_{ref}^+) \leq 0] \wedge [(-\frac{1}{L}v_c - \frac{R}{L}i + \frac{E}{L}) \geq 0] \end{aligned}$$

Para el modo q_3 el valor de v_c se aproxima a v_{ref}^- , mientras que el de i se aproxima a i_{ref}^+ .

Nota 4.9. Partiendo de la expresión $-\frac{1}{L}v_c - \frac{R}{L}i + \frac{E}{L} \geq 0$ y bajo la consideración $v_c = v_{ref} = \frac{E}{2}$, el cumplimiento de lo planteado es bajo la condición $i \leq I_c$; lo anterior se asegura, debido a que la región de operación deseada en baja potencia para la corriente queda delimitada mediante $0 \leq i \leq I_c - \Delta$.

Modo q_4 . Este modo es mantenido mientras no se alcance la i_{ref}^- .

$$\begin{cases} \frac{dv_c}{dt} = 0 \\ \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i \end{cases}$$

Definimos A_{43} como la distancia cuadrática con respecto a la barrera v_{ref}^+ y B_{43} como la distancia cuadrática con respecto a la barrera i_{ref}^- y, finalmente se evalúa su comportamiento con respecto al tiempo, obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} A_{43} &= \frac{1}{2} (v_c - v_{ref}^+)^2 \\ \dot{A}_{43} &= (v_c - v_{ref}^+) \frac{dv_c}{dt} = (v_c - v_{ref}^+) (0) \end{aligned}$$

$$\dot{A}_{43} = 0$$

$$\begin{aligned} B_{43} &= \frac{1}{2} (i - i_{ref}^-)^2 \\ \dot{B}_{43} &= (i - i_{ref}^-) \frac{di}{dt} = (i - i_{ref}^-) \left(-\frac{R}{L}i\right) \end{aligned}$$

$$\dot{B}_{43} < 0 \quad | \quad (i - i_{ref}^-) \geq 0$$

Para el modo q_4 el valor de v_c se mantiene fijo, mientras que el de i se aproxima a i_{ref}^- .

- Región \mathbb{Q}_4 . En esta región actúa únicamente el modo q_4 , con la finalidad de dirigir la trayectoria inicializada dentro de la región \mathbb{Q}_4 hacia la región de operación deseada para la corriente (Banda A), en un tiempo finito t_k .

Modo q_4 . Este modo es mantenido mientras no se alcance la i_{ref}^+ .

$$\begin{cases} \frac{dv_c}{dt} = 0 \\ \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i \end{cases}$$

Definimos A_4 como la distancia cuadrática con respecto a la barrera v_{ref}^+ y B_4 como la distancia cuadrática con respecto a la barrera i_{ref}^+ y, para este caso se evalúa su comportamiento con respecto al tiempo, obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned}
A_4 &= \frac{1}{2} (v_c - v_{ref}^+)^2 \\
\dot{A}_4 &= (v_c - v_{ref}^+) \frac{dv_c}{dt} = (v_c - v_{ref}^+) (0) \\
\dot{A}_4 &= 0 \\
B_4 &= \frac{1}{2} (i - i_{ref}^+)^2 \\
\dot{B}_4 &= (i - i_{ref}^+) \frac{di}{dt} = (i - i_{ref}^+) \left(-\frac{R}{L}i\right) \\
\dot{B}_4 &< 0 \quad | \quad (i - i_{ref}^+) \geq 0
\end{aligned}$$

Para el modo q_4 el valor de v_c se mantiene fijo, mientras que el de i se aproxima a i_{ref}^+ .

Prueba para el controlador auxiliar, configuración de alta potencia.

- Región \mathbb{Q}_1 . En esta región actúa únicamente el modo q_1 , con la finalidad de dirigir la trayectoria inicializada dentro de la región \mathbb{Q}_1 hacia la región de operación deseada para la corriente (Banda A), en un tiempo finito t_k .

Modo q_1 . Este modo es mantenido mientras no se alcance la i_{ref}^+ o v_{ref}^+ .

$$\begin{cases} \frac{dv_c}{dt} = -\frac{1}{C}i \\ \frac{di}{dt} = \frac{1}{L}v_c - \frac{R}{L}i \end{cases}$$

Definimos A_1 como la distancia cuadrática con respecto a la barrera v_{ref}^+ y B_1 como la distancia cuadrática con respecto a la barrera i_{ref}^+ y, para este caso se evalúa su comportamiento con respecto al tiempo, obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{2} (v_c - v_{ref}^+)^2 \\
\dot{A}_1 &= (v_c - v_{ref}^+) \frac{dv_c}{dt} = (v_c - v_{ref}^+) \left(-\frac{1}{C}i\right) \\
\dot{A}_1 &< 0 \quad | \quad (v_c - v_{ref}^+) \geq 0 \\
B_1 &= \frac{1}{2} (i - i_{ref}^+)^2 \\
\dot{B}_1 &= (i - i_{ref}^+) \frac{di}{dt} = (i - i_{ref}^+) \left(\frac{1}{L}v_c - \frac{R}{L}i\right) \\
\dot{B}_1 &< 0 \quad | \quad [(i - i_{ref}^+) \geq 0] \wedge \left[\left(\frac{1}{L}v_c - \frac{R}{L}i\right) \leq 0\right]
\end{aligned}$$

Para el modo q_1 el valor de v_c se aproxima a v_{ref}^+ , mientras que el de i se aproxima a i_{ref}^+ .

Nota 4.10. Partiendo de la expresión $\frac{1}{L}v_c - \frac{R}{L}i \leq 0$ y bajo la consideración $v_c = v_{ref} = \frac{E}{2}$, el cumplimiento de lo planteado es bajo la condición $i \geq I_c$; lo anterior se asegura, debido a que la región de operación deseada en alta potencia para la corriente queda delimitada mediante $I_c + \Delta \leq i \leq \frac{E}{R}$.

- Región $\mathbb{Q}_{1,2}$. En esta región actúa el modo q_1 en concatenación con el modo q_2 , con la finalidad de dirigir la trayectoria inicializada dentro de $\mathbb{Q}_{1,2}$ hacia \mathbb{R}_e , en un tiempo finito t_k .

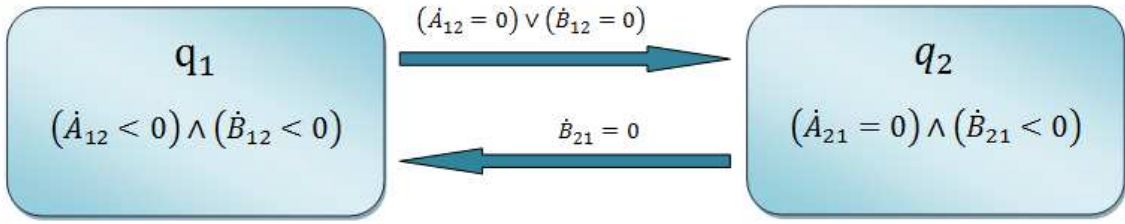


Figura 4.17: Esquema de acción del modo q_1 en concatenación con el modo q_2

Modo q_1 . Este modo es mantenido mientras no se alcance el v_{ref}^+ o la i_{ref}^- .

$$\begin{cases} \frac{dv_c}{dt} = -\frac{1}{C}i \\ \frac{di}{dt} = \frac{1}{L}v_c - \frac{R}{L}i \end{cases}$$

Definimos A_{12} como la distancia cuadrática con respecto a la barrera v_{ref}^+ y B_{12} como la distancia cuadrática con respecto a la barrera i_{ref}^- y, finalmente se evalúa su comportamiento con respecto al tiempo, obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} A_{12} &= \frac{1}{2}(v_c - v_{ref}^+)^2 \\ \dot{A}_{12} &= (v_c - v_{ref}^+) \frac{dv_c}{dt} = (v_c - v_{ref}^+) \left(-\frac{1}{C}i\right) \end{aligned}$$

$$\dot{A}_{12} < 0 \quad | \quad (v_c - v_{ref}^+) \geq 0$$

$$\begin{aligned} B_{12} &= \frac{1}{2}(i - i_{ref}^-)^2 \\ \dot{B}_{12} &= (i - i_{ref}^-) \frac{di}{dt} = (i - i_{ref}^-) \left(\frac{1}{L}v_c - \frac{R}{L}i\right) \end{aligned}$$

$$\dot{B}_{12} < 0 \quad | \quad [(i - i_{ref}^-) \geq 0] \wedge \left[\left(\frac{1}{L}v_c - \frac{R}{L}i\right) \leq 0\right]$$

Para el modo q_1 el valor de v_c se aproxima a v_{ref}^+ , mientras que el de i se aproxima a i_{ref}^- .

Nota 4.11. Partiendo de la expresión $\frac{1}{L}v_c - \frac{R}{L}i \leq 0$ y bajo la consideración $v_c = v_{ref} = \frac{E}{2}$, el cumplimiento de lo planteado es bajo la condición $i \geq I_c$; lo anterior se asegura, debido a que la región de operación deseada en alta potencia para la corriente queda delimitada mediante $I_c + \Delta \leq i \leq \frac{E}{R}$.

Modo q_2 . Este modo es mantenido mientras no se alcance la i_{ref}^+ .

$$\begin{cases} \frac{dv_c}{dt} = 0 \\ \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i + \frac{E}{L} \end{cases}$$

Definimos A_{21} como la distancia cuadrática con respecto a la barrera v_{ref}^+ y B_{21} como la distancia cuadrática con respecto a la barrera i_{ref}^+ y, finalmente se evalúa su comportamiento con respecto al tiempo, obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} A_{21} &= \frac{1}{2} (v_c - v_{ref}^+)^2 \\ \dot{A}_{21} &= (v_c - v_{ref}^+) \frac{dv_c}{dt} = (v_c - v_{ref}^+) (0) \end{aligned}$$

$$\ddot{A}_{21} = 0$$

$$\begin{aligned} B_{21} &= \frac{1}{2} (i - i_{ref}^+)^2 \\ \dot{B}_{21} &= (i - i_{ref}^+) \frac{di}{dt} = (i - i_{ref}^+) \left(-\frac{R}{L}i + \frac{E}{L}\right) \end{aligned}$$

$$\dot{B}_{21} < 0 \quad | \quad [(i - i_{ref}^+) \leq 0] \wedge [(-\frac{R}{L}i + \frac{E}{L}) \geq 0]$$

Para el modo q_2 el valor de v_c se mantiene fijo, mientras que el de i se aproxima a i_{ref}^+ .

Nota 4.12. Partiendo de la expresión $-\frac{R}{L}i + \frac{E}{L} \geq 0$, el cumplimiento de lo planteado es bajo la condición $i \leq \frac{E}{R}$; lo anterior se asegura, debido a que la región de alcance del sistema para la corriente queda delimitada mediante $0 \leq i \leq \frac{E}{R}$.

- Región \mathbb{Q}_2 . En esta región actúa únicamente el modo q_2 , con la finalidad de dirigir la trayectoria inicializada dentro de la región \mathbb{Q}_2 hacia la región de operación deseada para la corriente (Banda A), en un tiempo finito t_k .

Modo q_2 . Este modo es mantenido mientras no se alcance el i_{ref}^- .

$$\begin{cases} \frac{dv_c}{dt} = 0 \\ \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i + \frac{E}{L} \end{cases}$$

Definimos A_2 como la distancia cuadrática con respecto a la barrera v_{ref}^+ y B_2 como la distancia cuadrática con respecto a la barrera i_{ref}^- y, para este caso se evalúa su comportamiento con respecto al tiempo, obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{2} (v_c - v_{ref}^+)^2 \\ \dot{A}_2 &= (v_c - v_{ref}^+) \frac{dv_c}{dt} = (v_c - v_{ref}^+) (0) \end{aligned}$$

$$\dot{A}_2 = 0$$

$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{1}{2} (i - i_{ref}^-)^2 \\ \dot{B}_2 &= (i - i_{ref}^-) \frac{di}{dt} = (i - i_{ref}^-) \left(-\frac{R}{L}i + \frac{E}{L}\right) \end{aligned}$$

$$\dot{B}_2 < 0 \quad | \quad [(i - i_{ref}^-) \leq 0] \wedge [(-\frac{R}{L}i + \frac{E}{L}) \geq 0]$$

Para el modo q_2 el valor de v_c se mantiene fijo, mientras que el de i se aproxima a i_{ref}^- .

Nota 4.13. Partiendo de la expresión $-\frac{R}{L}i + \frac{E}{L} \geq 0$, el cumplimiento de lo planteado es bajo la condición $i \leq \frac{E}{R}$; lo anterior se asegura, debido a que la región de alcance del sistema para la corriente queda delimitada mediante $0 \leq i \leq \frac{E}{R}$.

- Región \mathbb{Q}_3 . En esta región actúa únicamente el modo q_3 , con la finalidad de dirigir la trayectoria inicializada dentro de la región \mathbb{Q}_3 hacia la región de operación deseada para la corriente (Banda A), en un tiempo finito t_k .

