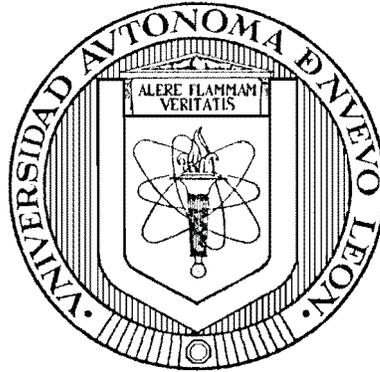


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



SINCRONIZACIÓN DE REDES COMPLEJAS CON ATRACTORES  
CAÓTICOS DE MÚLTIPLES ENROLLAMIENTOS: APLICADO AL  
ENCRIPTADO DE DATOS

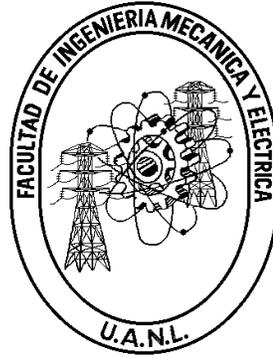
POR  
ALLAN GIOVANNI SORIANO SÁNCHEZ

TESIS  
EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERÍA ELÉCTRICA

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, N.L.

JULIO DEL 2013

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



SINCRONIZACIÓN DE REDES COMPLEJAS CON ATRACTORES  
CAÓTICOS DE MÚLTIPLES ENROLLAMIENTOS: APLICADO AL  
ENCRIPTADO DE DATOS

POR  
ALLAN GIOVANNI SORIANO SÁNCHEZ

TESIS  
EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERÍA ELÉCTRICA

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, N.L.

JULIO DEL 2013

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

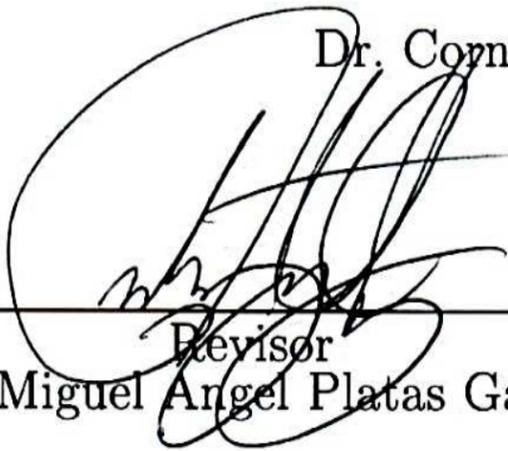
Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis **“SINCRONIZACIÓN DE REDES COMPLEJAS CON ATRACTORES CAÓTICOS DE MÚLTIPLES ENROLLAMIENTOS: APLICADO AL ENCRIPTADO DE DATOS”** realizada por **Allan Giovanni Soriano Sánchez**, matrícula número **1340716**, sea aceptada para su defensa como opción al grado de **Maestro en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica**.

El Comité de Tesis



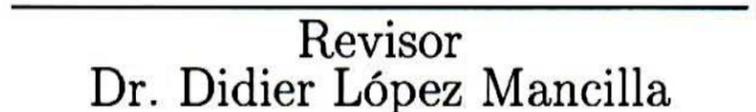
Asesor

Dr. Cornelio Posadas Castillo



Revisor

Dr. Miguel Angel Platas Garza



Revisor

Dr. Didier López Mancilla

Vo. Bo.  
Dr. Moisés Hinojosa Rivera  
División de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, N.L.

Julio del 2013

# Resumen

## SINCRONIZACIÓN DE REDES COMPLEJAS CON ATRACTORES CAÓTICOS DE MÚLTIPLES ENROLLAMIENTOS: APLICADO AL ENCRIPTADO DE DATOS

Publicación No. \_\_\_\_\_

Allan Giovanni Soriano Sánchez

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Asesor: Dr. Cornelio Posadas Castillo

Julio del 2013

Este trabajo de investigación trata sobre la sincronización de redes complejas que están compuestas por osciladores caóticos que presentan atractores con múltiples enrollamientos. Dichas redes complejas se sincronizan en diferentes tipos de topología y configuración, de los cuales, se emplean las 4 combinaciones posibles: redes complejas regulares con nodo maestro, redes complejas regulares sin nodo maestro, redes complejas irregulares con nodo maestro y redes complejas irregulares sin nodo maestro.

Se realiza también un estudio de estabilidad del sistema dinámico del error de sincronización entre cualquier par de osciladores de la red empleando la teoría de sistemas perturbados para las diferentes modalidades de osciladores que se describen.

Para el encriptamiento caótico se proponen dos criterios de selección para la señal caótica con base en las características que presenta en tiempo y frecuencia; esto sugiere que de escoger la señal de manera correcta, el sistema de comunicación tendría un nivel de seguridad más elevado.

Por último, se incluye la simulación de un sistema de comunicación donde se realiza el encriptamiento y transmisión de audio e imagen.

**Palabras clave:** Caos, osciladores caóticos, osciladores caóticos con atractores de múltiples enrollamientos, redes complejas, sincronización, sincronización de redes complejas, sistemas de comunicación, encriptamiento caótico.

# Contenido

<b>Lista de figuras</b>	<b>VIII</b>
<b>Lista de tablas</b>	<b>XI</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Objetivo general . . . . .	1
1.3. Objetivos particulares . . . . .	2
1.4. Antecedentes . . . . .	2
1.4.1. Caos . . . . .	3
1.4.2. Sincronía . . . . .	6
1.4.3. Criptología . . . . .	7
1.4.3.1. Definiciones y ejemplos . . . . .	7
1.4.4. Encriptado caótico . . . . .	9
<b>2. Redes complejas</b>	<b>12</b>
2.1. Definiciones . . . . .	12
2.2. Topologías de las redes complejas . . . . .	14
2.2.1. Topología regular . . . . .	15
2.2.1.1. Acoplamiento global . . . . .	15
2.2.1.2. Acoplamiento estrella . . . . .	16
2.2.1.3. Acoplamiento anillo . . . . .	17
2.2.2. Topología irregular . . . . .	18
<b>3. Osciladores caóticos con atractores de múltiples enrollamientos</b>	<b>20</b>
3.1. Oscilador de Chua generalizado . . . . .	21
3.2. Oscilador de Genesisio & Tesi . . . . .	27
3.2.1. Oscilador de Genesisio & Tesi en 1-D . . . . .	27

3.2.2.	Oscilador de Genesio & Tesi en 2-D . . . . .	29
3.2.3.	Oscilador de Genesio & Tesi en 3-D . . . . .	32
<b>4.</b>	<b>Sincronización de redes complejas</b>	<b>37</b>
4.1.	Definiciones de sincronización . . . . .	37
4.2.	Sincronización de redes complejas . . . . .	38
4.3.	Análisis de estabilidad del error de sincronía . . . . .	40
4.3.1.	Chua generalizado: configuración maestro - esclavo . . . . .	40
4.3.2.	Chua generalizado: configuración bidireccional . . . . .	45
4.3.3.	Genesio & Tesi 3-D: configuración maestro - esclavo . . . . .	48
4.3.4.	Genesio & Tesi 3-D: configuración bidireccional . . . . .	52
4.4.	Ejemplos de sincronización . . . . .	54
4.4.1.	Sincronización dos osciladores Chua generalizado . . . . .	55
4.4.2.	Sincronización red regular Chua generalizado . . . . .	57
4.4.3.	Sincronización red regular Genesio & Tesi 3-D . . . . .	59
4.4.4.	Sincronización red irregular Genesio & Tesi 3-D . . . . .	64
<b>5.</b>	<b>Encriptado caótico de datos</b>	<b>70</b>
5.1.	Criterios de selección . . . . .	70
5.1.1.	Criterio 1: Selección basada en el dominio del tiempo . . . . .	71
5.1.2.	Criterio 2: Selección basada en el dominio de la frecuencia . . . . .	73
5.1.2.1.	Espectro de señales caóticas . . . . .	74
5.2.	Resultados de simulaciones . . . . .	80
5.2.1.	Caso de estudio: encriptamiento de voz . . . . .	85
5.2.1.1.	Encriptado . . . . .	85
5.2.2.	Encriptamiento de imagen . . . . .	92
<b>6.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>96</b>
6.1.	Trabajos futuros . . . . .	97

# Lista de figuras

1.1. Atractor de Lorenz. . . . .	4
1.2. Características del caos . . . . .	5
1.3. Dibujo original de C. Huygens ilustrando su experimento. . . . .	6
1.4. Ejemplos de sincronización. . . . .	7
1.5. Ejemplos de criptografía antigua . . . . .	8
1.6. Diagrama básico de encriptamiento caótico. . . . .	10
1.7. Esquema de comunicación segura de dos canales. . . . .	11
2.1. Ejemplos de grafos: (a) grafo dirigido, (b) grafo no dirigido. . . . .	13
2.2. Tipo de configuración . . . . .	15
2.3. Red compleja en acoplamiento global. . . . .	16
2.4. Red compleja en acoplamiento estrella. . . . .	17
2.5. Red compleja en acoplamiento anillo. . . . .	17
2.6. Red compleja irregular. . . . .	19
3.1. No-linealidad $f(x)$ oscilador de Chua . . . . .	22
3.2. No-linealidad $h(x)$ oscilador de Chua generalizado . . . . .	22
3.3. Atractor de Chua generalizado 4 enrollamientos . . . . .	24
3.4. Atractor de Chua generalizado 3 enrollamientos . . . . .	24
3.5. Atractor de Chua generalizado 7 enrollamientos . . . . .	26
3.6. Puntos de equilibrio no-linealidad $h(x)$ . . . . .	27
3.7. Atractores de Genesio & Tesi en 1-D . . . . .	29
3.8. Atractores de Genesio & Tesi en 2-D . . . . .	31
3.9. Atractor de Genesio & Tesi 3-D . . . . .	34
3.10. Atractor Genesio & Tesi 3-D $2 \times 2 \times 2$ enrollamientos . . . . .	34
3.11. Atractor Genesio & Tesi 3-D: $4 \times 3 \times 2$ enrollamientos . . . . .	35
3.12. Atractor Genesio & Tesi 3-D de $4 \times 3 \times 2$ enrollamientos . . . . .	35
3.13. Atractor Genesio & Tesi 3-D $2 \times 5 \times 5$ enrollamientos . . . . .	36

3.14. Atractor Genesio & Tesi 3-D $2 \times 5 \times 5$ enrollamientos . . . . .	36
4.1. Ejemplo del plano de fase de la sincronía de los estados $x$ y $x'$ . . . . .	55
4.2. Sincronización 2 osciladores . . . . .	55
4.3. (a) Estados de los osciladores. (b) Planos de fase. . . . .	57
4.4. Sincronización 4 osciladores . . . . .	57
4.5. Convergencia de los estados a una sola dinámica. . . . .	59
4.6. Planos de fase de la red . . . . .	59
4.7. Sincronización de 6 osciladores Genesio & Tesi 3-D . . . . .	60
4.8. Estados de los osciladores de la red . . . . .	63
4.9. Plano de fase estados $x_i$ $i = 1, \dots, 6$ . . . . .	64
4.10. Sincronización 9 osciladores Genesio & Tesi 3-D . . . . .	64
4.11. Estados de la red . . . . .	67
4.12. Plano de fase estados $x_i$ , $i = 1, \dots, 4$ vs. $x_j$ , $j = 2, \dots, 5$ . . . . .	67
4.13. Plano de fase estados $x_i$ , $i = 1, \dots, 4$ vs. $x_j$ , $j = 6, \dots, 9$ . . . . .	68
4.14. Plano de fase estados $x_i$ , $i = 5, \dots, 8$ vs. $x_j$ , $j = 6, \dots, 9$ . . . . .	68
5.1. Niveles de energía del oscilador de Chua generalizado . . . . .	73
5.2. Densidad espectral: (a) estado $x$ , (b) estado $y$ . . . . .	75
5.3. Densidad espectral estado $z$ . . . . .	75
5.4. Densidad espectral: (a) estado $x$ , (b) estado $y$ . . . . .	76
5.5. Densidad espectral estado $z$ . . . . .	76
5.6. Ancho de banda de una señal . . . . .	77
5.7. Respuesta frecuencial del oído . . . . .	78
5.8. Respuesta pasa-banda del oído . . . . .	79
5.9. Función de ponderación . . . . .	80
5.10. Fenómeno de pequeña magnitud . . . . .	83
5.11. Sistema de comunicación . . . . .	85
5.12. Ilustración de mal encriptamiento . . . . .	86
5.13. Señal de audio . . . . .	87
5.14. Densidad espectral del audio . . . . .	87
5.15. Atractor Genesio & Tesi 1-D . . . . .	88
5.16. Evolución temporal de los estados Genesio & Tesi 1-D . . . . .	88
5.17. Evolución de la sincronización de estados Genesio & Tesi 1-D . . . . .	89
5.18. Densidades espectrales señal caótica y señal de audio . . . . .	90

5.19. Señales del sistema de comunicación . . . . .	90
5.20. Densidad espectral de un mal encriptado . . . . .	91
5.21. Mensaje de voz mal encriptado . . . . .	92
5.22. Red regular de osciladores Genesisio & Tesi 3-D . . . . .	92
5.23. Atractor caótico de la red $2 \times 2 \times 2$ enrollamientos . . . . .	93
5.24. Evolución temporal de los estados de la red de la figura (5.22). . . . .	93
5.25. Imagen a encriptar . . . . .	94
5.26. (a) Imagen encriptada, (b) Imagen recuperada. . . . .	94
5.27. Error de recuperación de imagen . . . . .	95

# Lista de tablas

4.1. Condiciones iniciales de la red compleja figura (4.2)(a). . . . .	56
4.2. Condiciones iniciales de la red compleja figura (4.4)(a). . . . .	58
4.3. Condiciones iniciales de la red compleja figura (4.7)(a). . . . .	60
4.4. Condiciones iniciales de la red compleja irregular (4.10)(a). . . . .	65
5.1. Índices para selección Chua generalizado . . . . .	81
5.2. Índices para selección Genesisio & Tesi 1-D . . . . .	82
5.3. Índices para selección Genesisio & Tesi 3-D . . . . .	82

# Capítulo 1

## Introducción

En el presente capítulo se hace saber la motivación que llevó a la realización de este trabajo. También se dan a conocer los objetivos tanto general como particulares que se buscó lograr durante la investigación para así crearle al lector una visión general del documento. De igual manera, se proporcionan la información y conceptos básicos necesarios para la total comprensión del escrito.

### 1.1. Motivación

En este trabajo de investigación se estudia la sincronización de redes compuestas por Osciladores Caóticos con Atractores de Múltiples Enrollamientos (OCAME). En particular se busca emplear una técnica de control para sincronizar redes compuestas por osciladores que presentan atractores de múltiples enrollamientos. Se busca aplicar el comportamiento caótico y la sincronización de los osciladores con atractores de múltiples enrollamientos en el proceso de comunicar información confidencial (caos para encriptar y sincronización para desencriptar) de manera segura.

### 1.2. Objetivo general

Incrementar la complejidad de las señales caóticas producidas por osciladores de atractores con múltiples enrollamientos (oscilador Chua generalizado [1], nueva familia de osciladores de  $n$ -enrollamientos [1, 2]), para realizar un encriptado caótico eficaz empleado en el proceso de transmisión segura de información.

### 1.3. Objetivos particulares

- Lograr la sincronización de 2 osciladores que presentan atractores de múltiples enrollamientos (oscilador Chua generalizado [1], nueva familia de osciladores de n-enrollamientos [1, 2]).
- Lograr la sincronización de osciladores que presentan atractores de múltiples enrollamientos en redes complejas con acoplamiento regular.
- Lograr la sincronización de osciladores que presentan atractores de múltiples enrollamientos en redes complejas con acoplamiento irregular.
- Realizar el análisis de estabilidad del error de sincronización presente en cualquier par de osciladores de la red compleja.
- Emplear los modelos matemáticos del oscilador de atractores de múltiples enrollamientos como generadores de caos para encriptar información confidencial.
- Determinar si encriptar usando OCAME aumenta la seguridad del mensaje enviado comparado con la seguridad que brindan los diferentes tipos de encriptado usando osciladores caóticos convencionales. Esto se traduciría en una mejora al proceso de comunicación segura de información confidencial.
- Simular numéricamente el proceso de encriptado, transmisión y desencriptado de información privada.
- Evaluar la calidad del encriptado, la seguridad de la transmisión de la información y la calidad del mensaje recuperado.

### 1.4. Antecedentes

En esta sección se mencionan y describen brevemente los conceptos de *Caos*, *Sincronía y Criptología* desde la perspectiva científica para la total comprensión de la tesis.

### 1.4.1. Caos

El fenómeno del *caos* ha sido estudiado ampliamente en la segunda mitad del siglo XX, aún así, persiste la falta de un enunciado que describa este concepto de manera rigurosa. De manera general, el caos, es un fenómeno que exhibe un comportamiento temporal de formas muy irregulares y en apariencia al azar, sin embargo, es de naturaleza determinista. La palabra *caos* proviene del griego “ $\chi\acute{\alpha}\omicron\varsigma$ ” que significa impredecible. En el Español actual el concepto mental se asocia a algo negativo, regularmente a desorden y esto es debido a las variaciones lingüísticas que ha sufrido el idioma a través del tiempo.

La idea de la posible existencia del caos fue primeramente introducida por Henri Poincaré a finales del siglo XIX, en el sentido de que el comportamiento de un sistema dependiera sensiblemente de las condiciones iniciales. El matemático francés introdujo este nuevo punto de vista al preguntarse si el sistema solar sería estable para siempre, y al reconocer al mismo tiempo la existencia de innumerables fenómenos que no eran completamente aleatorios sino más bien, no respondían a una dinámica lineal.

La primer evidencia física de caos aceptada fué la realizada por Edward Lorenz. En 1963, se dice que mientras trabajaba con el conjunto de ecuaciones diferenciales (1.1) con valores de parámetros  $a = 10$ ,  $b = 28$ ,  $c = 8/3$ , más tarde conocidas mundialmente como las ecuaciones de Lorenz, intentaba predecir el comportamiento del clima. E. Lorenz obtuvo de la simulación un atractor que actualmente se conoce como el atractor de Lorenz y que se muestra en la figura (1.1), creyendolo equivocado, simuló repetidamente dichas ecuaciones para valores de parámetros diferentes obteniendo el mismo resultado; después de estudiar detenidamente el sistema, concluyó que las simulaciones eran diferentes para condiciones iniciales muy próximas. En la actualidad, esta condición característica de los sistemas caóticos se conoce como *sensibilidad a condiciones iniciales*.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x), \\ \dot{y} &= x(b - z) - y, \\ \dot{z} &= xy - cz.\end{aligned}\tag{1.1}$$

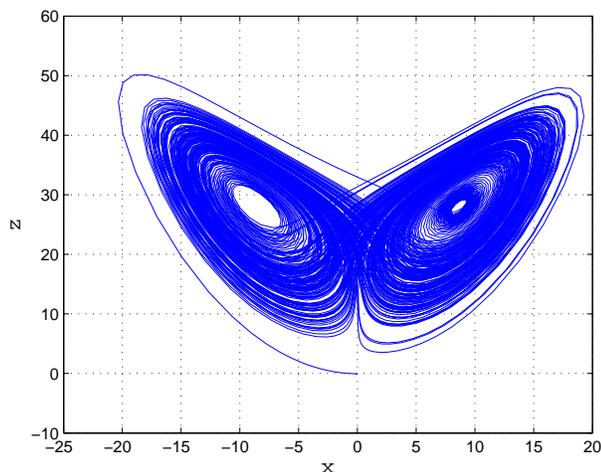


Figura 1.1: Atractor de Lorenz.

De manera general, las características que debe cumplir un sistema para que se considere caótico son las siguientes:

- Dinámica no lineal.
- Sensibilidad a condiciones iniciales.
- Exponentes de Lyapunov positivos.
- Atractores extraños.
- Dimensión fractal en los atractores.

La primer característica, *dinámica no lineal*, es inherente a los sistemas caóticos debido a que el caos solo se presenta en sistemas modelados por ecuaciones diferenciales no lineales de orden tres como mínimo.

La *sensibilidad a condiciones iniciales* se refiere, a que el mismo sistema caótico presenta trayectorias que divergen de manera exponencial una de la otra pero permaneciendo acotadas, habiendo partido de condiciones iniciales muy próximas hasta volverse completamente diferentes.

La tercer característica está muy relacionada con la anterior, esto es debido a que los *exponentes de Lyapunov* son una medida que describe el grado de separación o divergencia de dos trayectorias con vectores de estado inicial muy cercanos uno del otro.

Los *atractores extraños* son un indicador de un comportamiento complicado y en este caso en particular, de comportamiento caótico. Algunos investigadores piensan que la dimensión de un atractor se debe considerar para caracterizar el comportamiento asintótico de un sistema, lo que da paso a la última característica.

La *dimensión fractal* es el número racional que se obtiene de aplicar el estudio de dimensión a un atractor caótico.

En la figura (1.2) se ilustran gráficamente tres de las características mencionadas anteriormente. La figura (1.2)(a) muestra un atractor caótico que corresponde al oscilador de Rössler [3], la figura (1.2)(b) muestra el primer estado del oscilador de Chua con condiciones iniciales de 0.1 y 0.101 para las trayectorias azul y roja respectivamente y finalmente, en la figura (1.2)(c) se muestra la dimensión fractal.

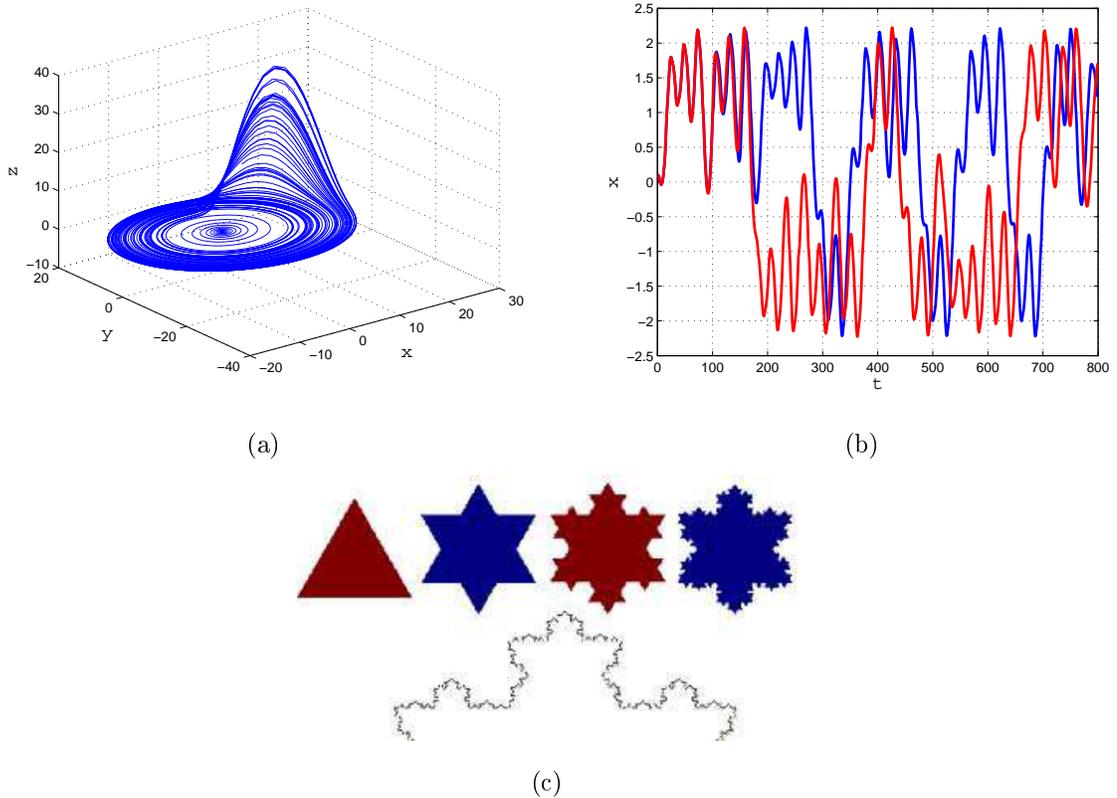


Figura 1.2: Características del caos: (a) Atractor caótico de Rössler, (b) Sensibilidad a condiciones iniciales (azul 0.1, rojo 0.101), (c) Dimensión fractal.

### 1.4.2. Sincronía

Se puede definir **sincronía** como la circunstancia de ocurrir o suceder dos o más cosas al mismo tiempo [4]. De acuerdo con los registros históricos, Christiaan Huygens es el padre de la sincronía, debido a que fué probablemente el primero en observar este fenómeno en dos péndulos. Se dice que el matemático holandés observó que dos relojes de péndulos que inicialmente oscilaban a frecuencias diferentes, sincronizaban sus movimientos después de permanecer acoplados a través de una viga, además, si alguna interferencia interrumpía la sincronía, esta se recuperaba en un corto tiempo. En la figura (1.3) se muestra el dibujo original de Christiaan Huygens [5].

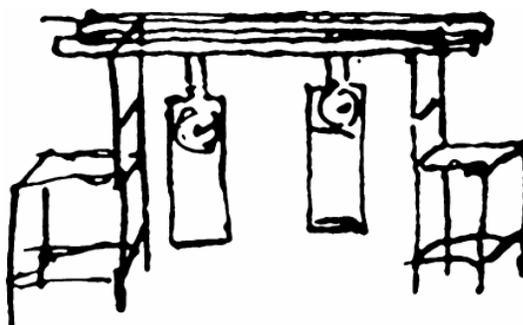


Figura 1.3: Dibujo original de C. Huygens ilustrando su experimento.

Posteriormente, numerosos experimentos de sincronización fueron reportados, por ejemplo: Jean-Jacques Dortous de Mairan observó la sincronía de la disposición de las hojas de una planta de alubia (*haricot bean*) con el día y la noche [5], W. H. Eccles and J. H. Vincent descubrieron la propiedad de sincronización en un triodo generador [5] y William Strutt que describió el fenómeno de sincronización en sistemas acústicos [5].

Se muestran algunos ejemplos de sincronización que se dan en la naturaleza, como es el vuelo de las aves figura (1.4a y 1.4d), en la vida humana figura (1.4b y 1.4e) y en la ingeniería figura (1.4c y 1.4f).

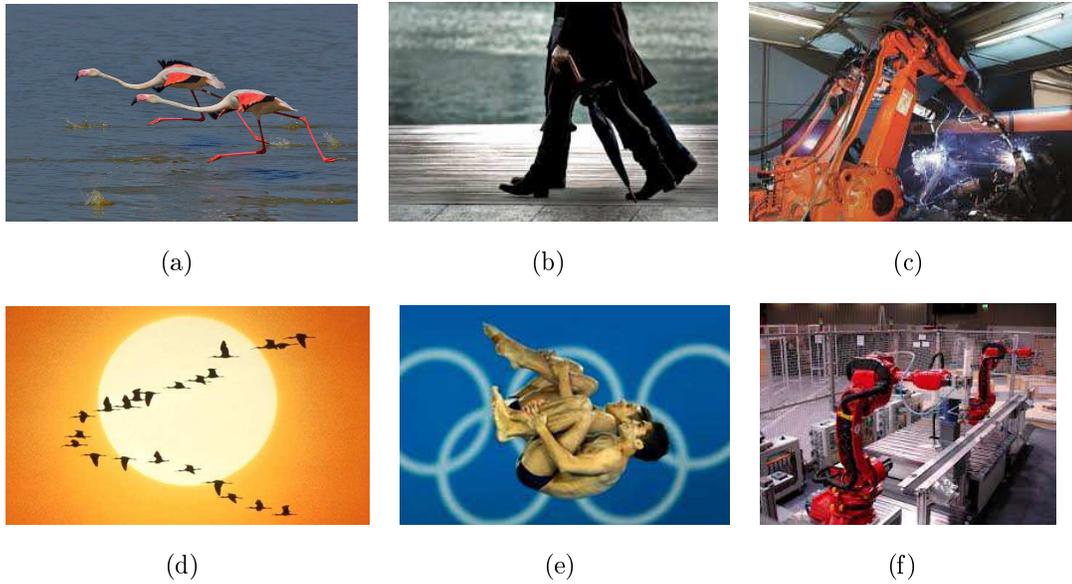


Figura 1.4: Ejemplos de sincronización.

Los escenarios de configuración que se pueden emplear para buscar la sincronía y que se describen en el capítulo 2 son:

- Configuración con nodo aislado o nodo maestro
- Configuración sin nodo maestro o bidireccional

### 1.4.3. Criptología

Desde tiempos muy antiguos el hombre ha tenido la necesidad de ocultar información o al menos, de limitar el acceso a ella. Impulsada por acciones religiosas, científicas o de guerra, la humanidad se vio en la necesidad de emplear escrituras secretas. En la actualidad, debido a los avances tecnológicos y a la acelerada modernización en materia de computación, los métodos usados para encriptar han revolucionado la criptografía, volviendola cada vez más compleja, lo cual puede verse reflejado en el tamaño de las claves usadas para descryptar.

#### 1.4.3.1. Definiciones y ejemplos

La palabra **criptología** proviene de la raíz griega *krypto* que significa “oculto” y *logos* que significa “discurso”, y es la disciplina que se encarga de estudiar la escritura secreta o mensajes que han sido procesados de alguna manera para convertirlos en

difíciles o casi imposibles de leer por personas que no han sido autorizadas. En esta investigación, el interés se centra en la rama de la criptología llamada **criptografía** que proviene de  $\kappa\rho\acute{\upsilon}\pi\tau\omega$  (krypto) “oculto” y  $\gamma\rho\acute{\alpha}\varphi\omega\varsigma$  (graphos) “escribir” (*escritura oculta*), y se encarga de estudiar los sistemas que se emplean para proteger la información y así, proporcionar seguridad al proceso de comunicación y a las partes que se comunican.

Algunos ejemplos de sistemas que se emplearon en la antigüedad para encriptar son la *escitala Espartana*, el *método de Julio César* y la escritura *hierática*; la Máquina Enigma usada por Alemania durante la Segunda Guerra Mundial es otro ejemplo de encriptamiento poco menos antiguo.

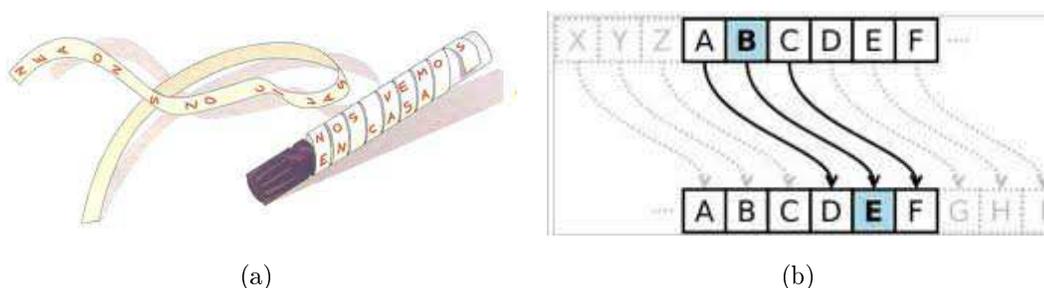


Figura 1.5: Ejemplos de criptografía antigua: (a) Escitala Espartana, (b) Cifrado de Julio César.

La escitala Espartana figura (1.5)(a) consistía en dos varas de diámetro determinado y un pedazo de papiro. Cada una de las varas la tenían los participantes de la comunicación, si el poseedor de una de las varas quería enviar un mensaje al otro poseedor, enrollaba el papiro alrededor de la vara y escribía el mensaje de manera longitudinal, desenrollaba el papiro y era enviado. El receptor únicamente enrollaba el papiro en la vara gemela y las letras aparecían ordenadas formando el mensaje. En este método de encriptar, la clave era el diámetro de la vara. Para el cifrado de Julio César figura (1.5)(b), se escribía el mensaje original y se reemplazaba cada letra por la letra que corresponde tres posiciones adelante, así, el mensaje “encriptado caótico” se verá como “hqfulswdgrfdrwlfr”.

Actualmente, la capacidad de almacenamiento y la velocidad de los ordenadores, han permitido la elaboración de algoritmos generadores de claves que se emplean para descifrar información que se envía a través de canales públicos. Los sistemas de encriptado pueden ser de dos tipo:

- Simétricos: Usan la misma clave para encriptar y descifrar.

- Asimétricos: Usan dos claves, una pública para encriptar y una privada para desencriptar.

Algunos de los algoritmos de encriptado que se usan en la actualidad

- Simétricos:
  - Estándar de Encriptado de Datos (*DES Data Encryption Standard*) [6].
  - Triple DES.
  - Algoritmo IDEA (*International Data Encryption Algorithm*).
- Asimétricos:
  - Algoritmo DH (*Whitfield Diffie y Martin Hellman*).
  - Algoritmo RSA (*Rivest, Shamir y Adelman*) [6].

Se incita al lector interesado revisar [7]-[10] para profundizar en alguno de los algoritmos de encriptado mencionados.

#### 1.4.4. Encriptado caótico

Desde que [Pecora y Carroll 1990] sugirieron y probaron la sincronización de sistemas caóticos, numerosos resultados sobre encriptamiento caótico se reportaron en la literatura científica. Alternativamente, el encriptamiento caótico representa otro método para encriptar que se ha llevado a cabo con éxito en laboratorio.

De manera general, el **encriptamiento caótico** consiste en *codificar* el mensaje que se desea enviar, empleando las dinámicas caóticas producidas por un sistema caótico presente en la parte emisora, el mensaje codificado es enviado a través de un canal público al final del cual se encuentra el receptor, que se encarga de *decodificar o reconstruir* el mensaje mediante la sincronización de un sistema caótico presentes a la dinámica del emisor.