Modo q_3 . Este modo es mantenido mientras no se alcance la i_{ref}^+ o v_{ref}^- .

$$\begin{cases} \frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C}i \\ \frac{di}{dt} = -\frac{1}{L}v_c - \frac{R}{L}i + \frac{E}{L} \end{cases}$$

Definimos A_3 como la distancia cuadrática con respecto a la barrera v_{ref}^- y B_3 como la distancia cuadrática con respecto a la barrera i_{ref}^+ y, para este caso se evalúa su comportamiento con respecto al tiempo, obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned}
A_3 &= \frac{1}{2} (v_c - v_{ref}^-)^2 \\
\dot{A}_3 &= (v_c - v_{ref}^-) \frac{dv_c}{dt} = (v_c - v_{ref}^-) \left(\frac{1}{C}i\right) \\
\dot{A}_3 &< 0 & | (v_c - v_{ref}^-) \leq 0 \\
B_3 &= \frac{1}{2} (i - i_{ref}^+)^2 \\
\dot{B}_3 &= (i - i_{ref}^+) \frac{di}{dt} = (i - i_{ref}^+) \left(-\frac{1}{L}v_c - \frac{R}{L}i + \frac{E}{L}\right) \\
\dot{B}_3 &< 0 & | [(i - i_{ref}^+) \geq 0] \wedge [(-\frac{1}{L}v_c - \frac{R}{L}i + \frac{E}{L}) \leq 0]
\end{aligned}$$

Para el modo q_3 el valor de v_c se aproxima a v_{ref}^+ , mientras que el de i se aproxima a i_{ref}^+ .

Nota 4.14. Partiendo de la expresión $-\frac{1}{L}v_c - \frac{R}{L}i + \frac{E}{L} \leq 0$ y bajo la consideración $v_c = v_{ref} = \frac{E}{2}$, el cumplimiento de lo planteado es bajo la condición $i \geq I_c$; lo anterior se asegura, debido a que la región de operación deseada en alta potencia para la corriente queda delimitada mediante $I_c + \Delta \leq i \leq \frac{E}{R}$.

- Región $\mathbb{Q}_{3,2}$. En esta región actúa el modo q_3 en concatenación con el modo q_2 , con la finalidad de dirigir la trayectoria inicializada dentro de $\mathbb{Q}_{3,2}$ hacia \mathbb{R}_e , en un tiempo finito t_k .

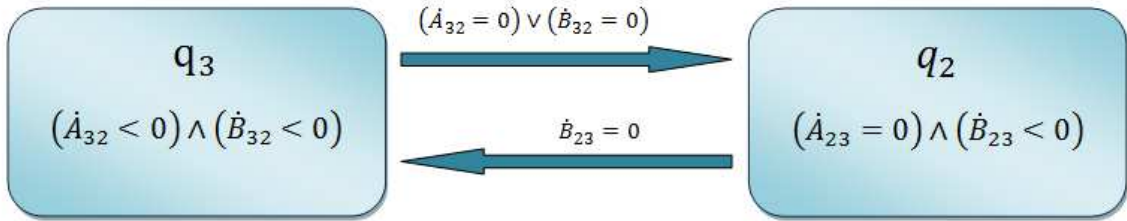


Figura 4.18: Esquema de acción del modo q_1 en concatenación con el modo q_4

Modo q_3 . Este modo es mantenido mientras no se alcance el v_{ref}^- o la i_{ref}^- .

$$\begin{cases} \frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C}i \\ \frac{di}{dt} = -\frac{1}{L}v_c - \frac{R}{L}i + \frac{E}{L} \end{cases}$$

Definimos A_{32} como la distancia cuadrática con respecto a la barrera v_{ref}^- y B_{32} como la distancia cuadrática con respecto a la barrera i_{ref}^- y, finalmente se evalúa su comportamiento con respecto al tiempo, obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned}
A_{32} &= \frac{1}{2} (v_c - v_{ref}^-)^2 \\
\dot{A}_{32} &= (v_c - v_{ref}^-) \frac{dv_c}{dt} = (v_c - v_{ref}^-) \left(\frac{1}{C}i\right) \\
\dot{A}_{32} &< 0 & | (v_c - v_{ref}^-) \leq 0 \\
B_{32} &= \frac{1}{2} (i - i_{ref}^-)^2 \\
\dot{B}_{32} &= (i - i_{ref}^-) \frac{di}{dt} = (i - i_{ref}^-) \left(-\frac{1}{L}v_c - \frac{R}{L}i + \frac{E}{L}\right) \\
\dot{B}_{32} &< 0 & | [(i - i_{ref}^-) \geq 0] \wedge [(-\frac{1}{L}v_c - \frac{R}{L}i + \frac{E}{L}) \leq 0]
\end{aligned}$$

Para el modo q_3 el valor de v_c se aproxima a v_{ref}^- , mientras que el de i se aproxima a i_{ref}^+ .

Nota 4.15. Partiendo de la expresión $-\frac{1}{L}v_c - \frac{R}{L}i + \frac{E}{L} \leq 0$ y bajo la consideración $v_c = v_{ref} = \frac{E}{2}$, el cumplimiento de lo planteado es bajo la condición $i \geq I_c$; lo anterior se asegura, debido a que la región de operación deseada en alta potencia para la corriente queda delimitada mediante $I_c + \Delta \leq i \leq \frac{E}{R}$.

Modo q_2 . Este modo es mantenido mientras no se alcance la i_{ref}^+ .

$$\begin{cases} \frac{dv_c}{dt} = 0 \\ \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i + \frac{E}{L} \end{cases}$$

Definimos A_{23} como la distancia cuadrática con respecto a la barrera v_{ref}^- y B_{23} como la distancia cuadrática con respecto a la barrera i_{ref}^+ y, finalmente se evalúa su comportamiento con respecto al tiempo, obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned}
A_{23} &= \frac{1}{2} (v_c - v_{ref}^-)^2 \\
\dot{A}_{23} &= (v_c - v_{ref}^-) \frac{dv_c}{dt} = (v_c - v_{ref}^-) (0) \\
\dot{A}_{23} &= 0 \\
B_{23} &= \frac{1}{2} (i - i_{ref}^+)^2 \\
\dot{B}_{23} &= (i - i_{ref}^+) \frac{di}{dt} = (i - i_{ref}^+) \left(-\frac{R}{L}i + \frac{E}{L}\right) \\
\dot{B}_{23} &< 0 & | [(i - i_{ref}^+) \leq 0] \wedge [(-\frac{R}{L}i + \frac{E}{L}) \geq 0]
\end{aligned}$$

Para el modo q_2 el valor de v_c se mantiene fijo, mientras que el de i se aproxima a i_{ref}^+ .

Nota 4.16. Partiendo de la expresión $-\frac{R}{L}i + \frac{E}{L} \geq 0$, el cumplimiento de lo planteado es bajo la condición $i \leq \frac{E}{R}$; lo anterior se asegura, debido a que la región de alcance del sistema para la corriente queda delimitada mediante $0 \leq i \leq \frac{E}{R}$.

- Región \mathbb{Q}_4 . En esta región actúa únicamente el modo q_4 , con la finalidad de dirigir la trayectoria inicializada dentro de la región \mathbb{Q}_4 hacia la región de operación deseada para la corriente (Banda A), en un tiempo finito t_k .

Modo q_4 . Este modo es mantenido mientras no se alcance la i_{ref}^+ .

$$\begin{cases} \frac{dv_c}{dt} = 0 \\ \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i \end{cases}$$

Definimos A_4 como la distancia cuadrática con respecto a la barrera v_{ref}^+ y B_4 como la distancia cuadrática con respecto a la barrera i_{ref}^+ y, para este caso se evalúa su comportamiento con respecto al tiempo, obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} A_4 &= \frac{1}{2} (v_c - v_{ref}^+)^2 \\ \dot{A}_4 &= (v_c - v_{ref}^+) \frac{dv_c}{dt} = (v_c - v_{ref}^+) (0) \end{aligned}$$

$$\dot{A}_4 = 0$$

$$\begin{aligned} B_4 &= \frac{1}{2} (i - i_{ref}^+)^2 \\ \dot{B}_4 &= (i - i_{ref}^+) \frac{di}{dt} = (i - i_{ref}^+) \left(-\frac{R}{L}i\right) \end{aligned}$$

$$\dot{B}_4 < 0 \quad | \quad (i - i_{ref}^+) \geq 0$$

Para el modo q_4 el valor de v_c se mantiene fijo, mientras que el de i se aproxima a i_{ref}^+ .

Invariancia de la región de atracción del ciclo límite

El ciclo límite inducido por el controlador debe estar confinado a la región \mathbb{R}_e , i.e. la región \mathbb{R}_e es invariante y una vez que la trayectoria alcanza dicha región no la abandona si no existen perturbaciones importantes. Para demostrar que la \mathbb{R}_e es invariante es suficiente estudiar sus límites:

Tanto para el caso de baja potencia como el caso de alta potencia, tenemos:

$$(v_c - v_{ref}, i - i_{ref})^T f_{q_j} \leq 0$$

para $j = 1, 2, 3, 4$.

Esto se cumple para todo $(v_c, i) \in \partial\mathbb{R}_e$, i.e. para todo punto perteneciente a la frontera de la región \mathbb{R}_e .

4.7. Existencia del ciclo límite

Previamente, en este capítulo, se estableció la formación de un ciclo límite para las configuraciones de baja potencia y de alta potencia. Como podemos observar en la Figura 4.19, la característica en común de la secuencia de modos dada para baja potencia con la dada para alta potencia, es la presencia del modo q_3 y el modo q_1 ; además, se puede apreciar como la trayectoria de estos modos para el caso (a) es siempre creciente en relación a la dinámica de la corriente y en el caso (b) es siempre decreciente.

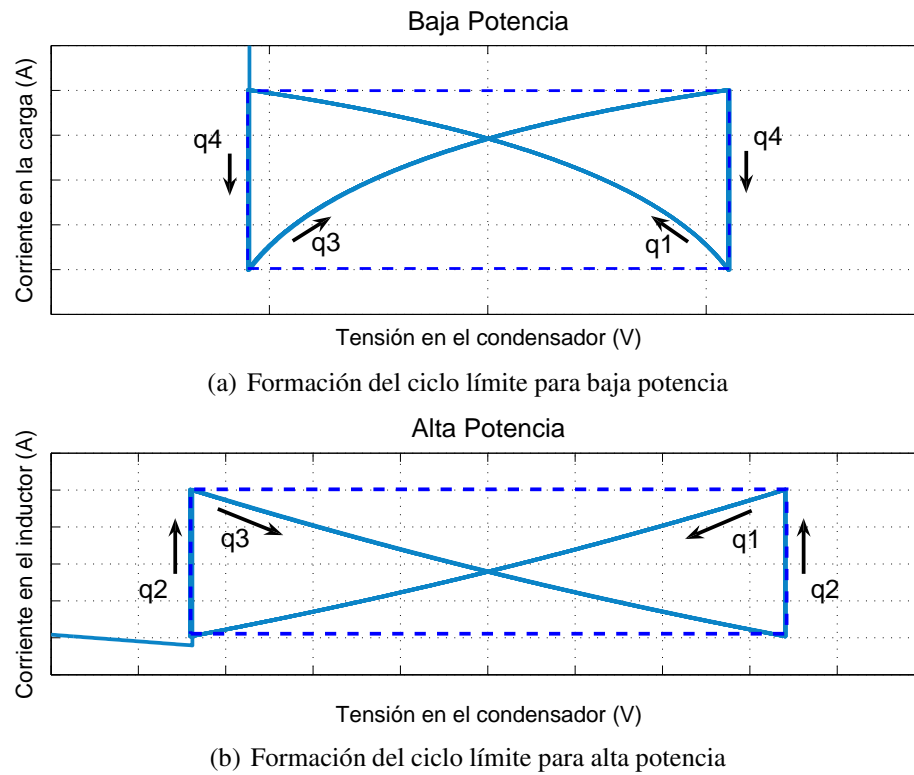


Figura 4.19: Forma generalizada de ciclo límite

Determinación del valor Δ

Para determinar el valor de Δ es necesario conocer los parámetros E , R , i_{ref} y Δi ; además de la ubicación para i_{ref}^+ e i_{ref}^- en relación a la $I_c = \frac{E}{2}$, ya que se tienen dos casos para el cálculo de este valor:

- Caso $(i_{ref}^- < I_c) \wedge (i_{ref}^+ < I_c)$

Para este caso Δ se calcula como sigue:

$$\Delta = \frac{E}{2R} - i_{ref}^+$$

- Caso $(i_{ref}^- > I_c) \wedge (i_{ref}^+ > I_c)$

Para este caso Δ se calcula como sigue:

$$\Delta = i_{ref}^- - \frac{E}{2R}$$

Nota 4.17. La existencia de este Δ nos asegura que no se presente el trazo de un ciclo límite existente en ambas regiones establecidas como \overline{BP} y \overline{AP} . Ya que para este trabajo sólo se han desarrollado configuraciones para alta o baja potencia, no se ha considerado la posible existencia de configuraciones compuestas que formen otro tipo de ciclo límite.

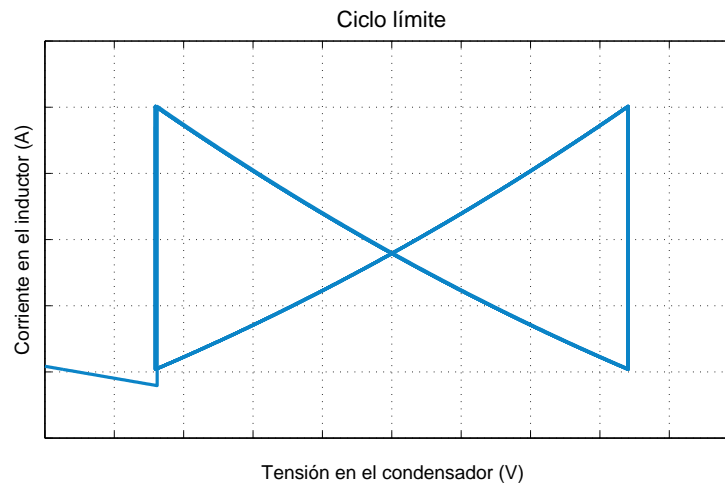


Figura 4.20: Forma del ciclo límite.