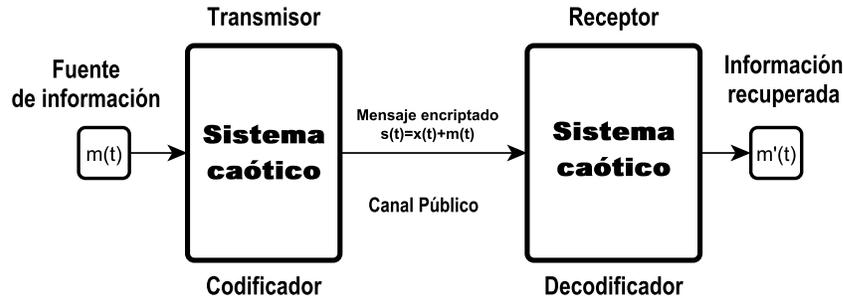


Figura 1.6: Diagrama básico de encriptamiento caótico.

Se han desarrollado varios esquemas que permiten transformar la señal de información en una señal con forma caótica del lado del emisor, y extraer la señal de información del lado del receptor, los más destacados son:

- Conmutación entre atractores extraños.
- Modulación caótica.
- Enmascaramiento caótico o encriptamiento aditivo.

Numerosos resultados se han reportado empleando alguno de estos tres tipos de encriptamiento caótico, en los cuales las técnicas de control usadas para sincronizar los sistemas caóticos o hipercaóticos varían. Se recomiendan al lector que desee conocer alguna de estas técnicas de control o los sistemas caóticos sincronizados la siguiente bibliografía [11]-[15].

El esquema que se empleará más adelante en el capítulo 5 es el de **encriptamiento aditivo**, el cual consiste en un sistema caótico presente en el emisor cuya señal de salida es sumada a la señal de información. Esta suma es la que se transmite a través del canal. El receptor usa la señal transmitida para sincronizar un sistema caótico equivalente al del emisor. La señal caótica reconstruida es sustraída de la señal transmitida, lo cual reconstruye la señal de información [6].

Es importante especificar que el esquema descrito anteriormente se emplea en un sistema de comunicación de dos canales como el que se muestra en la figura (1.7), en el cual, la información enviada a través del primer canal de transmisión es la señal que usa el sistema caótico del receptor para sincronizar, y no tiene datos del vector de información que se desea enviar. El segundo canal es usado para enviar el mensaje cifrado que es reconstruido mediante la sustracción de la señal sincronizada.

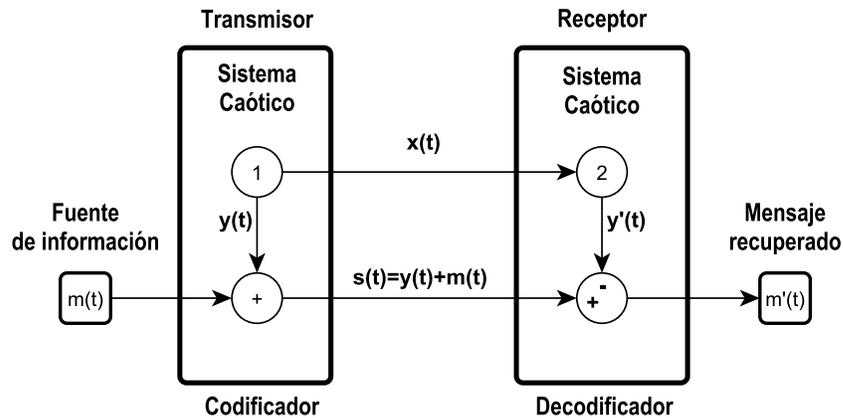


Figura 1.7: Esquema de comunicación segura de dos canales.

En el capítulo 5 se proporcionan conceptos y técnicas empleadas en el análisis frecuencial de señales que se planea usar para mejorar el nivel de seguridad del sistema de comunicación, así como también se proponen dos criterios con los cuales se pretende discriminar las mejores señales para encriptar.

Para finalizar este capítulo introductorio, a continuación se describe la organización del escrito:

En el capítulo 2 se describen las redes complejas, se proporcionan definiciones y ejemplos. El capítulo 3 versa sobre osciladores caóticos que presentan atractores con enrollamientos múltiples, se describen los modelos matemáticos y se muestran algunas de las modalidades de atractores que se pueden obtener. En el capítulo 4 se describe la sincronización de osciladores caóticos, se proporcionan los resultados de la sincronización de diferentes redes complejas constituidas por osciladores caóticos con atractores caóticos de enrollamientos múltiples de varios tipos y en diferentes modalidades, también se proporciona el análisis de estabilidad del sistema dinámico del error de sincronización de cualquier par de osciladores de la red. En el capítulo 5 se proporcionan los conceptos necesarios sobre procesamiento de señales para dar paso a la propuesta de los criterios de selección de la señal caótica, así también se proporcionan aquí los resultados de las simulaciones del sistema de comunicación, en donde se encripta voz e imagen. Por último, el capítulo 6 muestra las conclusiones a las que se llegó al finalizar la investigación y se plantean los trabajos futuros.

# Capítulo 2

## Redes complejas

Debido a su presencia en la naturaleza y a su importancia en la vida cotidiana, las redes complejas han sido objeto de estudios exhaustivos a lo largo del tiempo desde diferentes perspectivas científicas que abarcan física, biología, sociología, neurología, economía y medicina por mencionar algunos ejemplos. Los diferentes niveles de organización en que pueden presentarse van desde lo microscópico como: redes de regulación genética [16], redes de proteínas [16], redes neuronales [16] y redes metabólicas [16]; hasta un nivel mucho más grande como: las redes sociales [16], el Internet [16], el WWW (*World Wide Web*) [16], las redes de comunicaciones (carreteras, vías aéreas) [16].

En general, el estudio de las redes está a cargo de la rama de las Matemáticas discretas llamada *Teoría de grafos*. El nacimiento de la teoría de grafos data del año 1736, cuando el matemático Suizo Leonhard Euler hizo pública la solución del problema del puente Königsberg [17]-[19], hecho que propició un número considerable de descubrimientos en el campo y dio respuesta a varios cuestionamientos que hasta ese momento estaban inconclusos, un ejemplo es el caso de colorear con la menor cantidad de colores diferentes regiones vecinas de un mapa.

### 2.1. Definiciones

Desde el punto de vista matemático, una red puede ser representada como un grafo [20]:

**Definición 2.1** *Un grafo dirigido (no dirigido)  $G = (\mathcal{N}, \mathcal{L})$  consta de dos conjuntos  $\mathcal{N}, \mathcal{L}$  tal que  $\mathcal{N} \neq \emptyset$  y  $\mathcal{L}$  es un conjunto de pares de elementos ordenados (no*

ordenados) de  $\mathcal{N}$ . Los elementos de  $\mathcal{N} \equiv \{n_1, n_2, \dots, n_N\}$  son los nodos (vertices o puntos), mientras que los elementos de  $\mathcal{L} \equiv \{l_1, l_2, \dots, l_k\}$  son las conexiones (aristas o líneas). Dos nodos unidos por una conexión son llamados **nodos adyacentes o vecinos**. El grado  $k_i$  de un nodo  $i$  es el número total de sus conexiones. En un grafo dirigido el orden es importante:  $l_{ij}$  representa una conexión del nodo  $i$  al  $j$ ,  $l_{ij} \neq l_{ji}$ . En un grafo no dirigido se dice que la conexión es incidente en ambos nodos.

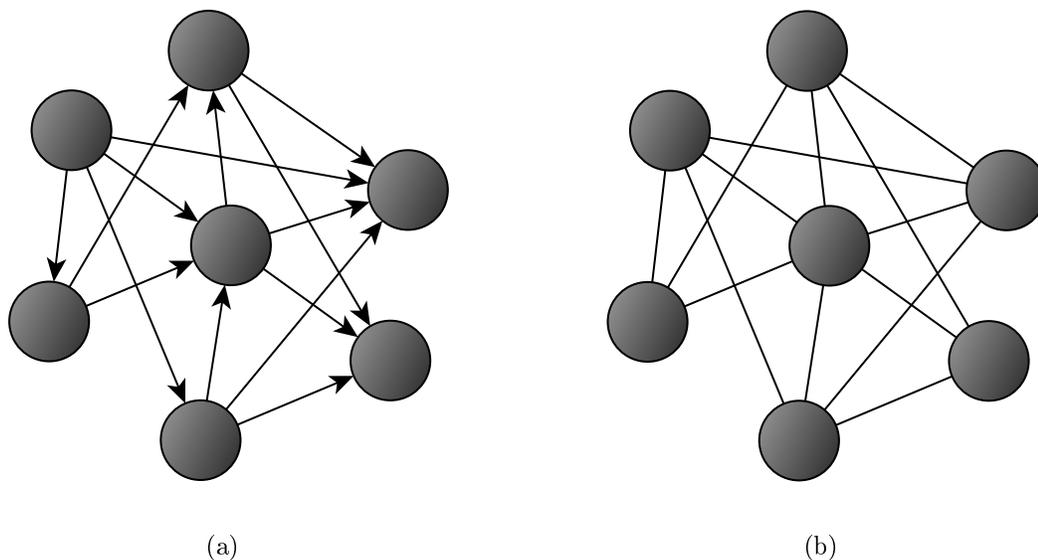


Figura 2.1: Ejemplos de grafos: (a) grafo dirigido, (b) grafo no dirigido.

Un conjunto de nodos (vertices) unidos a través de líneas es solo la definición más simple de red, hay muchas maneras en las cuales una red puede ser más complicada. Por ejemplo, puede haber más de un tipo de nodos (vertices) o de conexión, y los nodos y conexiones pueden tener una amplia variedad de propiedades numéricas o de algún otro tipo asociadas [16].

Antes de definir las redes complejas, se enuncian las características más destacables que presentan los sistemas complejos:

- Están compuestos de muchas partes que interactúan entre sí (nodos).
- Cada parte tiene estructura interna propia y está encargada de una tarea específica.
- Presentan comportamientos emergentes al no existir un nodo maestro, esto es, el todo resultante no es la suma de sus partes.

Con base en lo anterior, una *red compleja* vista como un sistema complejo, es un conjunto de nodos interconectados que interactúan entre sí, donde cada nodo es la unidad fundamental de la red que contiene información detallada de la red [21]. El término complejo se refiere a las características de los nodos y la estructura o topología de la red. Los nodos pueden estar modelados por ecuaciones diferenciales (naturaleza continua) o ecuaciones en diferencias (naturaleza discreta). En este caso particular, los nodos son osciladores caóticos que presentan atractores con múltiples enrollamientos.

## 2.2. Topologías de las redes complejas

La topología o acoplamiento es la disposición o la forma en la que están conectados los nodos de una red, mientras que la configuración es el tipo de conexión que determina el flujo de información entre los nodos. Las redes complejas se dividen en dos grupos de acuerdo con la topología que presentan y cada uno de estos en dos grupos más de acuerdo con su configuración. El primer grupo son las *redes complejas regulares* las cuales exhiben un patrón definido de conexión, mientras que el segundo grupo, las *redes complejas irregulares* no presentan un patrón definido. Las topologías de las redes complejas regulares más conocidas son: la topología anillo, la topología estrella y la topología global, cada una de las cuales puede presentarse en dos tipos de configuración que puede ser: configuración *maestro - esclavo* (con nodo aislado) figura (2.2)(a) y *bidireccional* (sin nodo aislado) figura (2.2)(b).

En la configuración maestro - esclavo, el nodo maestro impone su dinámica a toda la red, en este caso particular, el oscilador caótico maestro impondrá su dinámica caótica al resto de los osciladores. En un escenario diferente, en la configuración bidireccional, la ausencia de un nodo maestro da paso a una *dinámica emergente*, la cual como se menciono anteriormente, no es la suma de las partes que forman la red, en este caso las dinámicas de cada oscilador, sino que es una dinámica diferente a la de cualquiera de ellos.

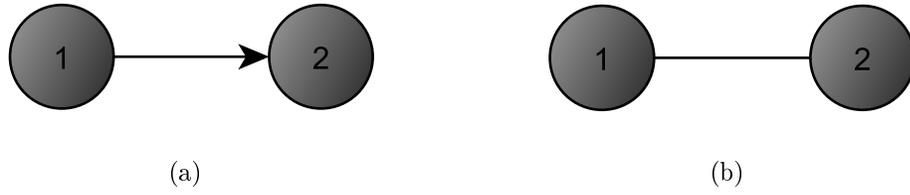


Figura 2.2: Tipo de configuración: (a) Maestro - Esclavo, la información fluye en un sentido. (b) Bidireccional, la información fluye en ambos sentidos.

La matriz de acoplamiento  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{R}^{N \times N}$  representa el acoplamiento de la red. Si existe una conexión entre el nodo  $i$  y el nodo  $j$  entonces el elemento  $a_{ij} = 1$  en caso contrario  $a_{ij} = 0$  ( $i \neq j$ ) [21]. Los elementos de la diagonal de  $A$  están definidos como:

$$a_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ji} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.1)$$

En la siguiente sección, se muestran el cálculo de las matrices de acoplamiento para cada topología empleando esta teoría.

### 2.2.1. Topología regular

A continuación se describen brevemente las tres topologías regulares en que se pueden presentar las redes complejas.

#### 2.2.1.1. Acoplamiento global

En este tipo de acoplamiento cada uno de los nodos de la red esta conectado con el resto de los nodos, es decir, cualquier par de nodos de la red elegidos al azar se encuentran conectados entre sí.

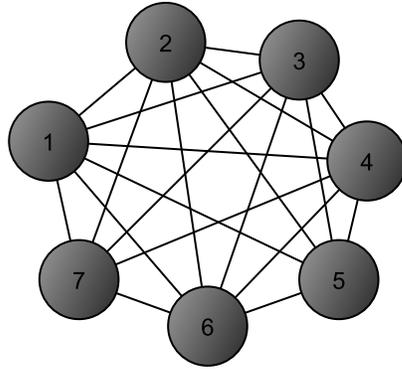


Figura 2.3: Red compleja en acoplamiento global.

La matriz de acoplamiento que corresponde a este tipo de red es la siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} -N + 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -N + 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -N + 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Esta matriz de acoplamiento tiene un solo valor propio en cero y los demás en  $-N$ . Además, su segundo valor propio mayor  $\lambda_2 = -N$  decrece a  $-\infty$  a medida que  $N \rightarrow \infty$ , esto es:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_2 = -\infty. \quad (2.3)$$

### 2.2.1.2. Acoplamiento estrella

El segundo tipo de acoplamiento regular es el acoplamiento estrella, aquí  $N - 1$  nodos se encuentran dispuesto al rededor de un nodo, el cual está conectado con los  $N - 1$  y los  $N - 1$  nodos sólo están conectados con el nodo del centro asemejando las puntas de una estrella.

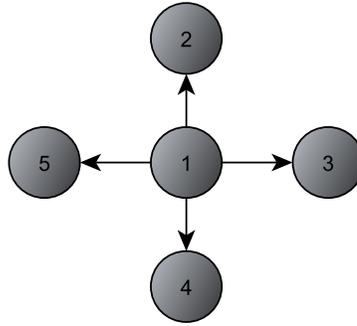


Figura 2.4: Red compleja en acoplamiento estrella.

La matriz de acoplamiento que corresponde a este tipo de red es la siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} -N + 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Los valores propios de la matriz de acoplamiento son:  $\lambda(A) = \{0, -N, -1, \dots, -1\}$ , por lo tanto el segundo valor propio mayor de  $A$  es  $\lambda_2 = -1$ .

### 2.2.1.3. Acoplamiento anillo

El tercer tipo de acoplamiento regular es el acoplamiento anillo, aquí los  $N$  nodos se encuentran colocados uno después del otro formando un anillo, cada nodo  $i$  está conectado sólo con los nodos vecinos más cercanos  $i \pm 1, i \pm 2, \dots, i \pm K/2$  donde  $K$  es un número par, en este caso  $K = 2$ .

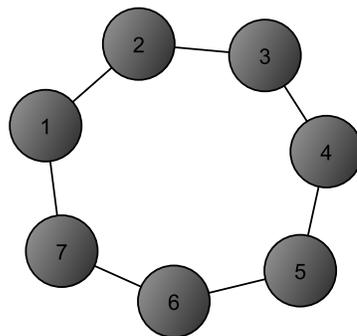


Figura 2.5: Red compleja en acoplamiento anillo.

La matriz de acoplamiento que corresponde a este tipo de red queda de la siguiente manera:

$$A = \begin{bmatrix} -k & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & -k & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & -k & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & -k \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Para esta red, el segundo valor propio mayor puede ser encontrado de la siguiente manera:

$$\lambda_2 = -4 \sum_{j=1}^{K/2} \sin^2\left(\frac{j\pi}{N}\right), \quad (2.6)$$

para un valor fijo de  $K$ , de la ecuación (2.6) se tiene que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_2 = 0. \quad (2.7)$$

De manera general, la suma de cada fila y/o columna de la matriz de acoplamiento presentada para cada una de los acoplamientos mencionados suma cero.

### 2.2.2. Topología irregular

Para la topología irregular, debido a que no presentan un patrón en el acoplamiento, el número de redes con conexiones diferentes puede ser muy grande. Por lo anterior, en esta sección solo describiremos una posible representación.

Las redes irregulares debido a lo incierto de su conexión no tienen reportada una matriz de acoplamiento para un caso general, por esta razón es necesario generarla y/o ajustarla para cada red. La figura (2.6) fue obtenida de [22].