4.7.1. Cálculo del Δv crítico

En base a lo antes mencionado, se vio necesario establecer un valor crítico para Δv que nos indique un cambio de signo de la pendiente de la trayectoria en relación a la corriente. Al obtener este valor crítico podemos dar las condiciones suficientes para la formación de un ciclo límite con la forma deseada dentro de la región establecida como \mathbb{R}_e .

Se busca dar una expresión que nos permita calcular un valor crítico para Δv , con la finalidad de dar las condiciones suficientes para la formación de un ciclo límite como el que se muestra en la Figura 4.20.

Partiendo del modelo que se tiene para el modo de operación q_3 se llevaron a cabo dos análisis en relación a la configuración de operación que se adecúe a los valores dados para i_{ref} y el Δi .

$$\begin{cases} \frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C}i \\ \frac{di}{dt} = -\frac{1}{L}v_c - \frac{R}{L}i + \frac{E}{L} \end{cases}$$

- Para el caso de la configuración de alta potencia:

$$-\frac{1}{L}v_c - \frac{R}{L}i + \frac{E}{L} = 0$$

En base a lo anterior llegamos a $v_c = E - Ri$, considerando que $i = i_{ref}^-$ y, que $v_c = \frac{E}{2} + \Delta v^*$:

$$\Delta v^* = \left| \frac{E}{2} - Ri_{ref}^- \right|$$

- Para el caso de la configuración de baja potencia:

$$-\frac{1}{L}v_c - \frac{R}{L}i + \frac{E}{L} = 0$$

En base a lo anterior llegamos a $v_c = E - Ri$, considerando que $i = i_{ref}^+$ y, que $v_c = \frac{E}{2} + \Delta v^*$:

$$\Delta v^* = \frac{E}{2} - Ri_{ref}^+$$

Ahora bien, en base al valor de Δv^* obtenido, se establece el rango de valores que puede tener Δv asegurando la formación de un ciclo límite como el establecido:

$$0 < \Delta v < \Delta v^*$$

Nota 4.18. Con lo que tenemos hasta hoy día podemos tener la certeza de que ocurrirá la formación de un ciclo límite de la forma establecida dentro de la región \mathbb{R}_e , más no podemos asegurar que cubra por completo toda la región.

4.7.2. El máximo invariante en \mathbb{R}_e

Una vez establecidas las condiciones suficientes para la formación de tal ciclo límite dentro de la región \mathbb{R}_e , por lógica se procede a desarrollar un análisis con la finalidad de poder establecer las condiciones necesarias para poder llevar a cabo la formación del mayor invariante dentro de \mathbb{R}_e (conservando la forma ya establecida para cada configuración).

Considerando la formación de un ciclo límite para baja potencia, se analiza la estructuración del mismo por los modos de operación 1,3 y 4. Se desarrolla un análisis matemático basado en las soluciones obtenidas previamente para cada modo de operación.

Mediante este desarrollo se pretende establecer una expresión matemática que nos permita, calcular el valor de Δv correspondiente con los datos de diseño dados por: parámetros del sistema, valores de referencia para la tensión en el condensador v_{ref} y para la corriente en la carga i_{ref} y, finalmente dado un rizado de corriente conocido como Δi .

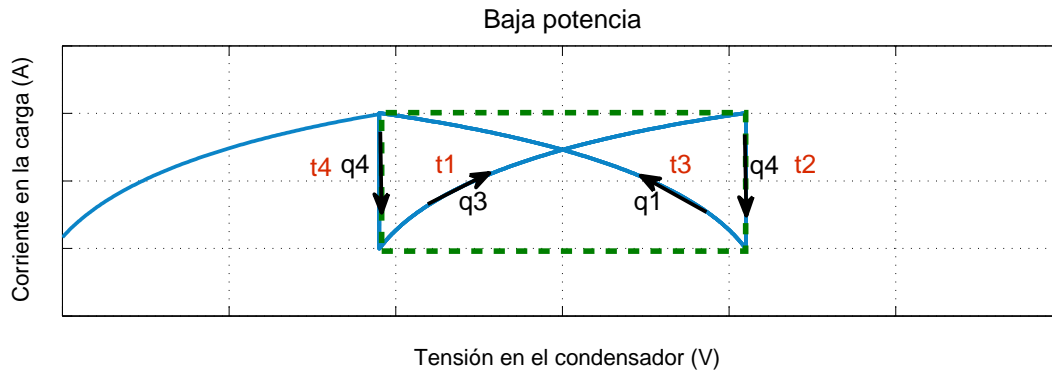


Figura 4.21: Ciclo límite para baja potencia, se asocia un tiempo de acción para cada modo de operación (el orden numeral tiene que ver con el orden de ocurrencia).

En la Figura 4.21, podemos apreciar la composición de tal ciclo límite asociando un tiempo dado de operación para cada modo continuo.

Dinámica de la corriente en la carga

Retomando las soluciones obtenidas para la corriente en los modos 1 y 3.

Modo 1

$$\begin{aligned}
 i(t - t_k) &= \left\{ \left(\frac{1}{LN} \right) v_c(t_k) + \left(\frac{-R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) i(t_k) \right\} e^{-\lambda_1(t-t_k)} \\
 &+ \left\{ \left(\frac{-1}{LN} \right) v_c(t_k) + \left(\frac{R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) i(t_k) \right\} e^{-\lambda_2(t-t_k)}
 \end{aligned} \tag{4.7.1}$$

Modo 3

$$\begin{aligned}
i(t - t_k) = & \left\{ \left(\frac{-1}{LN} \right) v_c(t_k) + \left(\frac{-R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) i(t_k) + \frac{E}{LN} \right\} e^{-\lambda_1(t-t_k)} \\
& + \left\{ \left(\frac{1}{LN} \right) v_c(t_k) + \left(\frac{R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) i(t_k) + \frac{-E}{LN} \right\} e^{-\lambda_2(t-t_k)}
\end{aligned} \quad (4.7.2)$$

donde:

$$\lambda_1 = \frac{R}{2L} - \frac{1}{2}N$$

$$\lambda_2 = \frac{R}{2L} + \frac{1}{2}N$$

$$N = \sqrt{\frac{R^2}{L} - 4\frac{1}{LC}}$$

t_k - Tiempo en el instante inicial k

Partiendo de la ecuación (4.7.1) y bajo las siguientes consideraciones:

- $t - t_k = t3$
- $v_c(t_k) = v_{ref} + \Delta v = \frac{E}{2} + \Delta v$
- $i(t_k) = i_{ref} - \Delta i = i_{ref}^-$

Podemos llevar la solución para la corriente en la carga del modo 1 a la forma (4.7.3).

$$\begin{aligned}
i(t3) = & \left\{ \left(\frac{1}{LN} \right) \left(\frac{E}{2} + \Delta v \right) + \left(\frac{-R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) i_{ref}^- \right\} e^{-\lambda_1 t3} \\
& + \left\{ \left(\frac{-1}{LN} \right) \left(\frac{E}{2} + \Delta v \right) + \left(\frac{R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) i_{ref}^- \right\} e^{-\lambda_2 t3}
\end{aligned} \quad (4.7.3)$$

Así como, partiendo de la ecuación (4.7.2) y bajo las siguientes consideraciones:

- $t - t_k = t1$
- $v_c(t_k) = v_{ref} - \Delta v = \frac{E}{2} - \Delta v$
- $i(t_k) = i_{ref} - \Delta i = i_{ref}^-$

Podemos llevar la solución para la corriente en la carga del modo 1 a la forma (4.7.4).

$$\begin{aligned}
 i(t_1) &= \left\{ \left(\frac{-1}{LN} \right) \frac{E}{2} - \Delta v + \left(\frac{-R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) i_{ref}^- + \frac{E}{LN} \right\} e^{-\lambda_1 t_1} \\
 &+ \left\{ \left(\frac{1}{LN} \right) \frac{E}{2} - \Delta v + \left(\frac{R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) i_{ref}^- + \frac{-E}{LN} \right\} e^{-\lambda_2 t_1} \\
 i(t_1) &= \left\{ \left(\frac{1}{LN} \right) \left(\frac{E}{2} + \Delta v \right) + \left(\frac{-R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) i_{ref}^- \right\} e^{-\lambda_1 t_1} \\
 &+ \left\{ \left(\frac{-1}{LN} \right) \left(\frac{E}{2} + \Delta v \right) + \left(\frac{R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) i_{ref}^- \right\} e^{-\lambda_2 t_1} \tag{4.7.4}
 \end{aligned}$$

Como podemos apreciar en las ecuaciones (4.7.3) y (4.7.4), la dinámica tiene la misma estructura, con la única variación que para el modo 1 está en términos del tiempo t_3 y para el modo 3 está en términos del tiempo t_1 y, bajo la consideración de que $t_1 = t_3$ podemos concluir que:

$$i(t_1) = i(t_3) = i_{ref}^+$$

Nota 4.19. En la expresión (4.7.4) contamos con una ecuación la cual tiene 2 incógnitas Δv y t_1 .

Dinámica de la tensión en el condensador

Retomando las soluciones obtenidas para la corriente en los modos 1 y 3.

Modo 1

$$\begin{aligned}
 v_c(t - t_k) &= \left\{ \left(\frac{R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) v_c(t_k) + \left(\frac{-1}{CN} \right) i(t_k) \right\} e^{-\lambda_1(t-t_k)} \\
 &+ \left\{ \left(\frac{-R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) v_c(t_k) + \left(\frac{1}{CN} \right) i(t_k) \right\} e^{-\lambda_2(t-t_k)} \tag{4.7.5}
 \end{aligned}$$

Modo 3

$$\begin{aligned}
 v_c(t - t_k) &= E + \left\{ \left(\frac{R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) v_c(t_k) + \left(\frac{1}{CN} \right) i(t_k) + \frac{2E}{LCN \left(-\frac{R}{L} + N \right)} \right\} e^{-\lambda_1(t-t_k)} \\
 &+ \left\{ \left(\frac{-R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) v_c(t_k) + \left(\frac{-1}{CN} \right) i(t_k) + \frac{2E}{LCN \left(\frac{R}{L} + N \right)} \right\} e^{-\lambda_2(t-t_k)} \tag{4.7.6}
 \end{aligned}$$

donde:

$$\lambda_1 = \frac{R}{2L} - \frac{1}{2}N$$

$$\lambda_2 = \frac{R}{2L} + \frac{1}{2}N$$

$$N = \sqrt{\frac{R^2}{L} - 4\frac{1}{LC}}$$

t_k - Tiempo en el instante inicial k

Partiendo de la ecuación (4.7.5) y bajo las siguientes consideraciones:

- $t - t_k = t3$
- $v_c(t_k) = v_{ref} + \Delta v = \frac{E}{2} + \Delta v$
- $i(t_k) = i_{ref} - \Delta i = i_{ref}^-$

Podemos llevar la solución para la corriente en la carga del modo 1 a la forma (4.7.7).

$$\begin{aligned} v_c(t3) = & E + \left\{ \left(\frac{R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{E}{2} + \Delta v \right) + \left(\frac{1}{CN} \right) i_{ref}^- + \frac{2E}{LCN(-\frac{R}{L} + N)} \right\} e^{-\lambda_1 t3} \\ & + \left\{ \left(\frac{-R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{E}{2} + \Delta v \right) + \left(\frac{-1}{CN} \right) i_{ref}^- + \frac{2E}{LCN(\frac{R}{L} + N)} \right\} e^{-\lambda_2 t3} \end{aligned} \quad (4.7.7)$$

Así como, partiendo de la ecuación (4.7.6) y bajo las siguientes consideraciones:

- $t - t_k = t1$
- $v_c(t_k) = v_{ref} - \Delta v = \frac{E}{2} - \Delta v$
- $i(t_k) = i_{ref} - \Delta i = i_{ref}^-$

Podemos llevar la solución para la corriente en la carga del modo 1 a la forma (4.7.4).

$$\begin{aligned} v_c(t1) = & E + \left\{ \left(\frac{R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{E}{2} - \Delta v \right) + \left(\frac{1}{CN} \right) i_{ref}^- + \frac{2E}{LCN(-\frac{R}{L} + N)} \right\} e^{-\lambda_1 t1} \\ & + \left\{ \left(\frac{-R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{E}{2} - \Delta v \right) + \left(\frac{-1}{CN} \right) i_{ref}^- + \frac{2E}{LCN(\frac{R}{L} + N)} \right\} e^{-\lambda_2 t1} \end{aligned} \quad (4.7.8)$$

Considerando las ecuaciones (4.7.7) y (4.7.8) (donde $t_1 = t_3$), podemos llegar a la expresión dada por (4.7.9).

$$v_c(t_1) - v_c(t_3) = 2\Delta v \quad (4.7.9)$$

Nota 4.20. En la expresión (4.7.8) obtenemos una ecuación, la cual tiene 2 incógnitas Δv y t_1 .

Apoyándonos en las ecuaciones (4.7.4) y (4.7.8), podemos tener un sistema de dos ecuaciones con 2 incógnitas; así obteniendo una solución para éste, obtendríamos el tiempo necesario para poder tener el rizado especificado en diseño y a su vez nos brinda la posibilidad de calcular el Δv adecuado a considerar en el diseño del controlador, con la finalidad de obtener el funcionamiento deseado para el sistema con parámetros dados.

Nota 4.21. Cabe aclarar que tal sistema de ecuaciones, quedaría conformado por ecuaciones trascendentales, por lo cual no es posible obtener una solución cerrada.

4.8. Resultados de simulación

Para la validación de lo aquí propuesto, se simuló un convertidor multicelular de 3 niveles en simulink-MatLab, para dos casos de operación.

Baja potencia

Para una operación en baja potencia se tienen los datos mostrados en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1: Parámetros para baja potencia

Parámetro	Valor numérico	Unidades
L	2,3	mH
R	12	Ω
C	190	μF
E	100	V
v_{ref}	$E/2$	V
Δv	1,1	V
i_{ref}	2	A
Δ_i	1	A

En la Figura 4.22 y Figura 4.23 se muestra la evolución de la corriente en la carga y tensión en el condensador, respectivamente (considerando condiciones iniciales nulas). Se puede apreciar que v_c se incrementa y establece alrededor del valor de referencia. El valor promedio en estado estacionario, es igual a la mitad del valor de la fuente E .

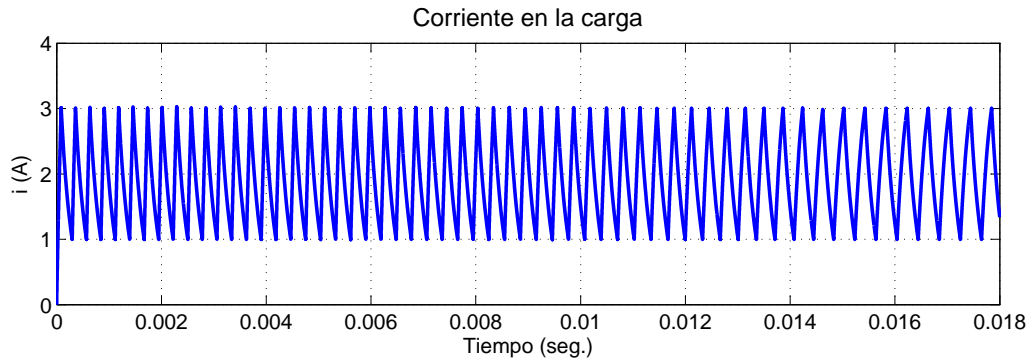


Figura 4.22: Evolución de la corriente en la carga

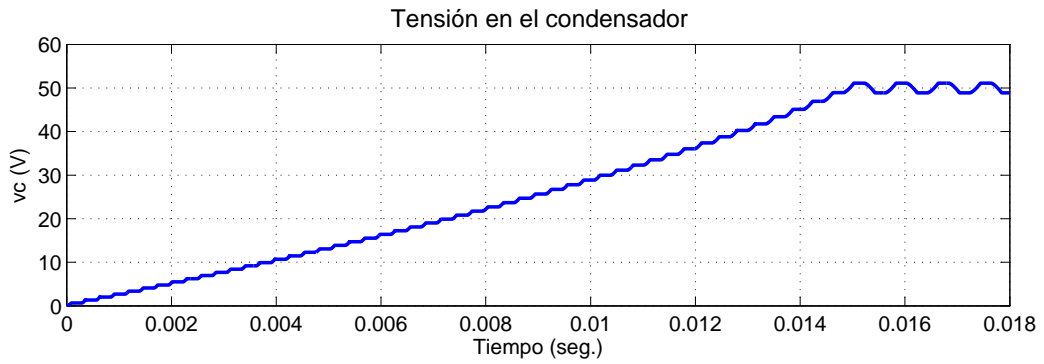


Figura 4.23: Evolución de la tensión en el condensador

La Figura 4.24 muestra las señales de control para cada interruptor, basada en la función de conmutación.

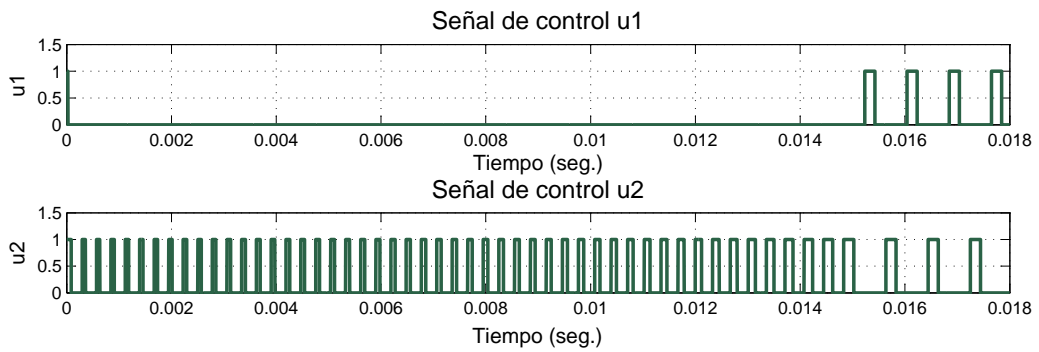


Figura 4.24: Señales de control para los interruptores

En la Figura 4.25 se muestra la función de conmutación entre modos de operación, en la cual se puede observar que se respetó la regla de adyacencia.

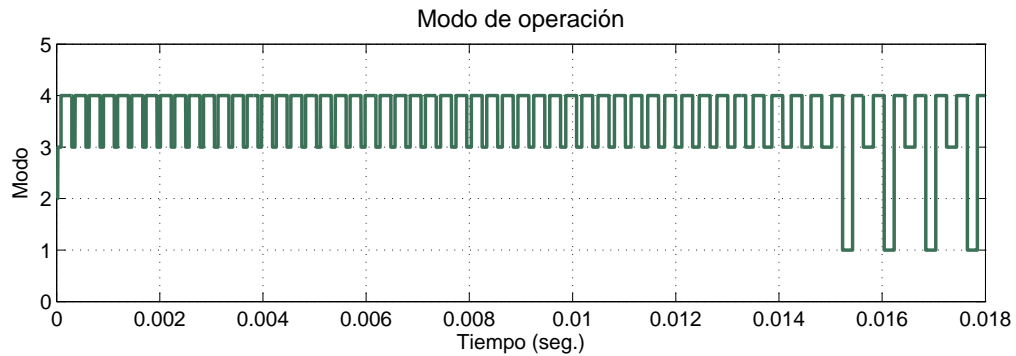
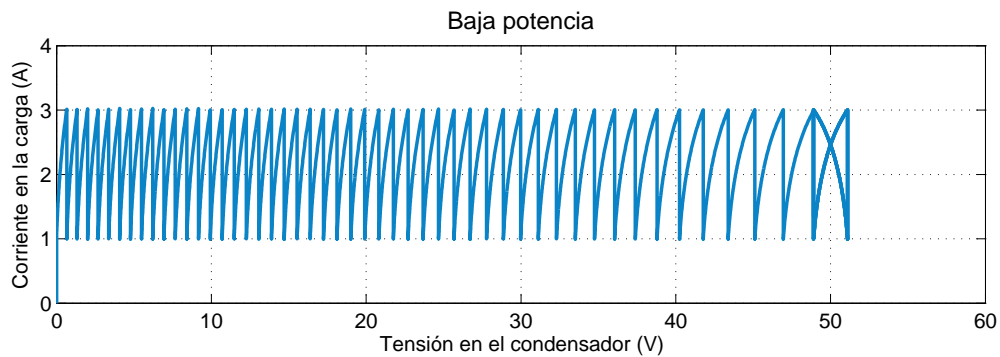
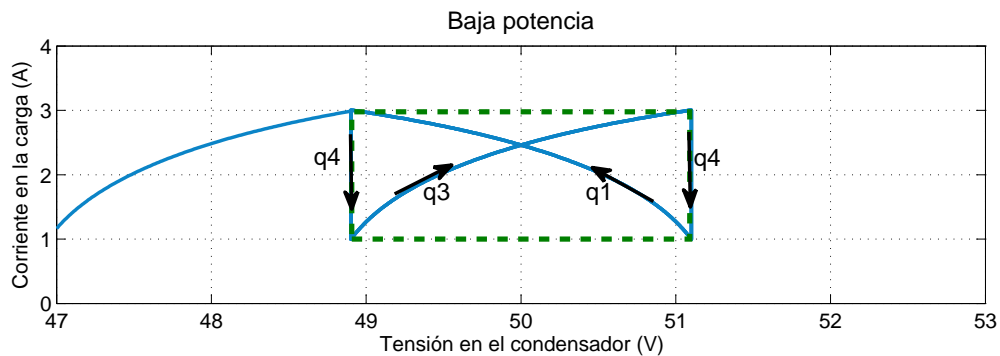


Figura 4.25: Modo de operación

La formación de un ciclo límite, puede ser observado en la Figura 4.26a, el cual con la red de seguridad adecuada se mantiene estable. La Figura 4.26b muestra la región de operación de cerca, se puede ver claramente la transición entre modos una vez dentro de la zona de operación deseada.



(a) Plano de fase



(b) Conmutación entre los modos de operación (controlador estabilizante)

Figura 4.26: Plano de fase para baja potencia ($v_{ref} = 50V$, $\Delta v = 1,1V$, $i_{ref} = 2A$ y $\Delta i = 1A$).

Alta potencia

Para una operación en alta potencia se tienen los datos mostrados en la Tabla 4.2.

Tabla 4.2: Parámetros para alta potencia

Parámetro	Valor numérico	Unidades
L	2,3	mH
R	12	Ω
C	190	μF
E	100	V
v_{ref}	$E/2$	V
Δv	3,5	V
i_{ref}	6	A
Δi	1	A

En la Figura 4.27 y Figura 4.28 se muestra la evolución de la corriente en la carga y tensión en el condensador, respectivamente (considerando condiciones iniciales nulas). Se puede apreciar para este caso también el establecimiento de la tensión y de la corriente alrededor de sus valores de referencia.

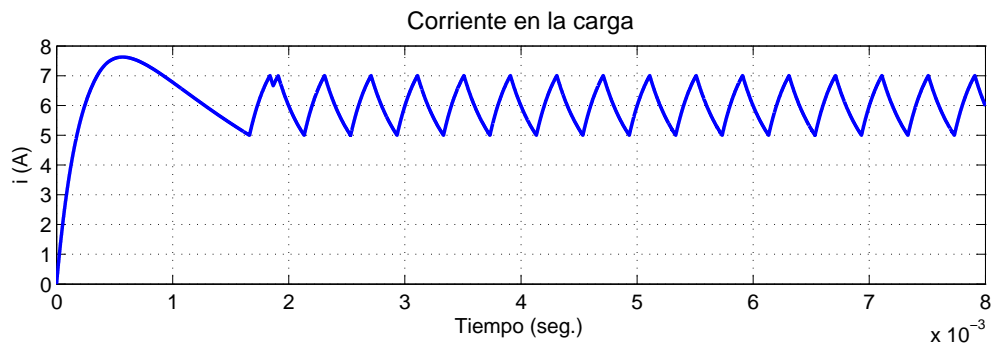


Figura 4.27: Evolución de la corriente en la carga

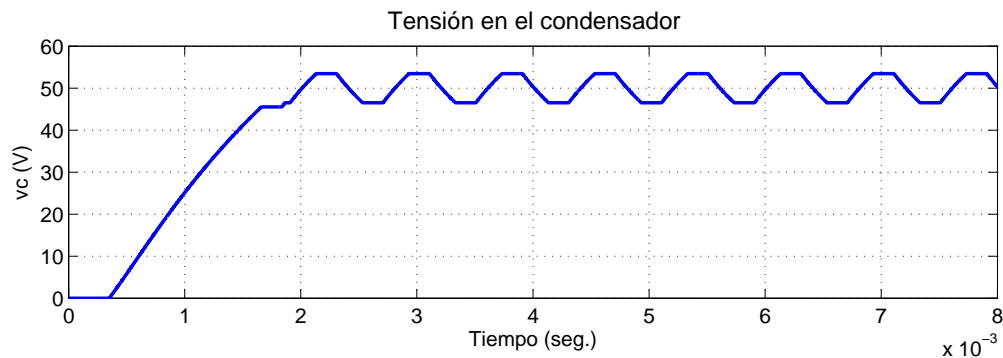


Figura 4.28: Evolución de la tensión en el condensador

La Figura 4.29 muestra las señales de control para cada interruptor, con base en la función de conmutación.