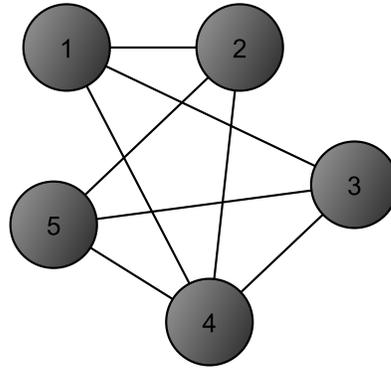


Figura 2.6: Red compleja irregular.

La matriz de acoplamiento de la red anterior está dada por:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

El conjunto de valores propios es  $\lambda(A) = \{0, -3, -3, -5, -5\}$ . A diferencia de las redes regulares, no se conoce como varían los valores propios de la matriz de acoplamiento de las redes irregulares.

Por último, en esta investigación se emplearon los cuatro posibles escenarios de conexión y configuración, es decir, redes complejas regulares e irregulares en configuración maestro - esclavo y bidireccional.

# Capítulo 3

## Osciladores caóticos con atractores de múltiples enrollamientos

En el capítulo 1 se enlistaron las características que deben cumplir los sistemas para que se consideren caóticos. Para esta investigación esos sistemas son osciladores modelados por ecuaciones diferenciales no lineales que tienen como base el ampliamente conocido oscilador caótico de Chua [1].

En la literatura científica hay una amplia variedad de osciladores caóticos reportados, sin embargo, se tiene particular interés en aquellos de atractores extraños en forma de enrollamientos como el atractor de Chua (dos enrollamientos), mismo que ha sido ampliamente estudiado y del cual se han realizado múltiples generalizaciones con base en dos categorías: aquellas en las que se modifica la característica no lineal del oscilador y aquellas en las que se aumenta la dimensión del sistema [23].

En sistemas un tanto diferentes, se han generado modelos alternativos que han demostrado que pueden generar atractores de  $n$ -enrollamientos. Dichos modelos dinámicos forman parte de la llamada familia de generadores de caos con atractores de enrollamientos en reja (*scroll grid attractors*). Hasta el momento se han reportado 3 modalidades en las que se han clasificado dichos atractores:

- Atractor de enrollamientos en reja en 1-D
- Atractor de enrollamientos en reja en 2-D
- Atractor de enrollamientos en reja en 3-D

A continuación se describirán brevemente los modelos dinámicos que se

emplearon en esta investigación como generadores de atractores de múltiples enrollamientos.

### 3.1. Oscilador de Chua generalizado

El oscilador de Chua es un modelo dinámico no lineal de dinámica caótica que debido a la amplia variedad de comportamientos que conducen a fenómenos de bifurcación se ha convertido en un paradigma para el estudio del caos. El oscilador de Chua se ha estudiado extensamente desde su aparición alrededor de 1983, como resultado de esto, diferentes generalizaciones han sido propuestas.

De las dos vertientes que se han seguido para la obtención de una generalización del oscilador de Chua, la propuesta en [24] y estudiada detalladamente en [1] está relacionada con la introducción adicional de puntos de quiebre en la no linealidad.

El modelo matemático que describe el oscilador de Chua generalizado está dado por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha [y - h(x)], \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Con una característica lineal a trozos dada por:

$$h(x) = m_{2q-1}x + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2q-1} (m_{i-1} - m_i)(|x + c_i| - |x - c_i|).\tag{3.2}$$

El oscilador (3.1)-(3.2) exhibe una dinámica caótica para valores de parámetros  $\alpha = 9$  y  $\beta = 14.2857$ . Se puede ver que la ecuación (3.2) está compuesta por múltiples puntos de quiebre donde  $q$  denota un número natural. El oscilador de Chua generalizado (3.1) está descrito por tres escalares y dos vectores de parámetros  $\{\alpha, \beta, q, m, c\}$ , donde  $m = [m_0 \ m_1 \ \dots \ m_{2q-1}]$ ,  $c = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_{2q-1}]$ .

Para propósitos comparativos, en la figura (3.1) se muestra la no linealidad del oscilador de Chua, en la cual se pueden apreciar los dos puntos de quiebre en la pendiente que resultan en los dos enrollamientos que presenta su atractor; por otra parte, en la figura (3.2) se puede apreciar la no-linealidad que pertenece al oscilador de Chua generalizado y que es la representación gráfica de la ecuación (3.2) para un valor de  $q = 3$ , la no-linealidad presenta múltiples fracturas generando así un

atractor de múltiples enrollamientos. Como se mencionó anteriormente, el oscilador de Chua generalizado permite la modificación de dicha gráfica a través de la ecuación (3.2) para diferentes valores de  $q$ .

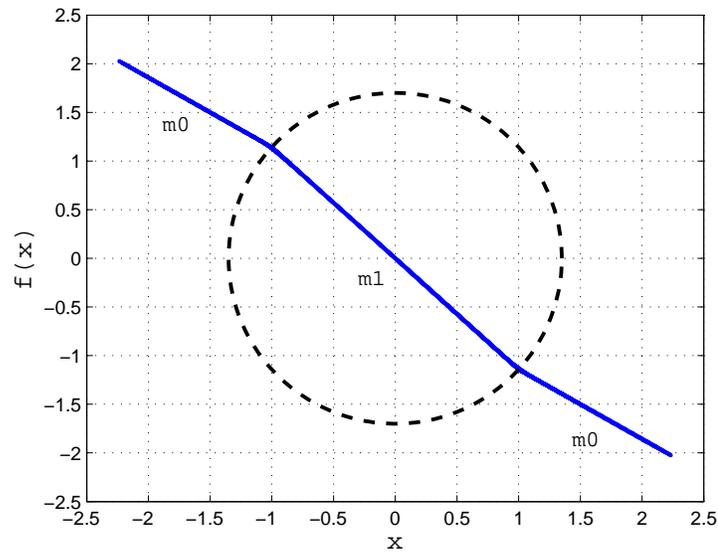


Figura 3.1: No-linealidad  $f(x)$  oscilador de Chua mostrando 2 puntos de quiebre.

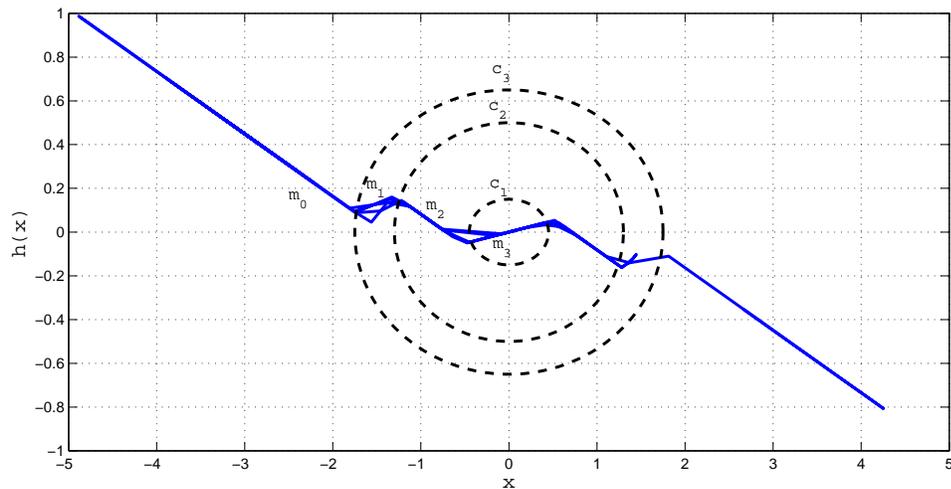


Figura 3.2: No-linealidad  $h(x)$  oscilador de Chua generalizado mostrando múltiples quiebres.

Para los parámetros  $\alpha = 9$  y  $\beta = 14.2857$  con valores de los vectores  $m = [m_0 \ m_1 \ \dots \ m_{2q-1}]$  y  $c = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_{2q-1}]$  elegidos como [1]:

$$\begin{aligned}
 & q = 1, \\
 \blacksquare \text{ (2 enrollamientos)} & \quad m = [-1/7 \ 2/7], \\
 & c = 1.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
 & q = 2, \\
 \blacksquare \text{ (4 enrollamientos)} & \quad m = [-1/7 \ 2/7 \ -4/7 \ 2/7], \\
 & c = [1 \ 2.15 \ 3.6].
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
 & q = 3, \\
 \blacksquare \text{ (6 enrollamientos)} & \quad c = [1 \ 2.15 \ 3.6 \ 8.2 \ 13], \\
 & m = [-1/7 \ 2/7 \ -4/7 \ 2/7 \ -4/7 \ 2/7].
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Es importante mencionar que existen reportados en [1] otros valores para los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  que igualmente han sido usados en la ecuación (3.1) para generar múltiples enrollamientos, estos valores son:

$$\begin{aligned}
 (\alpha_1, \beta_1) &= (11.6047522, 15), \\
 (\alpha_2, \beta_2) &= (-4.9167, -3.642).
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Empleando el conjunto de parámetros (3.4) se obtiene el atractor de la de figura (3.3):

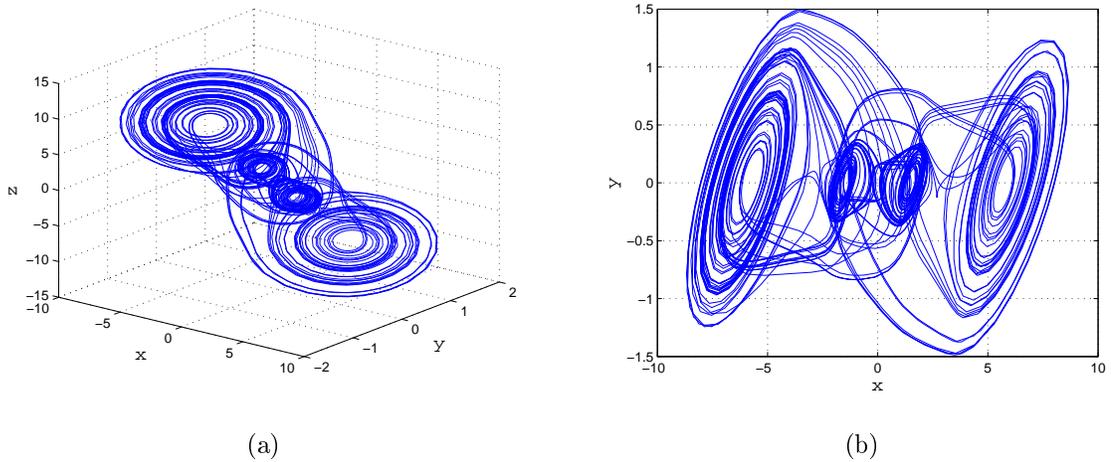


Figura 3.3: Atractor de Chua generalizado 4 enrollamientos: (a) Plano de fase 3-D  $x - y - z$ , (b) Plano de fase  $x - y$ .

Los conjuntos de parámetros (3.3), (3.4) y (3.5) generan un número de enrollamientos par, para un número impar es necesario usar el vector de parámetros  $m$  con signo contrario. En la figura (3.4) se muestra un atractor con número de enrollamientos impar que se obtuvo de emplear los parámetros (3.4) con  $-m$ .

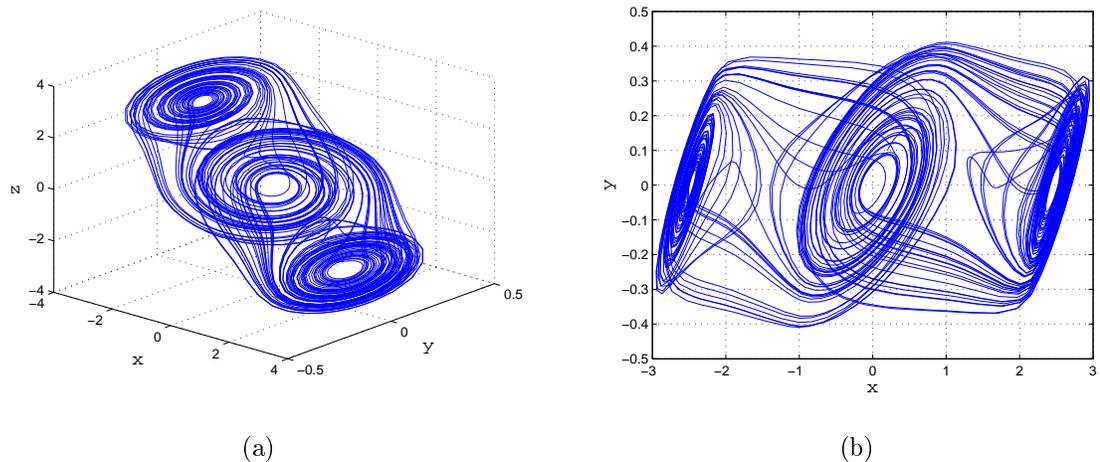


Figura 3.4: Atractor de Chua generalizado 3 enrollamientos: (a) Plano de fase 3-D  $x - y - z$ , (b) Plano de fase  $x - y$ .

Para obtener un número de enrollamientos impar se han propuesto los siguientes parámetros [1]:

$$\begin{aligned}
 & q = 1, \\
 \blacksquare \text{ (1 enrollamiento)} & \quad c = 1, \\
 & m = [1/7 \quad -2/7].
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
 & q = 2, \\
 \blacksquare \text{ (3 enrollamientos)} & \quad c = [1 \quad 2.15 \quad 4], \\
 & m = [0.9/7 \quad -3/7 \quad 3.5/7 \quad -2.4/7].
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
 & q = 3, \\
 \blacksquare \text{ (5 enrollamientos)} & \quad c = [1 \quad 2.15 \quad 3.6 \quad 6.2 \quad 9], \\
 & m = [0.9/7 \quad -3/7 \quad 3.5/7 \quad -2.7/7 \quad 4/7 \quad -2.4/7].
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
 & q = 4, \\
 \blacksquare \text{ (7 enrollamientos)} & \quad c = [1 \quad 2.15 \quad 3.6 \quad 6.2 \quad 9 \quad 14 \quad 25], \\
 & m = [0.9/7 \quad -3/7 \quad 3.5 \quad -2.4/7 \quad \dots \\
 & \quad 2.52/7 \quad -1.68/7 \quad 2.52/7 \quad -1.68/7].
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Como ejemplo demostrativo en la figura (3.5) se muestra el atractor que se obtiene de emplear  $\alpha = 9$ ,  $\beta = 14.2857$  y el conjunto de parámetros (3.10) en las ecuaciones (3.1) - (3.2).

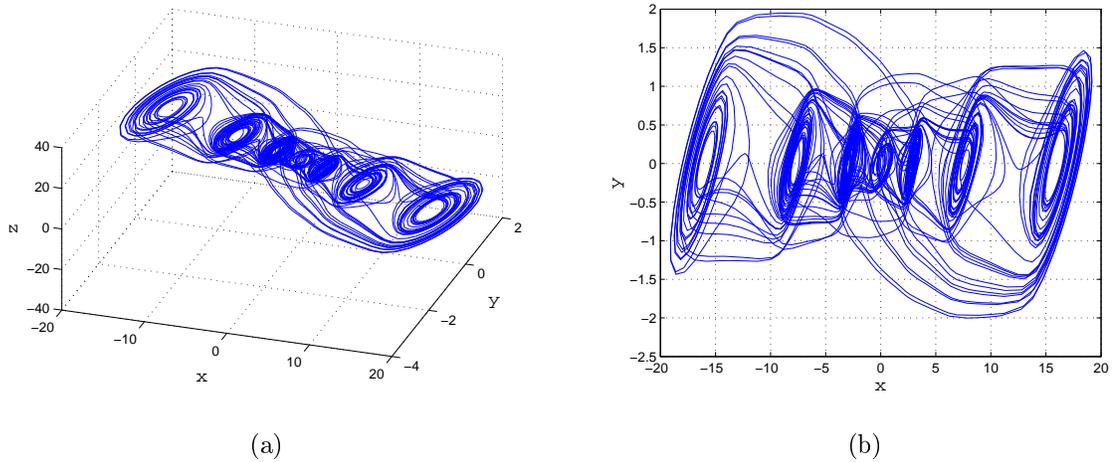


Figura 3.5: Atractor de Chua generalizado 7 enrollamientos: (a) Plano de fase 3-D  $x - y - z$ , (b) Plano de fase  $x - y$ .

Los puntos de equilibrio del sistema (3.1) - (3.2) están dados por:

$$\begin{cases} h(x) = 0, \\ x = -z, \\ y = 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

El origen es un punto de equilibrio del sistema (3.1). Los otros puntos de equilibrio los genera la condición  $h(x) = 0$  y están localizados en la intersección de la no linealidad con el eje  $x$  [1], esto puede observarse en la figura (3.6). Estos puntos de equilibrio aparecen por pares y están denotados como  $eq_j = [x_{eq_j^\pm}, 0, -x_{eq_j^\pm}]$ .