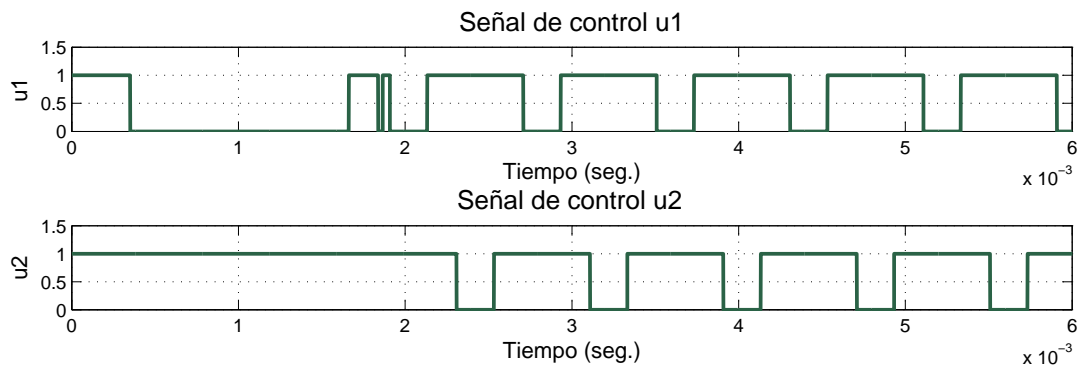


Figura 4.29: Señales de control para los interruptores

También para esta caso, en la Figura 4.30 se muestra la función de conmutación entre modos de operación, en la cual se puede observar que se respetó la regla de adyacencia.

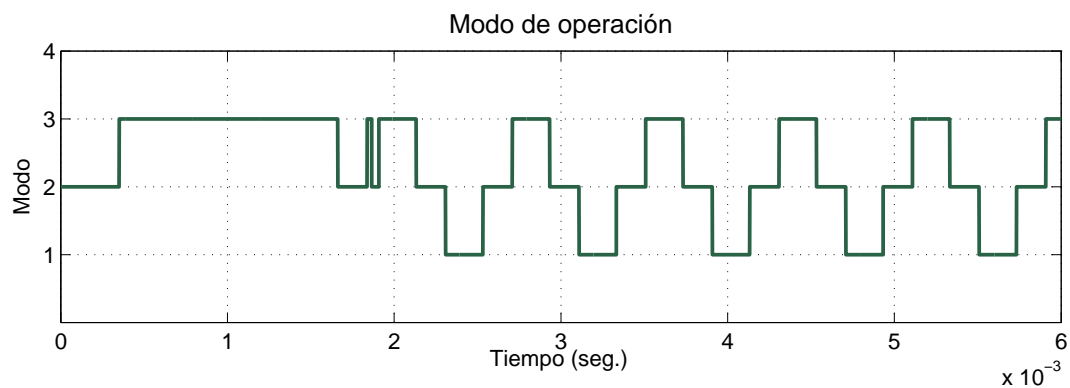


Figura 4.30: Modo de operación

De igual forma que en el caso de baja potencia, la formación de un ciclo límite puede ser observado (Figura 4.31), el cual con la red de seguridad adecuada se mantiene estable. En un zoom que se realizó en la región de operación deseada, se puede ver claramente la transición entre modos una vez dentro de la zona de operación deseada.

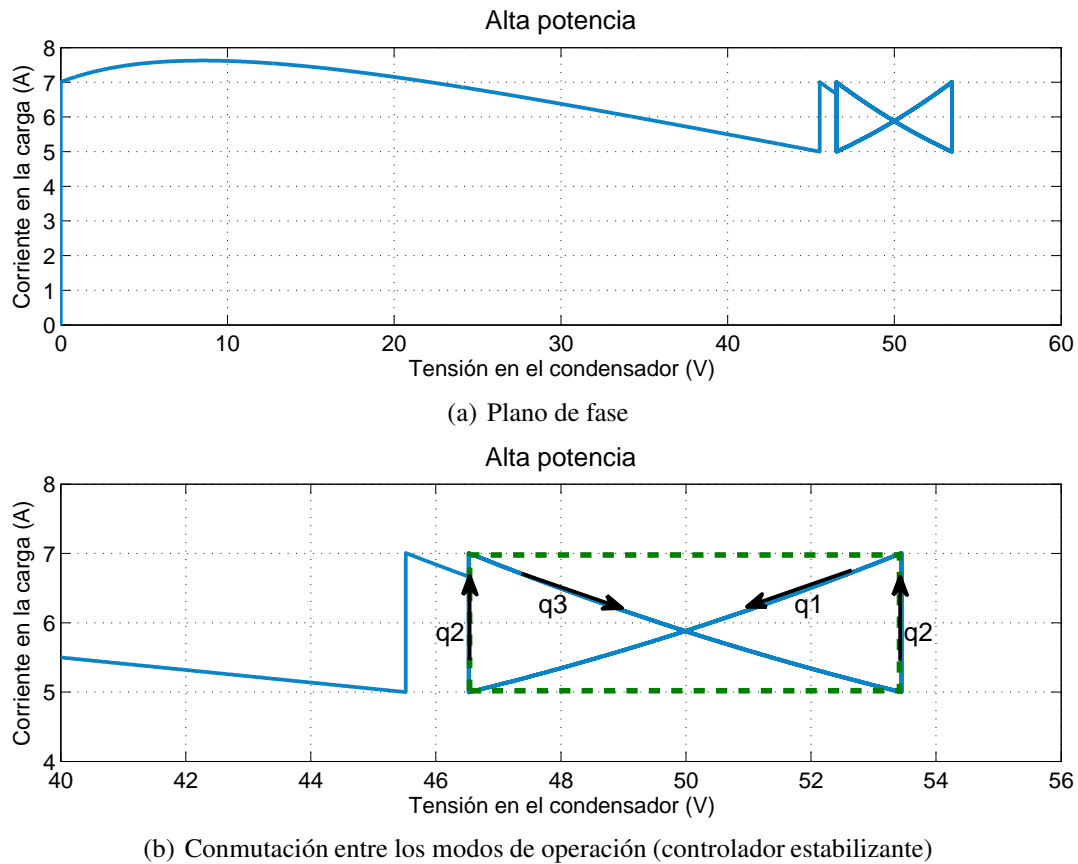


Figura 4.31: Plano de fase para alta potencia ($v_{ref} = 50V$, $\Delta v = 3,5V$, $i_{ref} = 6A$ y, $\Delta i = 1A$).

4.9. Conclusiones

En este capítulo se desarrolló un controlador auxiliar, para llevar la trayectoria dentro de \mathbb{R}_e y un controlador estabilizante con el fin de inducir un ciclo límite dentro de esta región. En este trabajo se dan las condiciones suficientes para asegurar la formación de este ciclo límite.

Dentro del análisis se hizo notar que existen dos configuraciones, una para baja potencia y otra para alta potencia; lo anterior establecido en base a la ubicación de la región \mathbb{R}_e dentro de la región de alcance del sistema llamada \bar{E} y tomando como referencia una barrera I_c con variación de un $\pm\Delta$.

Además de presentar las condiciones de viabilidad para cada controlador, se demostró que la región \mathbb{R}_e es globalmente atractiva para ambas configuraciones, en relación a la estructura dada para el controlador auxiliar. Y, se demuestra la existencia de un ciclo límite para ambas configuraciones, partiendo de un análisis hecho a las condiciones de viabilidad dadas por el controlador estabilizante encargado de la generación de tal ciclo. Finalmente, podemos apreciar en los resultados de simulación numérica cómo es que se logra la formación de un ciclo límite, con el conocimiento previo de en qué magnitud serán las variaciones para i y v_c al tratar de estabilizarse en sus valores de referencia respectivos.

Capítulo 5

Conclusiones y perspectivas

El sistema en el cual hemos centrado este estudio es el convertidor multicelular de 3 niveles, ya que dada su dinámica inherentemente híbrida, mezclando dinámicas continuas y eventos discretos, es un candidato natural para ser representado por un modelo híbrido. Tomando ventaja de la naturaleza del modelo desarrollamos un controlador híbrido para generar un ciclo límite estable alrededor de un punto de operación deseado.

A partir del trabajo desarrollado hemos generado diversas conclusiones acerca del modelo híbrido y del controlador propuesto.

5.1. Conclusiones acerca del modelo híbrido

Durante este trabajo hemos llegado a las siguientes conclusiones acerca del modelo híbrido para un sistema conmutado, también conocido en la literatura como modelo instantáneo o exacto:

- ✓ El convertidor estático puede ser modelado de una forma apropiada como un modelo híbrido mezclando dinámicas continuas, la evolución del sistema físico, y dinámicas discretas, provenientes del control del estado de los interruptores; este es un modelo más cercano a la realidad que no hace sobresimplificaciones como los modelos promediados (ver Apéndice A). El comportamiento de este tipo de sistemas es muy complejo debido a la naturaleza híbrida de su dinámica, representada por ecuaciones algebraico-diferenciales.
- ✓ El comportamiento del sistema puede ser visto como una conmutación entre diferentes sistemas lineales (modos), siendo posible obtener la solución explícita del sistema de ecuaciones diferenciales representando cada modo.

5.2. Conclusiones acerca del controlador híbrido propuesto

Llegamos a las siguientes conclusiones en relación al controlador propuesto:

- ✓ Tomando ventaja del conocimiento explícito de la solución para el sistema en cada modo (obtenidas en Apéndice B), lo cual hace posible un análisis lineal entre conmutaciones, podemos obtener las condiciones necesarias para inducir un ciclo límite en la trayectoria del sistema. Este análisis nos permite diseñar un controlador estabilizante (que actúa en una región predefinida) que conmutando entre diferentes modos genera trayectorias periódicas con ciertas características deseadas. Además identificamos que tales trayectorias pueden tener dos secuencias de conmutación posibles a las cuales llamamos ciclo de baja potencia y ciclo de alta potencia. A diferencia de otros autores [11, 8], en el Capítulo 4 estudiamos analíticamente las características del ciclo generado con el fin de establecer las condiciones de viabilidad de manera implícita.
- ✓ Observamos que la generación de este tipo de trayectorias depende de las llamadas condiciones de viabilidad (o existencia) de los ciclos, las cuales pueden ser estudiadas analíticamente mediante un conjunto de ecuaciones algebraicas. Aunque al momento no contamos con una expresión explícita de tales condiciones, es posible obtenerlas numéricamente.
- ✓ Además propusimos un control, al cual llamamos control auxiliar, para llevar la trayectoria del sistema de cualquier condición inicial a la región de operación del ciclo límite. Para este esquema demostramos su estabilidad mediante funciones de tipo Lyapunov.
- ✓ Y finalmente pudimos concluir que un controlador compuesto por el controlador estabilizante y el controlador auxiliar (trabajando en modo complementario) nos permite llevar una trayectoria desde un punto perteneciente a la región \mathbb{R}_a hacia la región \mathbb{R}_e donde se logra la formación del ciclo límite deseado.

5.3. Contribución

En este estudio, presentamos un controlador híbrido para el convertidor multicelular de 3 niveles, el cual induce un ciclo límite alrededor de los valores de referencia deseados. El controlador propuesto está basado en un modelo híbrido (exacto o instantáneo) tomando en cuenta la naturaleza conmutada del sistema y a diferencia de los modelos comúnmente utilizados en la literatura, éste considera las dinámicas continuas y discretas del proceso.

El controlador desarrollado genera una trayectoria periódica con características deseadas alrededor de la referencia de manera apropiada. Este esquema nos permite controlar el sistema tanto en

alta como en baja potencia, y a diferencia de trabajos precedentes consideramos las condiciones de existencia del ciclo de manera explícita (dadas en la Sección 4.5.1). Cabe aclarar que la frecuencia de conmutación conocida a través del período de duración de tal ciclo, es una característica que implícitamente se determina al establecer una amplitud deseada.

Los resultados de simulación nos permiten observar la conveniencia de este enfoque debido a que con este controlador no sólo podemos generar un ciclo límite, sino que además podemos demostrar la estabilidad del mismo, conociendo a la vez sus características.

5.4. Trabajo futuro

Los resultados obtenidos en este estudio son muy prometedores, por lo que la técnica propuesta puede ser aplicada a sistemas más complejos. Sin embargo, ciertos aspectos deben ser estudiados más ampliamente. En una futura investigación los siguientes problemas podrían ser abordados:

- Determinar de manera analítica las condiciones suficientes para la existencia de un ciclo límite con una amplitud y frecuencia determinada.
- Considerar la extensión de este estudio a sistemas más complejos, por ejemplo convertidores multicelulares de 3 o más células.
- Realizar un análisis de robustez para el control híbrido propuesto, estudiando el efecto de la influencia de los parámetros físicos sobre el comportamiento dinámico del sistema.
- Modificar el algoritmo de control para hacerlo discreto, estudiar el efecto de la discretización de la entrada sobre el desempeño del controlador.
- Y finalmente, construir un dispositivo experimental para verificar la eficacia de los controladores propuestos.

Apéndice A

Desempeño de modelo promediado vs híbrido

En la formulación del problema se manifestó el hecho de que, en su mayoría, los sistemas de naturaleza híbrida son representados mediante modelos matemáticos promediados; los cuales son sólo una aproximación del sistema físico, quedando el cuestionamiento de que se pudiera presentar la desventaja de que existan fenómenos que no pueden ser observados a través del análisis de los mismos, como pudiera ser la existencia de un *ciclo límite*.

La forma en que se propone se podría tener un modelo más sencillo y compacto es mediante el desarrollo de un modelo exacto, es decir, un modelo híbrido; mediante el cual, se busca aprovechar la información extra que este tipo de modelos nos pudieran proveer a diferencia de un modelo aproximado. En el área de aplicación electrónica de potencia que se eligió existen casos muy particulares de este tipo de sistemas, como lo son los convertidores de potencia, los cuales pueden presentar dinámicas muy complejas y serían una buena plataforma para el desarrollo de esquemas de control con un enfoque híbrido, esperando obtener mejores resultados en comparación a lo ya desarrollado en base a modelos aproximados.

A.1. Modelo promediado

Un *modelo promediado* está basado en hipótesis de variación lenta y pequeño rizado. Fácil de analizar, pero con pérdida de información de rizado. Ya que el área de aplicación es la electrónica de potencia, se manejarán los 2 siguientes ejemplos:

1. Convertidor C.D.-C.D. Boost

El diagrama eléctrico de éste puede ser apreciado en la figura A.1, de cuyo análisis se desprende

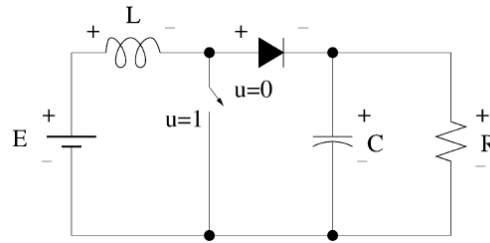


Figura A.1: Convertidor Boost

el modelo promediado representado por el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{dV_C}{dt} &= -\frac{1}{RC}V_C + (1 - \mathbf{D})\frac{1}{C}I_L \\ \frac{dI_L}{dt} &= -(1 - \mathbf{D})\frac{1}{L}V_C + \frac{E}{L} \end{aligned} \quad (\text{A.1.1})$$

Para este tipo de convertidor, también conocido como elevador, se desarrolló una implementación en PSIM y simulink-MatLab; tal implementación, con el fin de realizar una comparación en este caso entre el plano de fase del sistema original simulado en PSIM y el plano de fase del modelo promediado construido en simulink-MatLab.

Los resultados, provenientes de los parámetros $L = 470\mu H$, $C = 47\mu F$, $R = 20\Omega$, $E = 48V$, $F = 20KHz$ y $D = 0.76$, se pueden apreciar en la figura A.2.

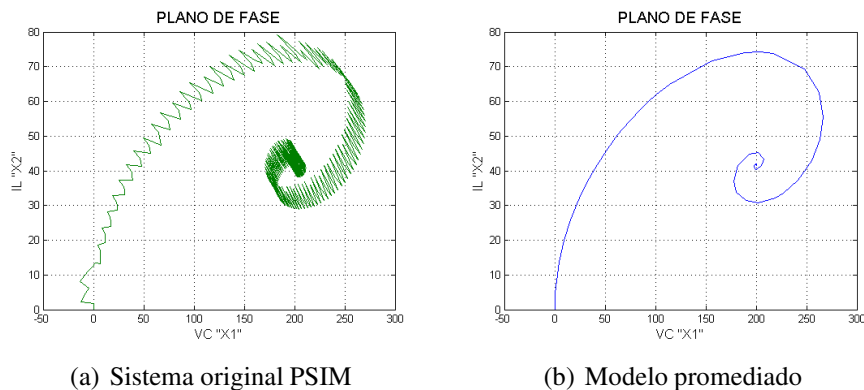


Figura A.2: Planos de fase convertidor Boost, comparación entre modelo original desarrollado en PSIM y modelo promediado en Simulink-MatLab

2. Convertidor C.D.-C.D. Buck

El diagrama eléctrico de éste puede ser apreciado en la figura A.3, de cuyo análisis se desprende

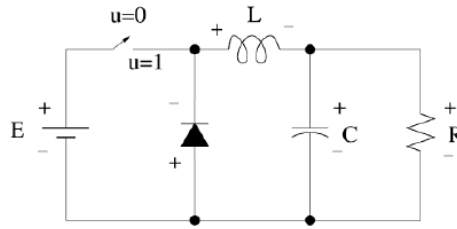


Figura A.3: Convertidor Buck

el modelo promediado representado por el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{dV_C}{dt} &= -\frac{1}{RC}V_C + \frac{1}{C}I_L \\ \frac{dI_L}{dt} &= -\frac{1}{L}V_C + \mathbf{D}\frac{E}{L} \end{aligned} \quad (\text{A.1.2})$$

Para este convertidor, también conocido como reductor, se desarrolló de igual manera una implementación en PSIM y simulink-MatLab; con la finalidad de realizar una comparación, entre el plano de fase del sistema original simulado en PSIM y el plano de fase del modelo promediado construido en simulink-MatLab.

Los resultados, provenientes de los parámetros $L = 333.33\mu H$, $C = 312.5\mu F$, $R = 10\Omega$, $E = 15V$, $F = 20KHz$ y $D = 0.333$, se pueden apreciar en la Figura A.4.

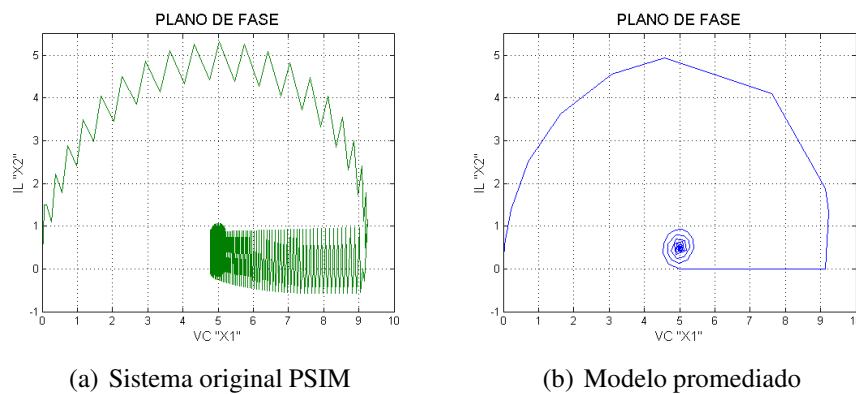


Figura A.4: Planos de fase convertidor Buck, comparación entre modelo original desarrollado en PSIM y modelo promediado en Simulink-MatLab

Para el sistema de ecuaciones (A.1.1) y el (A.1.2):
 V_C -Tensión en el condensador
 I_L -Corriente en el inductor

L -Inductancia
 C -Capacitancia
 D -Ciclo de trabajo
 E -Fuente de alimentación CD.

A.2. Modelo Híbrido

Un *modelo híbrido o exacto* toma en cuenta la evolución de todas las variables en el tiempo, incluyendo los estados del interruptor. Se manejarán los 2 siguientes ejemplos:

1. Convertidor C.D.-C.D. Boost

El diagrama eléctrico de éste puede ser apreciado en la figura A.1, de cuyo análisis se desprende el modelo híbrido representado por el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned}
 \frac{dv_c}{dt} &= -\frac{1}{RC}v_c + (1 - \mathbf{u})\frac{1}{C}i_L \\
 \frac{di_L}{dt} &= -(1 - \mathbf{u})\frac{1}{L}v_c + \frac{E}{L}
 \end{aligned}
 \tag{A.2.1}$$

Para este convertidor elevador, se desarrolló una implementación en PSIM y simulink-MatLab, con el fin de realizar una comparación entre el plano de fase del sistema original simulado en PSIM y el plano de fase del modelo híbrido construido en simulink-MatLab.

Los resultados, provenientes de los parámetros $L = 470\mu H$, $C = 47\mu F$, $R = 20\Omega$, $E = 48V$, $F = 20KHz$ y $D = 0.76$, se pueden apreciar en la figura A.5.

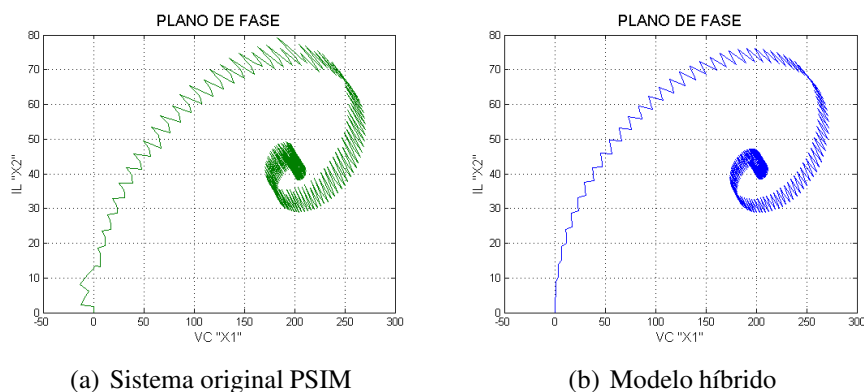


Figura A.5: Planos de fase convertidor Boost, comparación entre modelo original desarrollado en PSIM y modelo híbrido en Simulink-MatLab

2. Convertidor C.D.-C.D. Buck

El diagrama eléctrico de éste puede ser apreciado en la figura A.3, de cuyo análisis se desprende el modelo híbrido representado por el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{dv_c}{dt} &= -\frac{1}{RC}v_c + \frac{1}{C}i_L \\ \frac{di_L}{dt} &= -\frac{1}{L}v_c + \frac{E}{L}u\end{aligned}\quad (\text{A.2.2})$$

Para este convertidor reductor, se desarrolló de igual manera una implementación en PSIM y simulink-MatLab, con el fin de realizar una comparación entre el plano de fase del sistema original simulado en PSIM y el plano de fase del modelo híbrido construido en simulink-MatLab.

Los resultados, provenientes de los parámetros $L = 333 \cdot 33\mu H$, $C = 312 \cdot 5\mu F$, $R = 10\Omega$, $E = 15V$, $F = 20KHz$ y $D = 0 \cdot 333$, se pueden apreciar en la figura A.6.

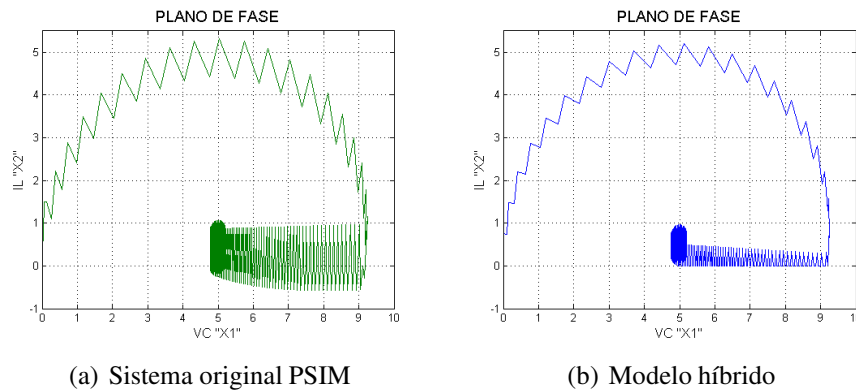


Figura A.6: Planos de fase convertidor Buck, comparación entre modelo original desarrollado en PSIM y modelo híbrido en Simulink-MatLab

Para el sistema de ecuaciones (A.2.1) y el (A.2.2):

v_c -Tensión en el condensador

i -Corriente en el inductor

L -Inductancia

C -Capacitancia

u -Estado del interruptor (1-cerrado,0-abierto)

E -Fuente de alimentación CD.

Como se puede apreciar en el figuras A.5 y A.6, la representación basada en un modelo matemático híbrido pareciera ser más exacta. Ahora bien, se considerará la integral del error cuadrático como un indicador de cuál modelo posee una representación de las dinámicas del sistema, más aproximadas a las del sistema original simulado en PSIM.

En la figura A.7 se muestran las integrales del error cuadrático para el caso del convertidor Boost, donde se aprecia la comparación del error calculado para el modelo promediado y el modelo híbrido, en relación al sistema original simulado en PSIM.

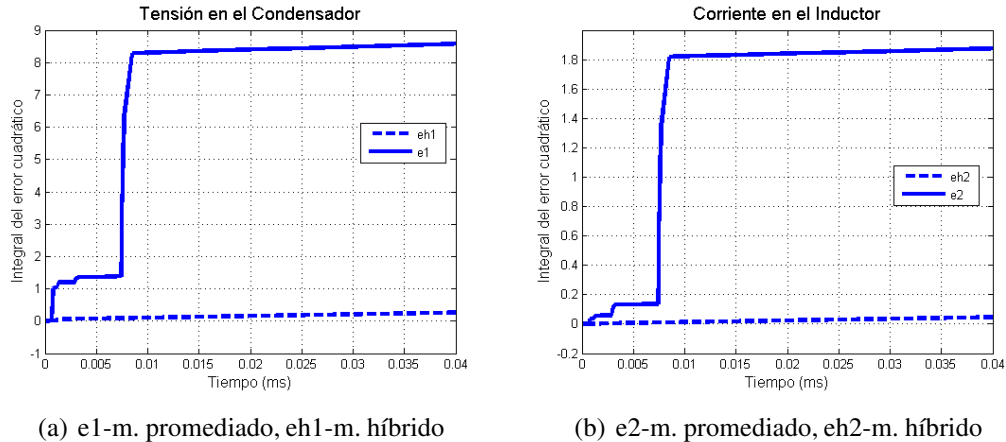


Figura A.7: Integral del error cuadrático convertidor Boost

La figura A.7 es interpretada como sigue, tenemos la comparación del error para la *tensión en el condensador* y para la *corriente en el inductor*; donde $e1$ y $e2$ respectivamente son los errores del modelo promediado y, $eh1$ y $eh2$ respectivamente son los errores del modelo híbrido. Podemos apreciar cómo para ambas comparaciones es notablemente mayor el error del modelo promediado, lo cual indicaría una mayor fidelidad del modelo híbrido en relación al sistema original.

Ahora bien, en la figura A.8 se muestran las integrales del error cuadrático para el caso del convertidor Buck, donde se aprecia la comparación del error calculado para el modelo promediado y el modelo híbrido, en relación al sistema original simulado en PSIM.