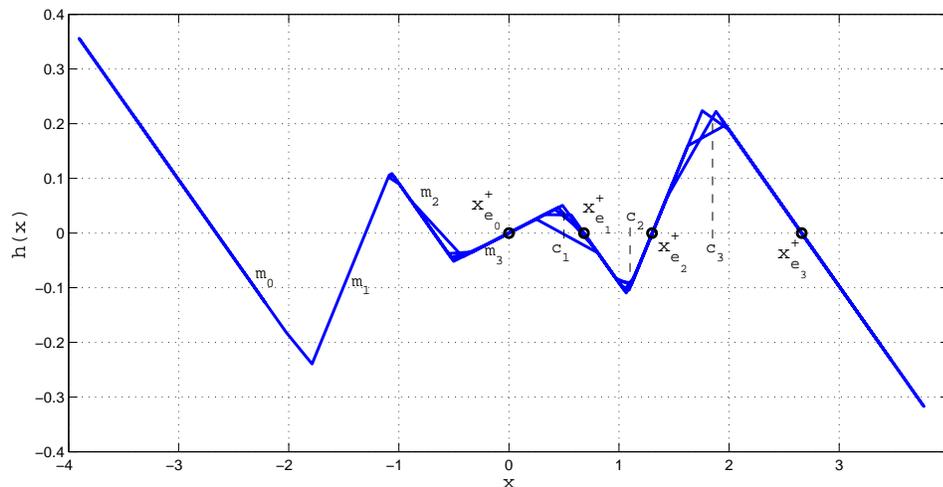


Figura 3.6: Puntos de equilibrio en la no linealidad  $h(x)$  del oscilador de Chua generalizado.

## 3.2. Oscilador de Genesio & Tesi

Anteriormente se mencionó la existencia de sistemas caóticos capaces de generar atractores de múltiples enrollamientos que pertenecen a la familia de generadores de caos con atractores de enrollamientos en rejilla (*scroll grid attractors*). En esta investigación se emplean los osciladores cuyo nombre reportado en la literatura es *una nueva familia de atractores con n-enrollamientos*, los cuales por simplicidad serán llamados **Osciladores de Genesio & Tesi** investigadores a los que deben su existencia. R. Genesio y A. Tesi desarrollaron y propusieron un sistema caótico con el objetivo de examinar el método del balance armónico para determinar la existencia y localización del comportamiento caótico en el año de 1992 [1, 23]. R. Genesio y A. Tesi aplicaron el método exitosamente y probaron que el modelo exhibía caos [1, 23].

### 3.2.1. Oscilador de Genesio & Tesi en 1-D

Una generalización del modelo original de Genesio & Tesi [1] para generar n-enrollamientos fué realizada en [2]. Dicha generalización consistió en modificar la no linealidad del modelo original.

El conjunto de ecuaciones diferenciales que describe el oscilador de Genesio & Tesi en 1-D es:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= y, \\
\dot{y} &= z, \\
\dot{z} &= -ax - ay - az + af(x).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Donde:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{M_x} g_{\frac{(-2i+1)}{2}}(x) + \sum_{i=1}^{N_x} g_{\frac{(2i-1)}{2}}(x), \tag{3.13}$$

$$g_{\theta}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq \theta, \theta > 0, \\ 0, & x < \theta, \theta > 0, \\ 0, & x \geq \theta, \theta < 0, \\ -1, & x < \theta, \theta < 0. \end{cases} \tag{3.14}$$

Con  $a = 0.8$  y  $x, y, z \in \Re$ . La expresión (3.14) es llamada *función esencia* o *función núcleo* [1].

Los puntos de equilibrio están dados por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = f(x), \\ y = 0, \\ z = 0. \end{cases} \tag{3.15}$$

Del conjunto de ecuaciones (3.15) puede verse que los puntos de equilibrio están localizados en la intersección de la función no lineal (3.13) y el eje x. El conjunto de puntos de equilibrio está dado por [1]:

$$v_{eq} = \{[i \ 0 \ 0]^T \mid i = -M_x - M_x + 1, \dots, N_x - 1, N_x\}. \tag{3.16}$$

En la figura (3.7) se muestran 4 de los posibles atractores que se pueden obtener usando las ecuaciones (3.12 - 3.14) con los siguientes parámetros:

- Atractor de 2 enrollamientos ( $M_x = 1, N_x = 0$ ) figura (3.7)(a).
- Atractor de 6 enrollamientos ( $M_x = 1, N_x = 4$ ) figura (3.7)(b).
- Atractor de 8 enrollamientos ( $M_x = 2, N_x = 5$ ) figura (3.7)(c).
- Atractor de 10 enrollamientos ( $M_x = 4, N_x = 5$ ) figura (3.7)(d).

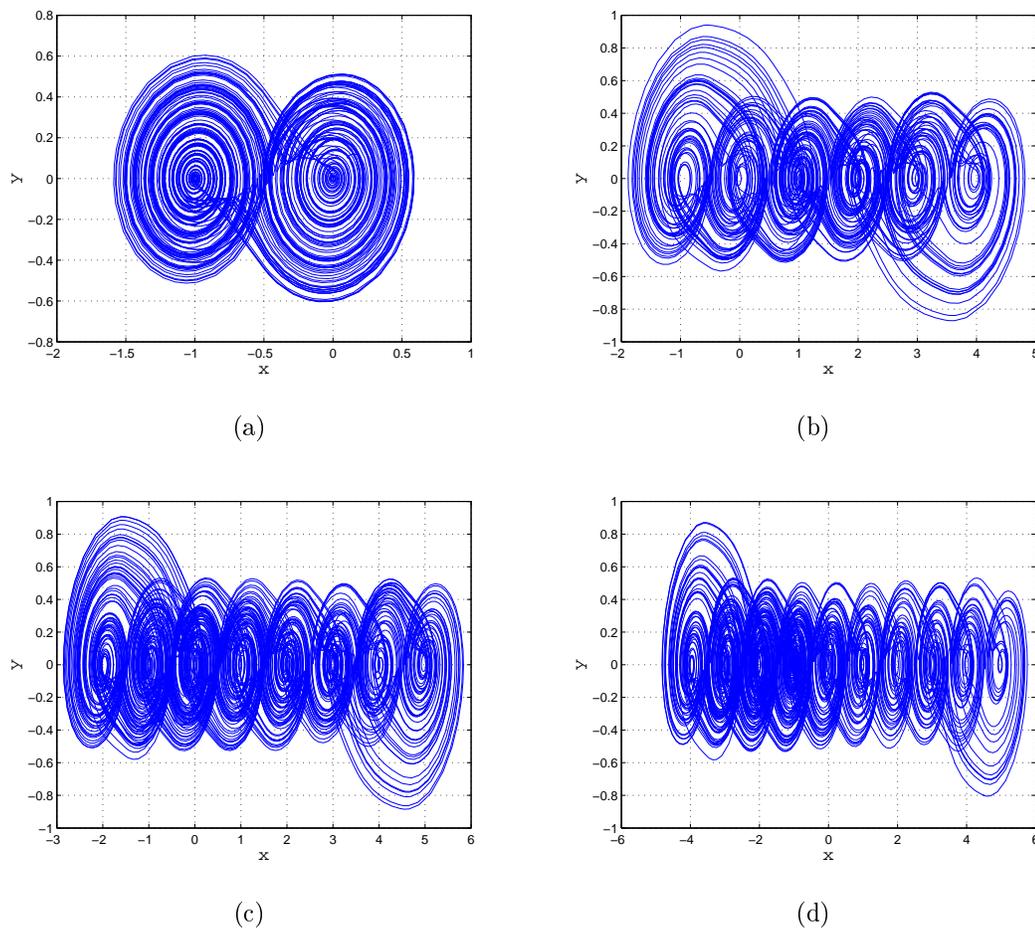


Figura 3.7: Atractores de Genesis & Tesi en 1-D: (a) vista  $x - y$  2 enrollamientos (b) vista  $x - y$  6 enrollamientos, (c) vista  $x - y$  8 enrollamientos, (d) vista  $x - y$  10 enrollamientos.

Como se puede apreciar en la figura (3.7), el número de enrollamientos del atractor sólo puede ser incrementado en la dirección de la variable de estado  $x$ , esto aunado a la ubicación de los puntos de equilibrio del sistema, hacen que el modelo de ecuaciones (3.12 - 3.14) sea considerado como un oscilador que genera múltiples enrollamientos en una dimensión.

### 3.2.2. Oscilador de Genesis & Tesi en 2-D

Para el oscilador de Genesis & Tesi en 2-D, el conjunto de ecuaciones que describe el sistema está dado por:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= y - f_1(y), \\
\dot{y} &= z, \\
\dot{z} &= -ax - ay - az + af_2(x).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$f_1(y) = \sum_{i=1}^{M_y} g_{\frac{(-2i+1)}{2}}(y) + \sum_{i=1}^{N_y} g_{\frac{(2i-1)}{2}}(y), \tag{3.18}$$

$$g_\theta(y) = \begin{cases} 1, & y \geq \theta, \theta > 0, \\ 0, & y < \theta, \theta > 0, \\ 0, & y \geq \theta, \theta < 0, \\ -1, & y < \theta, \theta < 0, \end{cases} \tag{3.19}$$

$$f_2(x) = \sum_{i=1}^{m-1} \beta g_{p_i}(x). \tag{3.20}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
p_i &= M_y + 0.5 + (i - 1)(M_y + N_y + 1), \\
\beta &= M_y + N_y + 1.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Los puntos de equilibrio del sistema (3.17) están dados por:

$$\begin{cases} x + y = f_2(x), \\ y = f_1(y), \\ z = 0. \end{cases} \tag{3.22}$$

La solución para la variable de estado  $y$  del conjunto de ecuaciones (3.22) está dada por:

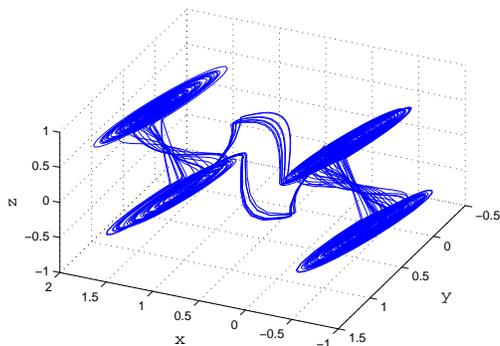
$$u^{eq,y} = \{-M_y, \dots, -1, 0, 1, \dots, N_y\}. \tag{3.23}$$

Los puntos para la variable de estado  $x$  que corresponden a cada  $u_j^{eq,y}$  se determinan de manera gráfica a partir de la primer condición del conjunto de ecuaciones (3.22). Por último, el conjunto de puntos de equilibrio es [1]:

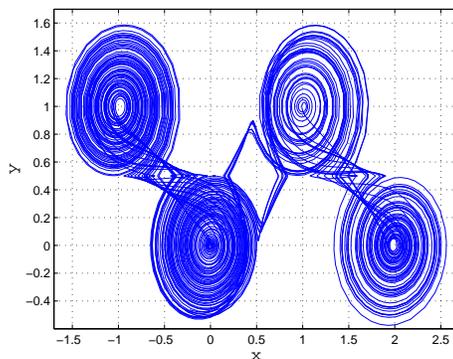
$$\begin{aligned}
v_{eq} &= \{[(i - 1)(M_y + N_y + 1) + j \quad -j \quad 0]^T \mid i = 1, 2, \dots, m; \\
&\quad j = -N_y, \dots, -1, 0, 1, \dots, M_y\}.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

En la figura (3.8) se muestran dos de los posibles atractores que se pueden generar usando las ecuaciones (3.17 - 3.21):

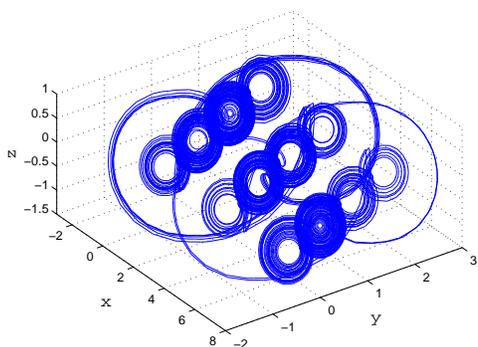
- Atractor de  $2 \times 2$  enrollamientos ( $M_y = 0$ ,  $N_y = 1$ ,  $m = 2$ ) figura (3.8)(a).
- Atractor de  $3 \times 4$  enrollamientos ( $M_y = 1$ ,  $N_y = 2$ ,  $m = 3$ ) figura (3.8)(c).



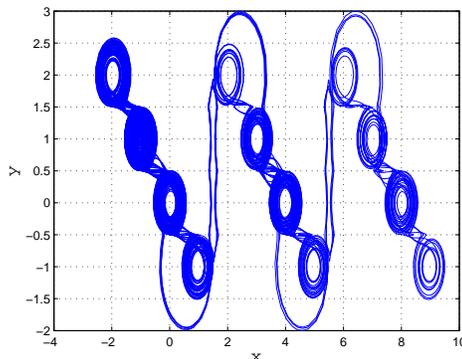
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 3.8: Atractores de Genesio & Tesi en 2-D: (a) Plano de fase 3-D  $x - y - z$  de atractor de  $2 \times 2$  enrollamientos y (b) vista  $x - y$ , (c) Plano de fase 3-D  $x - y - z$  de atractor de  $3 \times 4$  enrollamientos y (d) vista  $x - y$ .

A diferencia del oscilador en 1-D, el oscilador de Genesio & Tesi en 2-D tiene sus puntos de equilibrio ubicados en el plano  $(x, y)$  y puede aumentar el número de enrollamientos a lo largo de las variables de estado  $x$  e  $y$ .

### 3.2.3. Oscilador de Genesio & Tesi en 3-D

Para obtener un oscilador que genere atractores en reja en tres dimensiones es necesario introducir una no linealidad adicional al sistema (3.17). El conjunto de ecuaciones que describe dicho oscilador es:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - f_1(y), \\ \dot{y} &= z - f_1(z), \\ \dot{z} &= -ax - ay - az + af_3(x).\end{aligned}\tag{3.25}$$

Donde:

$$f_1(y) = \sum_{i=1}^{M_y} g_{\frac{(-2i+1)}{2}}(y) + \sum_{i=1}^{N_y} g_{\frac{(2i-1)}{2}}(y),\tag{3.26}$$

$$f_1(z) = \sum_{i=1}^{M_z} g_{\frac{(-2i+1)}{2}}(z) + \sum_{i=1}^{N_z} g_{\frac{(2i-1)}{2}}(z),\tag{3.27}$$

$$g_\theta(\cdot) = \begin{cases} 1, & \cdot \geq \theta, \theta > 0, \\ 0, & \cdot < \theta, \theta > 0, \\ 0, & \cdot \geq \theta, \theta < 0, \\ -1, & \cdot < \theta, \theta < 0, \end{cases}\tag{3.28}$$

$$f_3(x) = \sum_{l=1}^{k-1} \gamma g_{n_l}(x).\tag{3.29}$$

Donde:

$$\begin{aligned}n_l &= \rho + 0.5 + (l - 1)(\rho + \varsigma + 1), \\ \gamma &= \rho + \varsigma + 1.\end{aligned}\tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}\rho &= |\min_{i,j} \{u_i^{eq,y} + u_j^{eq,z}\}|, \\ \varsigma &= |\max_{i,j} \{u_i^{eq,y} + u_j^{eq,z}\}|.\end{aligned}\tag{3.31}$$

Del conjunto de ecuaciones (3.31),  $u_i^{eq,y}$  y  $u_j^{eq,z}$  son los vectores para las variables  $y$  y  $z$  relacionados a los puntos de equilibrio. Los puntos de equilibrio del sistema (3.25) están dados por:

$$\begin{cases} x + y + z = f_3(x), \\ y = f_1(y), \\ z = f_1(z). \end{cases} \quad (3.32)$$

Los puntos relacionados a los puntos de equilibrio para las variables de estado  $y, z$  están dados por [1]:

$$\begin{aligned} u^{eq,y} &= \{-M_y, \dots, -1, 0, 1, \dots, N_y\}, \\ u^{eq,z} &= \{-M_z, \dots, -1, 0, 1, \dots, N_z\}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Finalmente, los puntos de equilibrio del sistema (3.25) están dados por:

$$\begin{aligned} v_{eq} &= \{[(l-1)(\varsigma + 1 + \rho) - u^{eq,y} - u^{eq,z} \quad u^{eq,y} \quad u^{eq,z}]^T \mid i = 1, 2, \dots, \\ &M_y + N_y + 1; j = 1, 2, \dots, M_z + N_z + 1; l = 1, 2, \dots, k\}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

En las figuras (3.9), (3.11) y (3.13) se muestran algunos ejemplos de atractores de Genesis & Tesi en 3-D

- Atractor de  $2 \times 2 \times 2$  enrollamientos ( $M_y = 0, N_y = 1, M_z = 0, N_z = 1, k = 2$ ) figura (3.9).
- Atractor de  $4 \times 3 \times 2$  enrollamientos ( $M_y = 1, N_y = 1, M_z = 0, N_z = 1, k = 4$ ) figura (3.11).
- Atractor de  $2 \times 5 \times 5$  enrollamientos ( $M_y = 2, N_y = 2, M_z = 2, N_z = 2, k = 2$ ) figura (3.13).

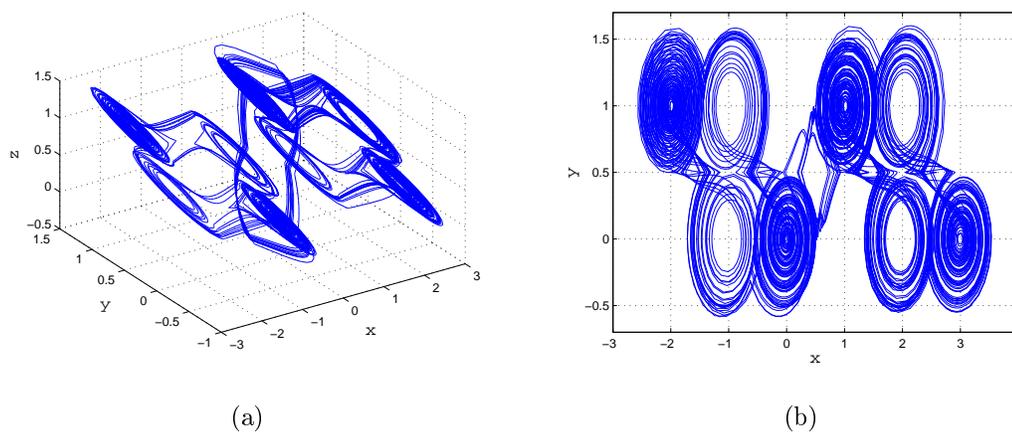


Figura 3.9: Atractor de Genesis & Tesi 3-D: (a) atractor de  $2 \times 2 \times 2$  enrollamientos vista  $x - y - z$  y (b) vista  $x - y$ .

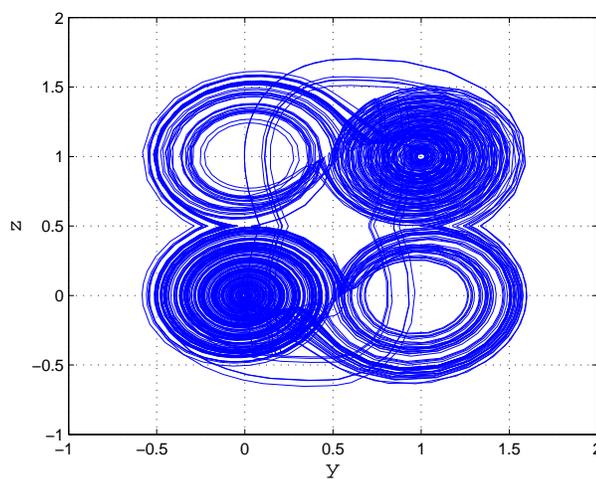


Figura 3.10: Atractor de Genesis & Tesi 3-D de  $2 \times 2 \times 2$  enrollamientos vista  $y - z$ .

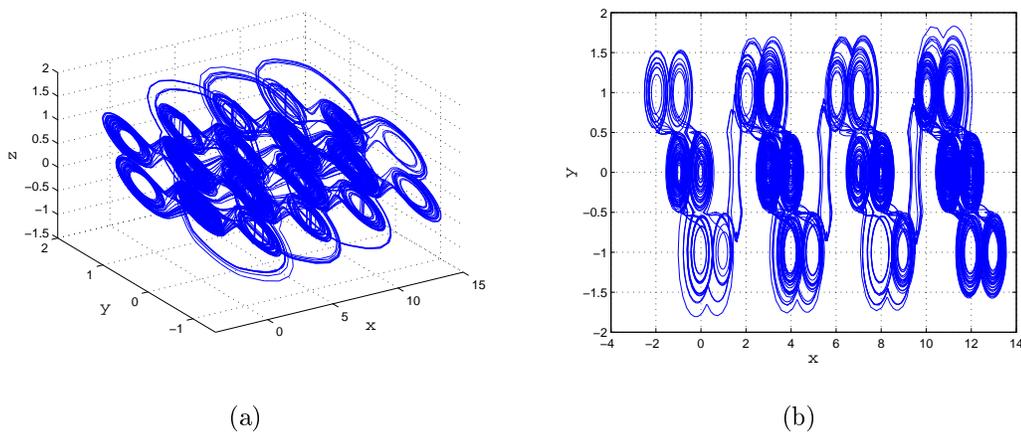


Figura 3.11: Atractor de Genesis & Tesi 3-D: (a) atractor de  $4 \times 3 \times 2$  enrollamientos vista  $x - y - z$  y (b) vista  $x - y$ .

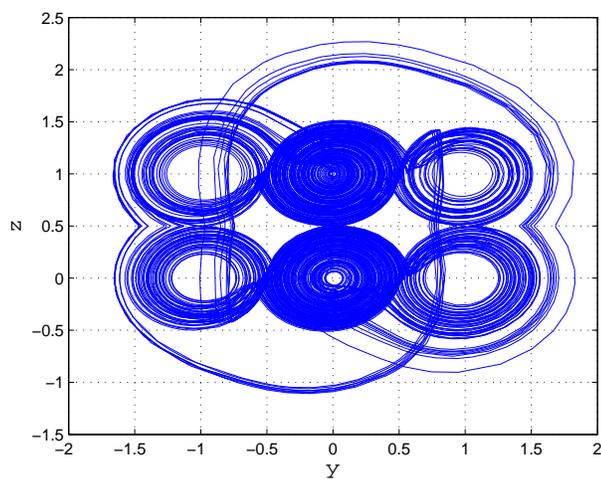


Figura 3.12: Atractor de Genesis & Tesi 3-D de  $4 \times 3 \times 2$  enrollamientos vista  $y - z$ .

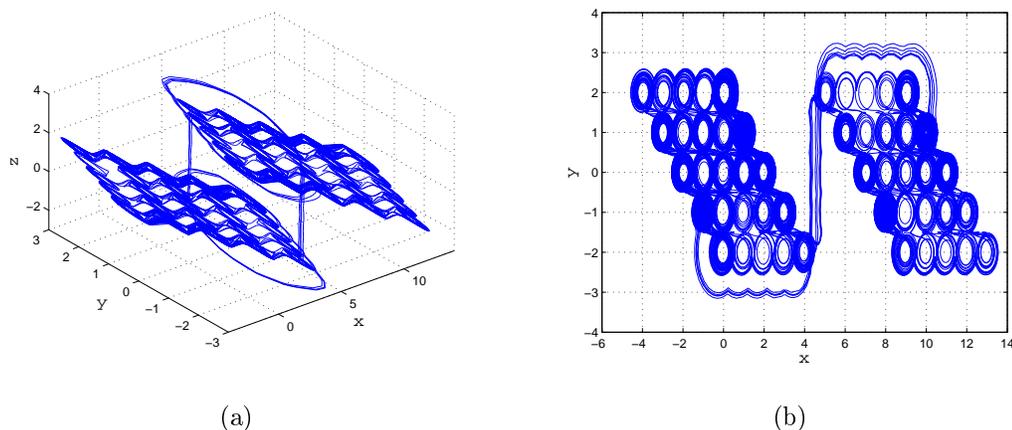


Figura 3.13: Atractor de Genesis & Tesi 3-D: (a) atractor de  $2 \times 5 \times 5$  enrollamientos vista  $x - y - z$  y (b) vista  $x - y$ .

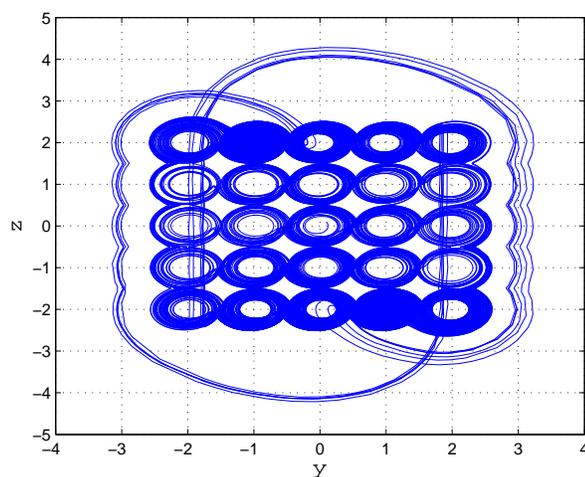


Figura 3.14: Atractor de Genesis & Tesi 3-D de  $2 \times 5 \times 5$  enrollamientos vista  $y - z$ .

En este capítulo se proporcionó una visión general sobre algunos modelos matemáticos generadores de atractores de múltiples enrollamientos que pertenecen a la familia de los atractores de enrollamientos en reja (*scroll grid attractors*), los cuales son capaces de generar atractores cuyo número de enrollamientos puede ser aumentado en la dirección de cualquiera de las variables de estado del sistema. En el siguiente capítulo se tratará la sincronización de redes complejas que tienen como nodos modelos generadores de atractores de enrollamientos múltiples.

# Capítulo 4

## Sincronización de redes complejas con atractores caóticos de múltiples enrollamientos

En este capítulo se proporcionan los preliminares matemáticos, conceptos y toda la teoría necesaria para entender la sincronización de las redes complejas. Como se especificó en el capítulo 2, las redes complejas que se emplearon en esta investigación están compuestas por osciladores caóticos que presentan atractores con múltiples enrollamientos, los cuales fueron descritos en el capítulo 3.

### 4.1. Definiciones de sincronización

La palabra **sincronización** proviene del griego (*συγ χρόνος*) que significa “compartir el mismo tiempo”, es también la correspondencia en tiempo de diferentes procesos [25, 26]. De acuerdo con [4] sincronizar visto como acción, es hacer que coincidan en el tiempo dos o más movimientos o fenómenos.

En la naturaleza, sincronizar aspectos como el ciclo reproductivo, tiempo de alumbramiento o la migración significa asegurar la supervivencia de algunos animales. En la vida humana, la sincronización juega un papel importante y puede presetarse de manera voluntaria o involuntaria en el comportamiento colectivo de las masas, como ejemplo de sincronización voluntaria tenemos una multitud aplaudiendo o un ejército marchando, y de involuntaria la sincronización del período menstrual de un grupo de mujeres, llamado sincronía menstrual [25]. En la ingeniería, esta propiedad

no ha pasado desapercibida ya que el hombre se ha beneficiado enormemente de sincronizar numerosos procesos industriales. Otro ejemplo que ilustra la importancia de la sincronía en la humanidad es el desarrollo de deportes de alto rendimiento en el que se califica el grado de sincronización.

Entre los diferentes tipos de sincronización se encuentra:

**Sincronización de caos:** se refiere al proceso donde dos o más sistemas caóticos ajustan su movimiento a un comportamiento común debido a un acoplamiento o forzamiento [26].

Los tipos de sincronización caótica son:

- **Sincronización Idéntica** consiste en un enganche perfecto de las trayectorias de los sistemas logrado a través del acoplamiento [26].

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \hat{x}(t)\| = 0. \quad (4.1)$$

- **Sincronización aproximada (Almost synchronization)** resulta de una cota asintótica de la diferencia de un conjunto de variables de un sistema y el correspondiente conjunto de otro sistema [26].

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \hat{x}(t)\| < \rho, \quad \rho > 0. \quad (4.2)$$

- **Sincronización generalizada**, este tipo de sincronización usa sistemas caóticos completamente diferentes y consiste en asociar la salida de un sistema a una función dada de la salida de otro sistema [26].

En este trabajo en particular, se realiza la sincronización idéntica de osciladores caóticos que presentan atractores con múltiples enrollamientos.

## 4.2. Sincronización de redes complejas

Considere una red dinámica compuesta por  $N$  nodos idénticos los cuales se encuentran linealmente acoplados y cada nodo es un sistema dinámico de dimensión  $n$ . Las ecuaciones de estado de la red están dadas por:

$$\dot{x}_i = f(x_i) + c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.3)$$

donde  $x_i = [x_{i1} \ x_{i2} \ \dots \ x_{in}] \in \mathfrak{R}^n$  es el vector de las variables de estado del nodo  $i$ . La constante  $c > 0$  representa la fuerza de acoplamiento de la red y  $\Gamma \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  es una matriz constante de 0-1's que relaciona las variables de estado acopladas. De acuerdo con [21], se asume para mayor simplicidad  $\Gamma = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_n)$  que es una matriz diagonal con  $r_i = 1$  para una  $i$  en particular y  $r_j = 0$  para  $j \neq i$ , lo que significa que dos nodos están acoplados a través de su  $i$ -ésima variable de estado.

La matriz de acoplamiento  $A \in \mathfrak{R}^{N \times N}$  con elementos  $a_{ij}$  para  $i, j = 1, \dots, N$  representa la configuración de la red compleja y la forma de obtenerla fue descrita en la sección (2.2).

En el capítulo 2 se proporcionaron las matrices de acoplamiento en forma general para las redes complejas acopladas en topologías regulares y para un caso particular de una topología irregular, dichas matrices pueden obtenerse fijando un valor de  $N$  y empleando lo antes mencionado en el presente capítulo.

La red dinámica (4.3) se dice que logra sincronización (asintótica) si:

$$x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t), \quad t \rightarrow \infty, \quad (4.4)$$

dado que la sincronización del estado es la solución  $s(t) \in \mathfrak{R}^n$  de un nodo aislado, esto es,

$$\dot{s}(t) = f(s(t)), \quad (4.5)$$

donde  $s(t)$  puede ser un punto de equilibrio, una órbita periódica o un atractor caótico. La estabilidad de la sincronización del estado,

$$x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t) = s(t), \quad (4.6)$$

de la red (4.3) está determinada por la dinámica de un nodo aislado, la fuerza de acoplamiento  $c$ , la matriz que relaciona los estados acoplados  $\Gamma$  y la matriz de acoplamiento  $A$ . La capacidad de sincronización de la red (4.3) con respecto a un acoplamiento específico, se dice que es fuerte si la red puede sincronizar con una fuerza de acoplamiento  $c$  pequeña [21]. Basado en la teoría de estabilidad de Lyapunov, se derivan las siguientes condiciones de sincronización [27]:

**Teorema 4.1 (Wang & Chen, 2002a, 2002b)** *Considere la red dinámica (4.3). Sean:*

$$0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_N. \quad (4.7)$$

Los valores propios de su matriz de acoplamiento  $A$ . Suponga que existe una matriz diagonal  $\mathbf{D} > 0$  de  $n \times n$  y dos constantes  $\bar{d} < 0$  y  $\tau > 0$ , tal que:

$$[Df(s(t)) + d\Gamma]^T \mathbf{D} + \mathbf{D}[Df(s(t)) + d\Gamma] \leq -\tau \mathbf{I}_n, \quad (4.8)$$

para toda  $d \leq \bar{d}$ , donde  $\mathbf{I}_n \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  es la matriz unitaria. Si, además,

$$c\lambda_2 \leq \bar{d}. \quad (4.9)$$

Entonces, la sincronización del estado es exponencialmente estable.

Puesto que  $\lambda_2 < 0$  y  $\bar{d} < 0$ , la desigualdad (4.9) es equivalente a:

$$c \geq \left| \frac{\bar{d}}{\lambda_2} \right|. \quad (4.10)$$

Una vez proporcionados los conceptos y los fundamentos matemáticos necesarios para comprender la sincronización, en la siguiente sección se presenta el análisis de estabilidad del error que se genera de sincronizar dos osciladores.

### 4.3. Análisis de estabilidad del error de sincronía

Con el objetivo de corroborar la sincronía, se realiza un análisis de estabilidad del error de sincronización entre cualquier par de nodos de una red compleja. Debido a los dos tipos de configuración que puede existir entre dos nodos de una red compleja (figura (2.2)), se presenta el análisis para el caso de configuración maestro - esclavo y bidireccional.

#### 4.3.1. Chua generalizado: configuración maestro - esclavo

Considere el oscilador de Chua generalizado descrito por el sistema de ecuaciones (4.11), el cual exhibe comportamiento caótico con valores de parámetros  $\alpha = 9$  y  $\beta = 14.2857$ :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \alpha [y - h(x)], \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y. \end{cases} \quad (4.11)$$

Con una característica lineal a trozos dada por:

$$h(x) = m_{2q-1}x + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2q-1} (m_{i-1} - m_i)(|x + c_i| - |x - c_i|). \quad (4.12)$$

Para encontrar el sistema dinámico del error, se definen:

$$\begin{aligned} e_1 &= x_1 - x_2, \\ e_2 &= y_1 - y_2, \\ e_3 &= z_1 - z_2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Usando las ecuaciones (4.13) y de acuerdo con [28] podemos emplear la siguiente desigualdad:

$$| \text{sat}(x) - \text{sat}(y) | \leq | x - y |, \quad (4.14)$$

se obtiene el sistema dinámico del error:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 &= -(\alpha m_{2q-1} + c)e_1 - \alpha (m_{i-1} - m_i) | e_1 | + \alpha e_2, \\ \dot{e}_2 &= e_1 - e_2 + e_3, \\ \dot{e}_3 &= -\beta e_2. \end{cases} \quad (4.15)$$

Para demostrar la estabilidad del sistema (4.15) se usó la teoría de estabilidad de sistemas perturbados.