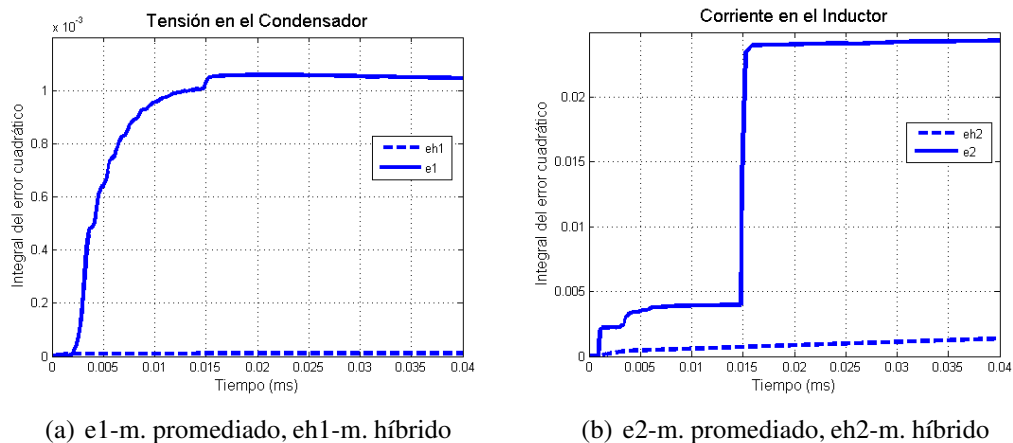


Figura A.8: Integrales de error cuadrático convertidor Buck

La figura A.8 es interpretada como sigue, tenemos la comparación del error para la *tensión en el condensador* y para la *corriente en el inductor*; donde igual que en el caso anterior, e_1 y e_2 respectivamente son los errores del modelo promediado y, eh_1 y eh_2 respectivamente son los errores del modelo híbrido. Podemos apreciar cómo para ambas comparaciones es notablemente mayor, una vez más, el error del modelo promediado; lo cual confirmaría, en su defecto, una mayor fidelidad del modelo híbrido en relación al sistema original.

A.3. Conclusiones

Se puede decir, basado en la figura A.7 y la A.8, que el modelo híbrido es el más adecuado para representar un sistema de naturaleza híbrida, ya que posee dinámicas más parecidas a las del sistema original en comparación al modelo promediado.

Apéndice B

Obtención de las soluciones a las ecuaciones en diferencia que representan cada modo de operación

B.1. Modo 1

Retomando el sistema de ecuaciones (3.3.2) que representa este modo de operación, también puede ser expresada en espacio de estados como se muestra:

$$\begin{bmatrix} \frac{dv_c}{dt} \\ \frac{di}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ i \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.1})$$

Para la obtención de la solución de las ecuaciones diferenciales, que representan este modo de operación, se recurrió al método de la transformada de Laplace que a continuación se desarrolla.

Del caso matricial $\dot{x} = Ax$, se obtiene una solución de la forma $x(t) = \varphi(t)x(0)$, donde $\varphi(t)$ es la matriz de transición de estados y contiene toda la información de los movimientos libres del sistema. La matriz $\varphi(t)$ se obtiene como sigue:

$$\varphi(t) = \mathcal{L}^{-1} [(sI - A)^{-1}] \quad (\text{B.1.2})$$

donde $\varphi(s) = (sI - A)^{-1}$

Se sabe de (B.1.1) que $A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}$, al sustituir A en (B.1.2):

$$\varphi(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+\frac{R}{L}}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)} & \frac{-\frac{1}{C}}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)} \\ \frac{\frac{1}{L}}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)} & \frac{s}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.3})$$

Para (B.1.3):

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{R}{2L} - \frac{1}{2}N \\ \lambda_2 &= \frac{R}{2L} + \frac{1}{2}N \\ N &= \sqrt{\frac{R^2}{L} - 4\frac{1}{LC}} \end{aligned}$$

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s+\frac{R}{L}}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)} \right] & \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{-\frac{1}{C}}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)} \right] \\ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\frac{1}{L}}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)} \right] & \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)} \right] \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.4})$$

Se obtiene la transformada inversa de Laplace para cada elemento en (B.1.4), por el método de desarrollo de fracciones simples.

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} \left(\frac{R}{2LN} + \frac{1}{2}\right) e^{-\lambda_1 t} + \left(\frac{-R}{2LN} + \frac{1}{2}\right) e^{-\lambda_2 t} & \left(\frac{-1}{CN}\right) e^{-\lambda_1 t} + \left(\frac{1}{CN}\right) e^{-\lambda_2 t} \\ \left(\frac{1}{LN}\right) e^{-\lambda_1 t} + \left(\frac{-1}{LN}\right) e^{-\lambda_2 t} & \left(\frac{-R}{2LN} + \frac{1}{2}\right) e^{-\lambda_1 t} + \left(\frac{R}{2LN} + \frac{1}{2}\right) e^{-\lambda_2 t} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.5})$$

Sustituyendo (B.1.5) en la solución basada en $x(t) = \varphi(t)x(0)$:

$$\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{R}{2LN} + \frac{1}{2}\right) e^{-\lambda_1 t} + \left(\frac{-R}{2LN} + \frac{1}{2}\right) e^{-\lambda_2 t} & \left(\frac{-1}{CN}\right) e^{-\lambda_1 t} + \left(\frac{1}{CN}\right) e^{-\lambda_2 t} \\ \left(\frac{1}{LN}\right) e^{-\lambda_1 t} + \left(\frac{-1}{LN}\right) e^{-\lambda_2 t} & \left(\frac{-R}{2LN} + \frac{1}{2}\right) e^{-\lambda_1 t} + \left(\frac{R}{2LN} + \frac{1}{2}\right) e^{-\lambda_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c(0) \\ i(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} v_c(t) &= \left\{ \left(\frac{R}{2LN} + \frac{1}{2}\right) e^{-\lambda_1 t} + \left(\frac{-R}{2LN} + \frac{1}{2}\right) e^{-\lambda_2 t} \right\} v_c(0) \\ &+ \left\{ \left(\frac{-1}{CN}\right) e^{-\lambda_1 t} + \left(\frac{1}{CN}\right) e^{-\lambda_2 t} \right\} i(0) \\ i(t) &= \left\{ \left(\frac{1}{LN}\right) e^{-\lambda_1 t} + \left(\frac{-1}{LN}\right) e^{-\lambda_2 t} \right\} v_c(0) \\ &+ \left\{ \left(\frac{-R}{2LN} + \frac{1}{2}\right) e^{-\lambda_1 t} + \left(\frac{R}{2LN} + \frac{1}{2}\right) e^{-\lambda_2 t} \right\} i(0) \end{aligned}$$

Soluciones para el Modo 1:

$$\begin{aligned}
 v_c(t) &= \left\{ \left(\frac{R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) v_c(0) + \left(\frac{-1}{CN} \right) i(0) \right\} e^{-\lambda_1 t} \\
 &+ \left\{ \left(\frac{-R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) v_c(0) + \left(\frac{1}{CN} \right) i(0) \right\} e^{-\lambda_2 t} \\
 i(t) &= \left\{ \left(\frac{1}{LN} \right) v_c(0) + \left(\frac{-R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) i(0) \right\} e^{-\lambda_1 t} \\
 &+ \left\{ \left(\frac{-1}{LN} \right) v_c(0) + \left(\frac{R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) i(0) \right\} e^{-\lambda_2 t}
 \end{aligned}$$

B.2. Modo 2

Retomando el sistema de ecuaciones (3.3.3) que representa este modo de operación, también puede ser expresada en espacio de estados como se muestra:

$$\begin{bmatrix} \frac{dv_c}{dt} \\ \frac{di}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} E \quad (\text{B.2.1})$$

Para la obtención de la solución de las ecuaciones diferenciales, que representan este modo de operación, se recurrió al método de la transformada de Laplace que a continuación se desarrolla.

Del caso matricial $\dot{x} = Ax + Bu$, se obtiene una solución de la forma $x(t) = \varphi(t)x(0) + x(t)_u$, donde $\varphi(t)$ es la matriz de transición de estados y contiene toda la información de los movimientos libres del sistema y,

$$x(t)_u = \mathcal{L}^{-1}[\varphi(s)BU(s)] \quad (\text{B.2.2})$$

Se sabe de (B.2.1) que $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}$, al sustituir A en (B.1.2):

$$\varphi(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s + \frac{R}{L}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2.3})$$

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] & 0 \\ 0 & \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s + \frac{R}{L}} \right] \end{bmatrix} \quad (\text{B.2.4})$$

Se obtiene la transformada inversa de Laplace para cada elemento en (B.2.4).

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{R}{L}t} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2.5})$$

Se sabe de (B.2.1) que $B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$ y $U(s) = \frac{E}{s}$; al sustituir B y $U(s)$ en (B.2.2) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} v_c(t)_u \\ i(t)_u \end{bmatrix} = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+\frac{R}{L}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \frac{E}{s} = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{E}{s(s+\frac{R}{L})} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2.6})$$

Se obtiene la transformada inversa de Laplace para cada elemento en (B.2.6).

$$\begin{bmatrix} v_c(t)_u \\ i(t)_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}^{-1} [0] \\ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\frac{E}{L}}{s(s+\frac{R}{L})} \right] \end{bmatrix}$$

$$v_c(t)_u = 0$$

$$i(t)_u = \frac{E}{R} + \left[\frac{-E}{R} \right] e^{-\frac{R}{L}t} \quad (\text{B.2.7})$$

Sustituyendo (B.2.5) y (B.2.7) en la solución basada en $x(t) = \varphi(t)x(0) + x(t)_u$:

$$\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{R}{L}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c(0) \\ i(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{E}{R} + \left[\frac{-E}{R} \right] e^{-\frac{R}{L}t} \end{bmatrix}$$

Soluciones para el Modo 2:

$$v_c(t) = v_c(0)$$

$$i(t) = \left[i(0) + \frac{-E}{R} \right] e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$$

B.3. Modo 3

Retomando el sistema de ecuaciones (3.3.4) que representa este modo de operación, también puede ser expresada en espacio de estados como se muestra:

$$\begin{bmatrix} \frac{dv_c}{dt} \\ \frac{di}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} E \quad (\text{B.3.1})$$

Para la obtención de la solución de las ecuaciones diferenciales, que representan este modo de operación, se recurrió al método de la transformada de Laplace que a continuación se desarrolla.

Del caso matricial $\dot{x} = Ax + Bu$, se obtiene una solución de la forma $x(t) = \varphi(t)x(0) + x(t)_u$, donde $\varphi(t)$ es la matriz de transición de estados y contiene toda la información de los movimientos libres del sistema y, $x(t)_u = \mathcal{L}^{-1} [\varphi(s)BU(s)]$.

Se sabe de (B.3.1) que $A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}$, al sustituir A en (B.1.2):

$$\varphi(s) = \begin{bmatrix} \frac{s + \frac{R}{L}}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} & \frac{\frac{1}{C}}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} \\ \frac{-\frac{1}{L}}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} & \frac{s}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} \end{bmatrix} \quad (\text{B.3.2})$$

Para (B.3.2):

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{R}{2L} - \frac{1}{2}N \\ \lambda_2 &= \frac{R}{2L} + \frac{1}{2}N \\ N &= \sqrt{\frac{R^2}{L} - 4\frac{1}{LC}} \end{aligned}$$

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s + \frac{R}{L}}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} \right] & \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\frac{1}{C}}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} \right] \\ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{-\frac{1}{L}}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} \right] & \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} \right] \end{bmatrix} \quad (\text{B.3.3})$$

Se obtiene la transformada inversa de Laplace para cada elemento en (B.3.3), por el método de desarrollo de fracciones simples.