De acuerdo con [28], se puede suponer que  $x = 0$  es un punto de equilibrio del sistema (4.15) exponencialmente estable; no obstante, el punto de equilibrio es el origen y se obtiene como sigue:

$$\dot{e}_1 = \dot{e}_2 = \dot{e}_3 = 0, \quad (4.16)$$

$$0 = -(\alpha m_{2q-1} + c)e_1 - \alpha (m_{i-1} - m_i) | e_1 | + \alpha e_2, \quad (4.17)$$

$$0 = e_1 - e_2 + e_3, \quad (4.18)$$

$$0 = -\beta e_2. \quad (4.19)$$

De la ecuación (4.19),  $\beta \neq 0 \rightarrow e_2 = 0$ .

De la ecuación (4.17),  $\alpha e_2 = (\alpha m_{2q-1} + c)e_1 + \alpha (m_{i-1} - m_i) | e_1 |$ , dado que  $\alpha > 0, \alpha (m_{i-1} - m_i) \neq 0 \neq (\alpha m_{2q-1} + c), e_2 = 0 \rightarrow e_1 = 0$ .

De la ecuación (4.18) debido a que  $e_1 = e_2 = 0 \rightarrow e_3 = 0$ . *Por lo tanto el origen es un punto de equilibrio del sistema dinámico del error (4.15).*

Para continuar con el análisis de estabilidad, el sistema (4.15) es visto como un sistema perturbado de la forma:

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x), \quad (4.20)$$

donde

$$f(t, x) \quad \text{Sistema nominal}, \quad (4.21)$$

$$g(t, x) \quad \text{Perturbación}, \quad (4.22)$$

y (4.22) es una perturbación desvaneciente, es decir,  $g(t, 0) = 0$ , además, cualquier función  $g(t, x)$  que se desvanezca en el origen y que es localmente Lipschitz en  $x$  uniformemente en  $t$  para todo  $t \geq 0$  en un vecindario acotado del origen satisface la ecuación (4.23) [28]:

$$\|g(t, x)\| \leq \gamma \|x\|, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in D, \quad (4.23)$$

entonces, el sistema queda de la siguiente manera:

$$f(t, e) = Ae = \begin{bmatrix} -\rho_1 & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

$$g(t, e) = \begin{bmatrix} \rho_2 |e_1| \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

donde

$$\rho_1 = (\alpha m_{2q-1} + c), \quad (4.26)$$

$$\rho_2 = -\alpha(m_{i-1} - m_i) \quad i = 1, \dots, 2q - 1, \quad (4.27)$$

y se obtiene:

$$\dot{e} = f(t, e) + g(t, e). \quad (4.28)$$

Debido a que se requieren diferentes vectores de  $m$  para generar diferente número de enrollamientos, el elemento  $m_{2q-1}$  cambia; por tal razón, existen  $A_j$  para  $j = 1, \dots, 4$  posibles matrices. A continuación se presenta el análisis de estabilidad sólo para el caso que requiere el valor de  $c$  más pequeño.

Los parámetros empleados son:

$$\begin{aligned} q &= 3 \text{ (5 enrollamientos),} \\ m &= [0.9/7 \quad -3/7 \quad 3.5/7 \quad -2.7/7 \quad 4/7 \quad -2.4/7]. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Los valores propios de la matriz  $A$  de la ecuación (4.24) son las raíces del polinomio que resulta como  $\det(\lambda I - A)$ , el cual se muestra a continuación y que está en función de la *fuerza de acoplamiento*  $c$  y los parámetros del sistema:

$$\lambda^3 + (\alpha m_{2q-1} + c + 1)\lambda^2 + (\beta + \alpha m_{2q-1} + c - \alpha)\lambda + \beta \alpha m_{2q-1} + \beta c, \quad (4.30)$$

sustituyendo en la ecuación (4.30) los valores de los parámetros se obtiene:

$$\lambda^3 + \left(c - \frac{73}{35}\right)\lambda^2 + \left(c + \frac{11}{5}\right)\lambda + \frac{100}{7}c - \frac{2160}{49}, \quad (4.31)$$

de donde se puede determinar que para  $c \geq 10.4$ , los valores propios de la matriz  $A$  son estrictamente negativos; eligiendo  $c = 11$  los valores propios de  $A$  son  $\sigma(A) = \{-8.8641; -0.0251 \pm 3.5713i\}$ , se puede apreciar que  $Re(\lambda_{1,2,3}) < 0$ , por lo tanto,  $A$  es Hurwitz. La solución de la ecuación de Lyapunov  $PA + A^T P = -I$  está dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 9.67 & 8.4479 & -15.2091 \\ 8.4479 & 8.9829 & 0.035 \\ -15.2091 & 0.035 & 143.5708 \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

cuyos valores propios están dados por  $\sigma(P) = \{0.0563; 16.8847; 145.2827\}$ .

La función candidata de Lyapunov  $V(e) = e^T P e$  satisface:

$$c_1 \|e\|^2 \leq V(t, e) \leq c_2 \|e\|^2, \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial e} f(t, e) \leq -c_3 \|e\|^2, \quad (4.34)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial e} \right\| \leq c_4 \|e\|. \quad (4.35)$$

O bien, de manera particular se satisface:

$$\lambda_{\min}(P)\|e\|_2^2 \leq V(t, e) \leq \lambda_{\max}(P)\|e\|_2^2, \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial V}{\partial e} A e = -e^T Q e \leq -\lambda_{\min}(Q)\|e\|_2^2, \quad (4.37)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial e} \right\|_2 = \|2e^T P\|_2 \leq 2\|P\|_2\|e\|_2 = 2\lambda_{\max}(P)\|e\|_2. \quad (4.38)$$

Utilizando la función candidata de Lyapunov del sistema nominal como función candidata de Lyapunov para estudiar estabilidad del sistema perturbado, tenemos que, la derivada de  $V(e)$  a lo largo de la ecuación (4.28) queda de la siguiente manera:

$$\dot{V}(t, e) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial e} f(t, e) + \frac{\partial V}{\partial e} g(t, e). \quad (4.39)$$

Comparando la ecuación (4.39) con las ecuaciones (4.33)-(4.35) y (4.23) se obtiene para el sistema perturbado:

$$\dot{V}(t, e) = -c_3\|e\|^2 + \left\| \frac{\partial V}{\partial e} \right\| \|g(t, e)\| \leq -c_3\|e\|^2 + c_4\gamma\|e\|^2, \quad (4.40)$$

donde

$$\begin{aligned} c_3 &= 1, \\ c_4 &= 2\lambda_{\max}(P) = 290.5654. \end{aligned} \quad (4.41)$$

El término de perturbación  $g(e)$  satisface:

$$\begin{aligned} \|g(e)\| &= |\rho_2| |e_1| \leq |\rho_2| k_1 \|e\|, \\ \gamma &= |\rho_2| k_1 < \frac{c_3}{c_4}, \\ 0 &< k < 1, \\ |\rho_2| &= 0.3686. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Aunque no se conoce una cota de  $|e_1|$ , se sabe que  $|e_1|$  estará acotado siempre que la trayectoria de  $e$  este confinada a un conjunto compacto<sup>1</sup> [28]. Usando las ecuaciones (4.41) y (4.42), la expresión (4.40) se convierte en:

$$\dot{V}(t, e) = -\|e\|_2^2 + 290.5654|\rho_2|k_1\|e\|_2^2. \quad (4.43)$$

---

<sup>1</sup>Conjunto compacto: un conjunto  $S$  es compacto si es cerrado y acotado.

Conjunto cerrado: un conjunto  $S$  es cerrado si y sólo si su complemento en  $R^n$  es abierto.

Conjunto acotado: un conjunto  $S$  es acotado si existe  $r > 0$  tal que  $\|x\| \leq r \quad \forall x \in S$

De donde se deduce que  $\dot{V}(e)$  será definida negativa si:

$$k_1 \leq \frac{1}{290.5654|\rho_2|} < \frac{c_3}{c_4}. \quad (4.44)$$

De la ecuación (4.44) es fácil ver que la desigualdad se cumple con  $k_1 \leq 0.0093$ , por lo tanto, se concluye lo siguiente:

**Lema 5.1** [28]: Suponga que  $e = 0$  es un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema nominal (4.24). Sea  $V(t, e)$  una función de Lyapunov del sistema nominal que satisface (4.33)-(4.35) en  $[0, \infty) \times D$ . Suponga que el término de la perturbación  $g(t, e)$  satisface las ecuaciones (4.23) y (4.42). Entonces, el origen es un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema perturbado (4.28).

### 4.3.2. Chua generalizado: configuración bidireccional

Para el análisis que corresponde a la configuración bidireccional, se considera el mismo conjunto de ecuaciones (4.13) que definió el error en el análisis anterior, el conjunto de ecuaciones (4.11)-(4.12) que describen al oscilador de Chua generalizado, el cual exhibe comportamiento caótico con valores de parámetros  $\alpha = 9$  y  $\beta = 14.2857$  y la desigualdad dada por la ecuación (4.14), el sistema dinámico del error de sincronización está dado por:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -(\alpha m_{2q-1} + 2c)e_1 - \alpha(m_{i-1} - m_i) |e_1| + \alpha e_2, \\ \dot{e}_2 = e_1 - e_2 + e_3, \\ \dot{e}_3 = -\beta e_2. \end{cases} \quad (4.45)$$

De igual manera, se supone que  $x = 0$  es un punto de equilibrio del sistema (4.45) exponencialmente estable y se obtiene como sigue:

$$\dot{e}_1 = \dot{e}_2 = \dot{e}_3 = 0, \quad (4.46)$$

$$0 = -(\alpha m_{2q-1} + 2c)e_1 - \alpha(m_{i-1} - m_i) |e_1| + \alpha e_2, \quad (4.47)$$

$$0 = e_1 - e_2 + e_3, \quad (4.48)$$

$$0 = -\beta e_2. \quad (4.49)$$

De la ecuación (4.49),  $\beta \neq 0 \rightarrow e_2 = 0$ .

De la ecuación (4.47),  $\alpha e_2 = (\alpha m_{2q-1} + 2c)e_1 + \alpha(m_{i-1} - m_i) |e_1|$ , dado que  $\alpha > 0, \alpha(m_{i-1} - m_i) \neq 0 \neq (\alpha m_{2q-1} + 2c), e_2 = 0 \rightarrow e_1 = 0$ .

De la ecuación (4.48) debido a que  $e_1 = e_2 = 0 \rightarrow e_3 = 0$ . *Por lo tanto el origen es un punto de equilibrio del sistema dinámico del error (4.45).*

El sistema dinámico del error (4.45), igual que el análisis anterior, es visto como un sistema perturbado descrito por las ecuaciones (4.20)-(4.22), donde la perturbación (4.22) es desvaneciente, es decir,  $g(t, 0) = 0$ , además,  $g(t, x)$  satisface la condición (4.23).

Entonces, el sistema dinámico del error (4.45) queda de la siguiente manera:

$$f(t, e) = Ae = \begin{bmatrix} -\rho_1 & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}, \quad (4.50)$$

$$g(t, e) = \begin{bmatrix} \rho_2 |e_1| \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.51)$$

donde

$$\rho_1 = (\alpha m_{2q-1} + 2c), \quad (4.52)$$

$$\rho_2 = -\alpha(m_{i-1} - m_i) \quad i = 1, \dots, 2q - 1, \quad (4.53)$$

y se obtiene:

$$\dot{e} = f(t, e) + g(t, e). \quad (4.54)$$

Debido a la multiplicidad de vectores  $m$  que se requiere para generar diferente número de enrollamientos, el elemento  $m_{2q-1}$  de cada vector cambia; por tal razón, existen  $A_j$  para  $j = 1, \dots, 4$  posibles matrices. A continuación se presenta el análisis de estabilidad para el mismo caso del análisis anterior, ya que requiere el valor de  $c$  más pequeño.

Los parámetros empleados son:

$$\begin{aligned} q &= 3 \text{ (5 enrollamientos),} \\ m &= [0.9/7 \quad -3/7 \quad 3.5/7 \quad -2.7/7 \quad 4/7 \quad -2.4/7]. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Los valores propios de la matriz  $A$  de la ecuación (4.50) son las raíces del polinomio que resulta como  $\det(\lambda I - A)$ , el cual se muestra a continuación y que está en función de la *fuerza de acoplamiento*  $c$  y los parámetros del sistema:

$$\lambda^3 + (\alpha m_{2q-1} + 2c + 1)\lambda^2 + (\beta + \alpha m_{2q-1} + 2c - \alpha)\lambda + \beta \alpha m_{2q-1} + 2\beta c, \quad (4.56)$$

sustituyendo en la ecuación (4.56) los valores de los parámetros se obtiene:

$$\lambda^3 + (2c - \frac{73}{35})\lambda^2 + (2c + \frac{11}{5})\lambda + \frac{200}{7}c - \frac{2160}{49}, \quad (4.57)$$

de donde se puede determinar que para  $c \geq 5.2$ , los valores propios de la matriz  $A$  son negativos; eligiendo  $c = 6$  los valores propios de  $A$  son  $\sigma(A) = \{-9.7922; -0.061 \pm 3.6057i\}$ , se puede apreciar que  $Re(\lambda_{1,2,3}) < 0$ , por lo tanto,  $A$  es Hurwitz. La solución de la ecuación de Lyapunov  $PA + A^T P = -I$  está dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 3.3426 & 3.2553 & -5.1814 \\ 3.2553 & 3.7903 & 0.035 \\ -5.1814 & 0.035 & 59.3629 \end{bmatrix}, \quad (4.58)$$

cuyos valores propios están dados por  $\sigma(P) = \{0.0509; 6.6056; 59.8393\}$ .

La función candidata de Lyapunov  $V(e) = e^T P e$  satisface las condiciones (4.33)-(4.35), o bien, de manera particular se satisface:

$$\lambda_{min}(P)\|e\|_2^2 \leq V(t, e) \leq \lambda_{max}(P)\|e\|_2^2, \quad (4.59)$$

$$\frac{\partial V}{\partial e} A e = -e^T Q e \leq -\lambda_{min}(Q)\|e\|_2^2, \quad (4.60)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial e} \right\|_2 = \|2e^T P\|_2 \leq 2\|P\|_2\|e\|_2 = 2\lambda_{max}(P)\|e\|_2. \quad (4.61)$$

Utilizando la función candidata de Lyapunov del sistema nominal como función candidata de Lyapunov para estudiar estabilidad del sistema perturbado, tenemos que la derivada de  $V(e)$  a lo largo de la ecuación (4.54) queda de la siguiente manera:

$$\dot{V}(t, e) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial e} f(t, e) + \frac{\partial V}{\partial e} g(t, e). \quad (4.62)$$

Comparando la ecuación (4.62) con (4.33)-(4.35) y el término de perturbación (4.23) se obtiene para el sistema perturbado:

$$\dot{V}(t, e) = -c_3\|e\|^2 + \left\| \frac{\partial V}{\partial e} \right\| \|g(t, e)\| \leq -c_3\|e\|^2 + c_4\gamma\|e\|^2, \quad (4.63)$$

donde

$$\begin{aligned}
c_3 &= 1, \\
c_4 &= 2\lambda_{max}(P) = 119.6786.
\end{aligned}
\tag{4.64}$$

El término de perturbación  $g(e)$  satisface:

$$\begin{aligned}
\|g(e)\| &= |\rho_2| |e_1| \leq |\rho_2| k_1 \|e\|, \\
\gamma &= |\rho_2| k_1 < \frac{c_3}{c_4}, \\
0 < k < 1, \\
|\rho_2| &= 0.3686.
\end{aligned}
\tag{4.65}$$

De igual manera, no se conoce la cota de  $|e_1|$ , pero  $|e_1|$  estará acotado siempre que la trayectoria de  $e$  este confinada a un conjunto compacto [28]. Usando las ecuaciones (4.64) y (4.65), la expresión (4.63) se convierte en:

$$\dot{V}(t, e) = -\|e\|_2^2 + 119.6786 |\rho_2| k_1 \|e\|_2^2, \tag{4.66}$$

de donde se deduce que  $\dot{V}(e)$  será definida negativa si:

$$k_1 < \frac{1}{119.6786 |\rho_2|} < \frac{c_3}{c_4}. \tag{4.67}$$

De la ecuación (4.67) es fácil ver que la desigualdad se cumple con  $k_1 < 0.0227$ , por lo tanto, se concluye lo siguiente:

**Lema 5.1** [28]: Suponga que  $e = 0$  es un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema nominal (4.50). Sea  $V(t, e)$  una función de Lyapunov del sistema nominal que satisface (4.33)-(4.35) en  $[0, \infty) \times D$ . Suponga que el término de la perturbación  $g(t, e)$  satisface las ecuaciones (4.23) y (4.65). Entonces, el origen es un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema perturbado (4.54).

### 4.3.3. Genesio & Tesi 3-D: configuración maestro - esclavo

El análisis correspondiente para el error de sincronización empleando osciladores de Genesio & Tesi se realizó para 1-D, 2-D y 3-D. A continuación se presenta sólo el análisis que corresponde a Genesio & Tesi 3-D ya que para 1-D y 2-D el procedimiento es muy similar.