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} \left(\frac{R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) e^{-\lambda_1 t} + \left(\frac{-R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) e^{-\lambda_2 t} & \left(\frac{1}{CN} \right) e^{-\lambda_1 t} + \left(\frac{-1}{CN} \right) e^{-\lambda_2 t} \\ \left(\frac{-1}{LN} \right) e^{-\lambda_1 t} + \left(\frac{1}{LN} \right) e^{-\lambda_2 t} & \left(\frac{-R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) e^{-\lambda_1 t} + \left(\frac{R}{2LN} + \frac{1}{2} \right) e^{-\lambda_2 t} \end{bmatrix} \quad (\text{B.3.4})$$

Se sabe de (B.3.1) que $B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$ y $U(s) = \frac{E}{s}$; al sustituir B y $U(s)$ en (B.2.2):

$$\begin{bmatrix} v_c(t)_u \\ i(t)_u \end{bmatrix} = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{s + \frac{R}{L}}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} & \frac{\frac{1}{C}}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} \\ \frac{-\frac{1}{L}}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} & \frac{s}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \frac{E}{s} = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\frac{E}{LC}}{s(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} \\ \frac{\frac{E}{L}}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} \end{bmatrix} \quad (\text{B.3.5})$$

Se obtiene la transformada inversa de Laplace para cada elemento en (B.3.5).

$$\begin{bmatrix} v_c(t)_u \\ i(t)_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\frac{E}{LC}}{s(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} \right] \\ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\frac{E}{L}}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} \right] \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} v_c(t)_u &= \frac{2E}{LCN(-\frac{R}{L} + N)} e^{-\lambda_1 t} + \frac{2E}{LCN(\frac{R}{L} + N)} e^{-\lambda_2 t} + E \\ i(t)_u &= \frac{E}{LN} e^{-\lambda_1 t} + \frac{-E}{LN} e^{-\lambda_2 t} \end{aligned} \quad (\text{B.3.6})$$

Sustituyendo (B.3.4) y (B.3.6) en la solución basada en $x(t) = \varphi(t)x(0) + x(t)_u$:

$$\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{R}{2LN} + \frac{1}{2}\right) e^{-\lambda_1 t} + \left(\frac{-R}{2LN} + \frac{1}{2}\right) e^{-\lambda_2 t} & \left(\frac{1}{CN}\right) e^{-\lambda_1 t} + \left(\frac{-1}{CN}\right) e^{-\lambda_2 t} \\ \left(\frac{-1}{LN}\right) e^{-\lambda_1 t} + \left(\frac{1}{LN}\right) e^{-\lambda_2 t} & \left(\frac{-R}{2LN} + \frac{1}{2}\right) e^{-\lambda_1 t} + \left(\frac{R}{2LN} + \frac{1}{2}\right) e^{-\lambda_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c(0) \\ i(0) \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} \frac{2E}{LCN(-\frac{R}{L} + N)} e^{-\lambda_1 t} + \frac{2E}{LCN(\frac{R}{L} + N)} e^{-\lambda_2 t} + E \\ \frac{E}{LN} e^{-\lambda_1 t} + \frac{-E}{LN} e^{-\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} v_c(t) &= \left\{ \left(\frac{R}{2LN} + \frac{1}{2}\right) e^{-\lambda_1 t} + \left(\frac{-R}{2LN} + \frac{1}{2}\right) e^{-\lambda_2 t} \right\} v_c(0) \\ &+ \left\{ \left(\frac{1}{CN}\right) e^{-\lambda_1 t} + \left(\frac{-1}{CN}\right) e^{-\lambda_2 t} \right\} i(0) \\ &+ \left[\frac{2E}{LCN(-\frac{R}{L} + N)} \right] e^{-\lambda_1 t} + \left[\frac{2E}{LCN(\frac{R}{L} + N)} \right] e^{-\lambda_2 t} + E \\ i(t) &= \left\{ \left(\frac{-1}{LN}\right) e^{-\lambda_1 t} + \left(\frac{1}{LN}\right) e^{-\lambda_2 t} \right\} v_c(0) \\ &+ \left\{ \left(\frac{-R}{2LN} + \frac{1}{2}\right) e^{-\lambda_1 t} + \left(\frac{R}{2LN} + \frac{1}{2}\right) e^{-\lambda_2 t} \right\} i(0) \\ &+ \left[\frac{E}{LN} \right] e^{-\lambda_1 t} + \left[\frac{-E}{LN} \right] e^{-\lambda_2 t} \end{aligned}$$

Soluciones para el Modo 3:

$$\begin{aligned} v_c(t) &= \left\{ \left(\frac{R}{2LN} + \frac{1}{2}\right) v_c(0) + \left(\frac{1}{CN}\right) i(0) + \frac{2E}{LCN(-\frac{R}{L} + N)} \right\} e^{-\lambda_1 t} \\ &+ \left\{ \left(\frac{-R}{2LN} + \frac{1}{2}\right) v_c(0) + \left(\frac{-1}{CN}\right) i(0) + \frac{2E}{LCN(\frac{R}{L} + N)} \right\} e^{-\lambda_2 t} + E \\ i(t) &= \left\{ \left(\frac{-1}{LN}\right) v_c(0) + \left(\frac{-R}{2LN} + \frac{1}{2}\right) i(0) + \frac{E}{LN} \right\} e^{-\lambda_1 t} \\ &+ \left\{ \left(\frac{1}{LN}\right) v_c(0) + \left(\frac{R}{2LN} + \frac{1}{2}\right) i(0) + \frac{-E}{LN} \right\} e^{-\lambda_2 t} \end{aligned}$$

B.4. Modo 4

Retomando el sistema de ecuaciones (3.3.5) que representa este modo de operación, también puede ser expresada en espacio de estados como se muestra:

$$\begin{bmatrix} \frac{dv_c}{dt} \\ \frac{di}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ i \end{bmatrix} \quad (\text{B.4.1})$$

Para la obtención de la solución de las ecuaciones diferenciales, que representan este modo de operación, se recurrió al método de la transformada de Laplace que a continuación se desarrolla.

Del caso matricial $\dot{x} = Ax$, se obtiene una solución de la forma $x(t) = \varphi(t)x(0)$, donde $\varphi(t)$ es la matriz de transición de estados y contiene toda la información de los movimientos libres del sistema. La matriz $\varphi(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$, donde $\varphi(s) = (sI - A)^{-1}$.

Se sabe de (B.4.1) que $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}$, al sustituir A en (B.1.2):

$$\varphi(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s + \frac{R}{L}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.4.2})$$

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] & \mathcal{L}^{-1}0 \\ \mathcal{L}^{-1}0 & \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s + \frac{R}{L}}\right] \end{bmatrix} \quad (\text{B.4.3})$$

Se obtiene la transformada inversa de Laplace para cada elemento en (B.4.3).

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{R}{L}t} \end{bmatrix} \quad (\text{B.4.4})$$

Sustituyendo (B.4.4) en la solución basada en $x(t) = \varphi(t)x(0)$:

$$\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{R}{L}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c(0) \\ i(0) \end{bmatrix}$$

Soluciones para el Modo 4:

$$\begin{aligned} v_c(t) &= v_c(0) \\ i(t) &= i(0)e^{-\frac{R}{L}t} \end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] Hans Schumacher Arjan van der Schaft. *An introduction to hybrid dynamical systems*, volume of . Springer London, , edition, 2000. .
- [2] Hai Lin and P.J. Antsaklis. Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 54(2):308 –322, feb. 2009.
- [3] H. Witsenhausen. *A class of hybrid-state continuous-time dynamic systems*. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 11(2):161 – 167, apr 1966.
- [4] A. Stephen Morse. *Control Using Logic-Based Switching*. Department of Electrical Engineering, Yale University, dec 1995.
- [5] Thomas A. Henzinger, Peter W. Kopke, Anuj Puri, and Pravin Varaiya. *What’s Decidable about Hybrid Automata?* In *Journal of Computer and System Sciences*, pages 373–382. ACM Press, 1995.
- [6] Rajeev Alur and Thomas A. Henzinger. *Modularity for Timed and Hybrid Systems*. pages 74–88. Springer-Verlag, 1997.
- [7] Rajeev Alur, Thomas A. Henzinger, Gerardo Lafferriere, and et al. *Discrete Abstractions of Hybrid Systems*, 2000.
- [8] K. Benmansour, A. Benalia, M. Djemaï, and J. de Leon. *Hybrid control of a multicellular converter*. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 1(1):16 – 29, 2007.
- [9] D. Patino, P. Riedinger, and C. Iung. *Predictive control approach for multicellular converters*. In *Industrial Electronics, 2008. IECON 2008. 34th Annual Conference of IEEE*, pages 3309 –3314, nov. 2008.
- [10] H. Cormerais, J. Buisson, P.Y. Richard, and C. Morvan. *Modelling and Passivity Based Control of switched systems from bond graph formalism: Application to multicellular converters*. *Journal of the Franklin Institute*, 345(5):468 – 488, 2008.
- [11] O. Benzineb, F. Taibi, M.E.H. Benbouzid, M.S. Boucherit, and M. Tadjine. *Multicell Converters Hybrid Sliding Mode Control*. *International Review on Modelling and Simulations*, 4(4):1396–1403, 2011.

- [12] K.L. Lian. *Derivation of a Small-Signal Harmonic Model for Closed-Loop Power Converters Based on the State-Variable Sensitivity Method*. Circuits and Systems I: Regular Papers, IEEE Transactions on, 59(4):833–845, april 2012.
- [13] Fernando Salinas Salinas. Estrategias de control de la tensión de los condensadores de un inversor multinivel del tipo condensadores flotantes en aplicaciones de compensación de redes eléctricas. PhD thesis, 2008.
- [14] Muhammad H. Rashid. *Circuitis, devices and applications*. Power electronics, Pearson Prentice Hall, pages 406–429, 2004.
- [15] Thomas A. Henzinger. *Hybrid Automata with Finite Bisimulations*. pages 324–335. Springer-Verlag, 1995.
- [16] Thomas A. Henzinger. *The Theory of Hybrid Automata*. pages 278–292. IEEE Computer Society Press, 1996.
- [17] Thomas A. Henzinger, Pei-Hsin Ho, and Howard Wong-toi. *Algorithmic Analysis of Nonlinear Hybrid Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, 43:225–238, 1996.
- [18] Thomas A. Henzinger and Peter W. Kopke. *State Equivalences for Rectangular Hybrid Automata*, 1996.
- [19] T.A. Meynard, H. Foch, P. Thomas, J. Courault, R. Jakob, and M. Nahrstaedt. *Multicell converters: basic concepts and industry applications*. Industrial Electronics, IEEE Transactions on, 49(5):955–964, oct 2002.
- [20] J. Guckenheimer. *A robust hybrid stabilization strategy for equilibria*. Automatic Control, IEEE Transactions on, 40(2):321–326, feb 1995.
- [21] C. Sreekumar and V. Agarwal. Hybrid control of a tri-state boost converter. In *Industrial Technology, 2006. ICIT 2006. IEEE International Conference on*, pages 121–125, dec. 2006.
- [22] Francisco J. Perez-Pinal Ilse Cervantes and Angelica Mendoza-Torres. *Hybrid control of dc-dc power converters*. Renewable Energy, T J Hammons, 2009.
- [23] Wassim M. Haddad, Sergey G. Nersesov, and VijaySekhar Chellaboina. Energy-based control for hybrid port-controlled hamiltonian systems. *Automatica*, 39(8):1425–1435, 2003.
- [24] T. Geyer, G. Papafotiou, and M. Morari. Hybrid model predictive control of the step-down dc-dc converter. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 16(6):1112–1124, nov. 2008.
- [25] R.A. Decarlo, M.S. Branicky, S. Pettersson, and B. Lennartson. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. *Proceedings of the IEEE*, 88(7):1069–1082, july 2000.
- [26] J. Ben Salah, C. Valentin, H. Jerbi, and C.Z. Xu. Geometric synthesis of a hybrid limit cycle for the stabilizing control of a class of nonlinear switched dynamical systems. *Systems & amp; Control Letters*, 60(12):967–976, 2011.

- [27] Carmen Pérez and Francisco Benítez. Closed curve solutions and limit cycles in a class of second-order switched nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, pages 658–664, 2011.
- [28] P. Riedinger, M. Sigalotti, and J. Daafouz. On the algebraic characterization of invariant sets of switched linear systems. *Automatica*, 46(6):1047–1052, 2010.
- [29] Jean Buisson, Pierre-Yves Richard, and Hervé Cormerais. On the stabilisation of switching electrical power converters. In Manfred Morari and Lothar Thiele, editors, *Hybrid Systems: Computation and Control*, volume 3414 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 184–197. Springer Berlin / Heidelberg, 2005.
- [30] Axel Schild and Jan Lunze. Stabilization of limit cycles of discretely controlled continuous systems by controlling switching surfaces. In Alberto Bemporad, Antonio Bicchi, and Giorgio Buttazzo, editors, *Hybrid Systems: Computation and Control*, volume 4416 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 515–528. Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [31] R. Cardim, M.C.M. Teixeira, E. Assuncao, and M.R. Covacic. Variable-structure control design of switched systems with an application to a dc-dc power converter. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 56(9):3505–3513, sept. 2009.
- [32] D. Jeltsema and J.M.A. Scherpen. A power-based perspective in modeling and control of switched power converters [past and present]. *Industrial Electronics Magazine, IEEE*, 1(1):7–54, spring 2007.
- [33] Matthew Senesky, Gabriel Eirea, and T. John Koo. Hybrid modeling and control of power electronics. In *Hybrid Systems: Computation and Control, ser. Lecture Notes in Computer Science*, pages 450–465. Springer-Verlag, 2003.
- [34] J.T. Mossoba and P.T. Krein. Exploration of deadbeat control for dc-dc converters as hybrid systems. In *Power Electronics Specialists Conference, 2005. PESC '05. IEEE 36th*, pages 1004–1010, june 2005.
- [35] Ian A. Hiskens and Patel Bhageerath Reddy. Switching-induced stable limit cycles. *Nonlinear Dynamics*, 50:575–585, 2007.
- [36] Hao Zhang, Xiao-Ping Yang, Xi-Kui Ma, and Bo He. Analysis of limit cycle behavior in dc-dc boost converters. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 13(5):2049–2062, 2012.
- [37] D. Jeltsema and J.M.A. Scherpen. Tuning of passivity-preserving controllers for switched-mode power converters. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 49(8):1333–1344, aug. 2004.
- [38] Jun Zhao and David J. Hill. Passivity and stability of switched systems: A multiple storage function method. *Systems & Control Letters*, 57(2):158–164, 2008.
- [39] M.S. Branicky, V.S. Borkar, and S.K. Mitter. A unified framework for hybrid control: model and optimal control theory. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 43(1):31–45, jan 1998.
- [40] Xuping Xu, Guisheng Zhai, and Shouling He. On practical asymptotic stabilizability of switched affine systems. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2(1):196–208, 2008.