El oscilador de Genesio & Tesi 3-D está descrito por las ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - f_1(y), \\ \dot{y} = z - f_1(z), \\ \dot{z} = -ax - ay - az + af_3(x). \end{cases} \quad (4.68)$$

Donde:

$$f_1(y) = \sum_{i=1}^{M_y} g_{\frac{(-2i+1)}{2}}(y) + \sum_{i=1}^{N_y} g_{\frac{(2i-1)}{2}}(y), \quad (4.69)$$

$$f_1(z) = \sum_{i=1}^{M_z} g_{\frac{(-2i+1)}{2}}(z) + \sum_{i=1}^{N_z} g_{\frac{(2i-1)}{2}}(z), \quad (4.70)$$

$$g_\theta(\cdot) = \begin{cases} 1, & \cdot \geq \theta, \theta > 0, \\ 0, & \cdot < \theta, \theta > 0, \\ 0, & \cdot \geq \theta, \theta < 0, \\ -1, & \cdot < \theta, \theta < 0, \end{cases} \quad (4.71)$$

$$f_3(x) = \sum_{l=1}^{k-1} \gamma g_{n_l}(x). \quad (4.72)$$

Donde:

$$\begin{aligned} n_l &= \rho + 0.5 + (l-1)(\rho + \varsigma + 1), \\ \gamma &= \rho + \varsigma + 1. \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned} \rho &= | \min_{i,j} \{u_i^{eq,y} + u_j^{eq,z}\} |, \\ \varsigma &= | \max_{i,j} \{u_i^{eq,y} + u_j^{eq,z}\} |. \end{aligned} \quad (4.74)$$

El modelo presentado en espacio de estados queda de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & -a & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -f_1(y) \\ -f_1(z) \\ af_3(x) \end{bmatrix}. \quad (4.75)$$

Usando la misma definición del error de los análisis anteriores  $e_1 = x_1 - x_2$ ,  $e_2 = y_1 - y_2$  y  $e_3 = z_1 - z_2$ , el modelo dinámico del error está dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & -a & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -[f_1(y_1) - f_1(y_2)] \\ -[f_1(z_1) - f_1(z_2)] \\ a[f_3(x_1) - f_3(x_2)] \end{bmatrix}. \quad (4.76)$$

Cuando el sistema dinámico del error (4.76) ha alcanzado el equilibrio, las variables de estado de los osciladores involucrados han sincronizado; debido a que las no linealidades  $f_1(y)$ ,  $f_1(z)$  y  $f_3(x)$  dependen del valor de los estados correspondientes, y ya que los estados en sincronía son iguales, la sustracción es cero, por lo tanto, en el equilibrio:

$$\dot{e}_1 = \dot{e}_2 = \dot{e}_3 = 0, \quad (4.77)$$

$$\begin{cases} f_1(y_1) - f_1(y_2) = 0, \\ f_1(z_1) - f_1(z_2) = 0, \\ f_3(x_1) - f_3(x_2) = 0. \end{cases} \quad (4.78)$$

El sistema dinámico del error (4.76) se reduce a lo siguiente,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & -a & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}. \quad (4.79)$$

De la ecuación (4.79),

$$\begin{aligned} e_3 &= 0, \\ -e_1 &= e_2, \\ -ce_1 + e_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.80)$$

De donde se deduce que  $(c+1)e_2 = 0 \Rightarrow e_2 = 0 \therefore e_1 = 0$ . *El origen es un punto de equilibrio del sistema dinámico del error de sincronización (4.76).*

Para estudiar la estabilidad del punto de equilibrio se propone:

$$P = \begin{bmatrix} b & 0 & 1 \\ 0 & b & 2 \\ 1 & 2 & b \end{bmatrix}, \quad (4.81)$$

que es una matriz cuyos menores principales son  $b$ ,  $b^2$ ,  $b(b^2 - 5)$ ,  $P > 0$  para  $b > \sqrt[3]{5}$ . La función candidata de Lyapunov  $V(e) = e^T P e$  correspondiente es,

$$V(e) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & 0 & 1 \\ 0 & b & 2 \\ 1 & 2 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (be_1^2 + 2e_1e_3 + be_2^2 + 4e_2e_3 + be_3^2), \quad (4.82)$$

y su derivada evaluada en las trayectorias del sistema dinámico del error (4.76) está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) = & -(bc + a)e_1^2 + (b - 3a)e_1e_2 - (a + ba + c)e_1e_3 \\ & + (1 + b - 2a - ba)e_2e_3 - 2ae_2^2 - (ba - 2)e_3^2. \end{aligned} \quad (4.83)$$

La forma matricial de la ecuación (4.83) permite demostrar que  $\dot{V}(e)$  es definida negativa mostrando la positividad de  $Q$ , por lo tanto:

$$\dot{V}(e) = - \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}, \quad (4.84)$$

donde

$$Q = \begin{bmatrix} (bc + a) & -\frac{1}{2}(b - 3a) & \frac{1}{2}(a + ba + c) \\ -\frac{1}{2}(b - 3a) & 2a & -\frac{1}{2}(1 + b - 2a - ba) \\ \frac{1}{2}(a + ba + c) & -\frac{1}{2}(1 + b - 2a - ba) & (ba - 2) \end{bmatrix}. \quad (4.85)$$

El polinomio que resulta de calcular el determinante de  $Q$  está en función del parámetro del sistema, el parámetro libre de la matriz  $P$  y la *fuerza de acoplamiento*  $c$  y se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \det(Q) = & -\frac{1}{2}ac^2 + \frac{1}{4}(4a^2b^2 - a^2b^3 - 5a^2b + 2a^2 + 2ab^3 \\ & + 5ab^2 - 17ab - 3a - b^2 - b^3)c + \frac{1}{4}(2a^2b^2 - a^2b^3 - 2a^2b \\ & + 3a^2 + ab^2 - 13ab - a + b^2). \end{aligned} \quad (4.86)$$

Sustituyendo el parámetro del sistema y fijando  $b = 4$ , la ecuación (4.86) se reduce a la expresión siguiente:

$$-\frac{2}{5}c^2 + \frac{113}{25}c - \frac{133}{25}, \quad (4.87)$$

de donde se demuestra que  $Q > 0$  obteniendo las raíces del polinomio. Para  $1.3346 < c < 9.9654$ , se garantiza  $\dot{V}(e) < 0$ , esto implica que el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable para el rango de la fuerza de acoplamiento  $c$  dado.

#### 4.3.4. Genesio & Tesi 3-D: configuración bidireccional

Para el análisis de estabilidad del error de sincronización correspondiente a la configuración bidireccional, consideramos el oscilador de Genesio & Tesi 3-D descrito por las ecuaciones (4.68)-(4.74). El modelo tiene la misma representación en espacio de estados del análisis anterior dada por la ecuación (4.75).

Con la definición del error  $e_1 = x_1 - x_2$ ,  $e_2 = y_1 - y_2$  y  $e_3 = z_1 - z_2$ , el modelo dinámico del error está dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & -a & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -[f_1(y_1) - f_1(y_2)] \\ -[f_1(z_1) - f_1(z_2)] \\ a[f_3(x_1) - f_3(x_2)] \end{bmatrix}. \quad (4.88)$$

Como se explicó anteriormente, el equilibrio del sistema dinámico del error (4.88) implica la sincronía de las variables de estado de los osciladores involucrados, por lo tanto, las no linealidades  $f_1(y)$ ,  $f_1(z)$ , y  $f_3(x)$  tienen el mismo valor y su sustracción es cero, entonces, en el equilibrio:

$$\dot{e}_1 = \dot{e}_2 = \dot{e}_3 = 0, \quad (4.89)$$

$$\begin{cases} f_1(y_1) - f_1(y_2) = 0, \\ f_1(z_1) - f_1(z_2) = 0, \\ f_3(x_1) - f_3(x_2) = 0. \end{cases} \quad (4.90)$$

El sistema dinámico del error (4.88) se reduce a lo siguiente,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & -a & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}. \quad (4.91)$$

De la ecuación (4.91),

$$\begin{aligned} e_3 &= 0, \\ -e_1 &= e_2, \\ -2ce_1 + e_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.92)$$

De donde se deduce que  $(2c + 1)e_2 = 0 \Rightarrow e_2 = 0 \therefore e_1 = 0$ . *El origen es un punto de equilibrio del sistema dinámico del error de sincronización (4.88).*

Para estudiar la estabilidad del punto de equilibrio se propone usar la misma matriz del análisis anterior para mostrar lo que sucede con el valor del rango de la fuerza de acoplamiento, dicha matriz está dada por la ecuación (4.81) cuyos menores principales son  $b$ ,  $b^2$ ,  $b(b^2 - 5)$ ,  $P > 0$  para  $b > \sqrt[3]{5}$ . La función candidata de Lyapunov  $V(e) = e^T P e$  no cambia y está dada por la ecuación (4.82). La derivada de  $V(e)$  evaluada en las trayectorias del sistema está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) = & -(2bc + a)e_1^2 + (b - 3a)e_1e_2 - (a + ba + 2c)e_1e_3 \\ & + (1 + b - 2a - ba)e_2e_3 - 2ae_2^2 - (ba - 2)e_3^2. \end{aligned} \quad (4.93)$$

La forma matricial de la ecuación (4.93) permite demostrar que  $\dot{V}(e)$  es definida negativa mostrando la positividad de  $Q$ , por lo tanto:

$$\dot{V}(e) = - \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}, \quad (4.94)$$

donde

$$Q = \begin{bmatrix} (2bc + a) & -\frac{1}{2}(b - 3a) & \frac{1}{2}(a + ba + 2c) \\ -\frac{1}{2}(b - 3a) & 2a & -\frac{1}{2}(1 + b - 2a - ba) \\ \frac{1}{2}(a + ba + 2c) & -\frac{1}{2}(1 + b - 2a - ba) & (ba - 2) \end{bmatrix}. \quad (4.95)$$

De igual manera, se calcula el determinante de  $Q$  que está en función del parámetro del sistema, el parámetro libre de la matriz  $P$  y la *fuerza de acoplamiento*  $c$  y se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \det(Q) = & -2ac^2 + \frac{1}{2}(4a^2b^2 - a^2b^3 - 5a^2b + 2a^2 + 2ab^3 \\ & + 5ab^2 - 17ab - 3a - b^2 - b^3)c + \frac{1}{4}(2a^2b^2 - a^2b^3 - 2a^2b \\ & + 3a^2 + ab^2 - 13ab - a + b^2). \end{aligned} \quad (4.96)$$

Sustituyendo el parámetro del sistema y fijando  $b = 4$ , la ecuación (4.96) se reduce a la expresión siguiente:

$$-\frac{8}{5}c^2 + \frac{226}{25}c - \frac{133}{25}, \quad (4.97)$$

de donde se demuestra que  $Q > 0$  obteniendo las raíces del polinomio. Para  $0.6673 < c < 4.9827$  se garantiza  $\dot{V}(e) < 0$ , esto implica que el origen es un punto de

equilibrio asintóticamente estable para el rango de la fuerza de acoplamiento  $c$  dado.

Para finalizar esta sección, se destaca primeramente que al asegurar que el sistema dinámico del error de sincronización, para cualquiera de las configuraciones mostradas, alcanza el equilibrio de manera asintótica para cierto valor de  $c$ , implica que las variables de estado de los osciladores caóticos involucrados alcanzan sincronía de manera asintótica, por lo tanto, se cumple la ecuación (4.98) que garantiza la sincronización completa de los estados involucrados; se destaca también la importancia que tiene el valor de la fuerza de acoplamiento  $c$  en la estabilidad del sistema dinámico del error, como se vio para el caso del oscilador de Chua generalizado, determina la ubicación de los polos del sistema nominal y para el caso de los osciladores caóticos de Genesio & Tesi 1-D, 2-D y 3-D determina el rango para el cual la matriz  $Q$  es positiva definida. Para este último caso, se hace la aclaración de que el rango de  $c$  proporcionado no es único, ya que debido al parámetro libre de la matriz  $P$  éste se amplía o disminuye conforme  $b$  aumenta o decrece.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \hat{x}(t)\| = 0. \quad (4.98)$$

#### 4.4. Ejemplos de sincronización

A continuación, se presentan los resultados de las simulaciones de sincronización empleando algunos de los osciladores descritos en el capítulo 3. Es imperativo mencionar que la sincronización de los osciladores caóticos se estará corroborando de manera gráfica a través del plano de fase entre los estados correspondientes de los osciladores caóticos involucrados. Para decir que dos osciladores caóticos están sincronizados es necesario que se cumpla la ecuación (4.98) y además obtener en el plano de fase de las variables involucradas una línea a  $45^\circ$ .

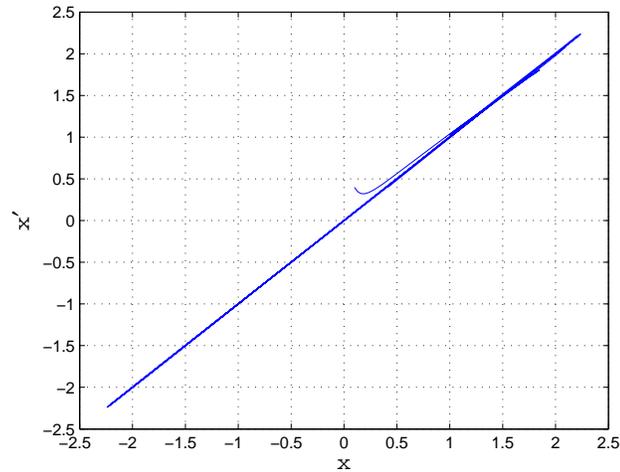


Figura 4.1: Ejemplo del plano de fase correspondiente a la sincronización de los estados  $x$  y  $x'$ .

#### 4.4.1. Sincronización dos osciladores Chua generalizado

La primer sincronización se realiza sobre dos osciladores de Chua generalizado, el cual está descrito por las ecuaciones (4.11)-(4.12) y exhibe comportamiento caótico para valores de parámetros  $\alpha = 9$  y  $\beta = 14.2857$ . La red compleja que se desea sincronizar se muestra en la figura (4.2)(a) cuya matriz de acoplamiento  $A$  está dada por la ecuación (4.99) con valores propios  $\sigma(A) = \{0, -1\}$ ,

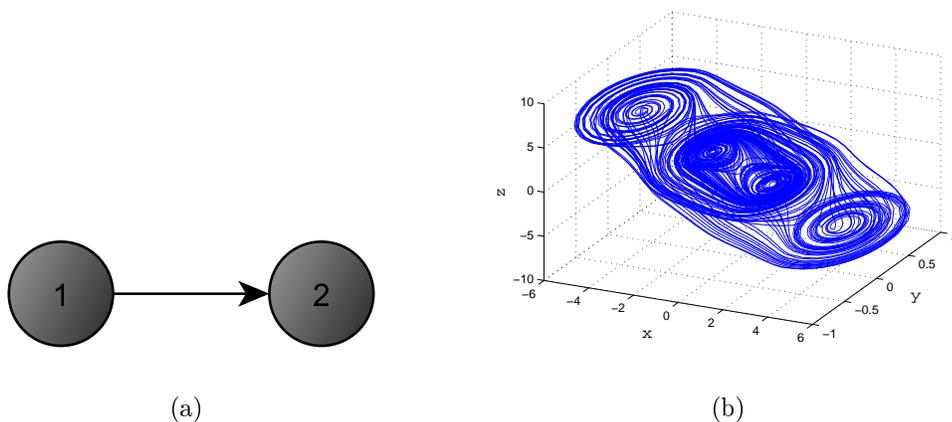


Figura 4.2: Sincronización 2 osciladores: (a) Configuración y acoplamiento de la red. (b) Atractor de 4 enrollamientos que presenta el oscilador maestro.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.99)$$

Las condiciones iniciales de las variables de estado de cada oscilador empleadas son:

Condiciones iniciales		
$x_{1,2}(0)$	0.1	-0.2
$y_{1,2}(0)$	0.1	-0.2
$z_{1,2}(0)$	0.1	-0.5

Tabla 4.1: Condiciones iniciales de la red compleja figura (4.2)(a).

El valor de la fuerza de acoplamiento  $c$  se calcula de acuerdo con el teorema (4.1) donde para  $d = -20$  se obtiene

$$c \geq \left| \frac{\bar{d}}{\lambda_2} \right| = \left| \frac{20}{-1} \right| = 20. \quad (4.100)$$

Las ecuaciones de la red compleja (4.2)(a) quedan de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \dot{x}_i &= \alpha [y_i - h(x_i)] + u_i, \\ \dot{y}_i &= x_i - y_i + z_i, \\ \dot{z}_i &= -\beta y_i, \end{cases} \quad \text{para } i = 1, 2, \quad (4.101)$$

donde

$$u_i = c \sum_{j=1}^2 a_{ij} \Gamma [x_i \ y_i \ z_i]^T, \quad (4.102)$$

$$h(x_i) = m_{2q-1} x_i + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{2q-1} (m_{l-1} - m_l) (|x_i + c_l| - |x_i - c_l|). \quad (4.103)$$

Usando los parámetros,

$$\begin{cases} q &= 3, \\ m &= -[0.9/7, -3/7, 3.5/7, -2.7/7, 4/7, -2.4/7], \\ c &= [1, 2.15, 3.6, 6.2, 9], \end{cases} \quad (4.104)$$

se obtiene el atractor de la figura (4.2)(b). La sincronización de los estados del oscilador esclavo se puede apreciar en la figura (4.3)(a) y la sincronización se corrobora con la figura (4.3)(b) que es el plano de fase.

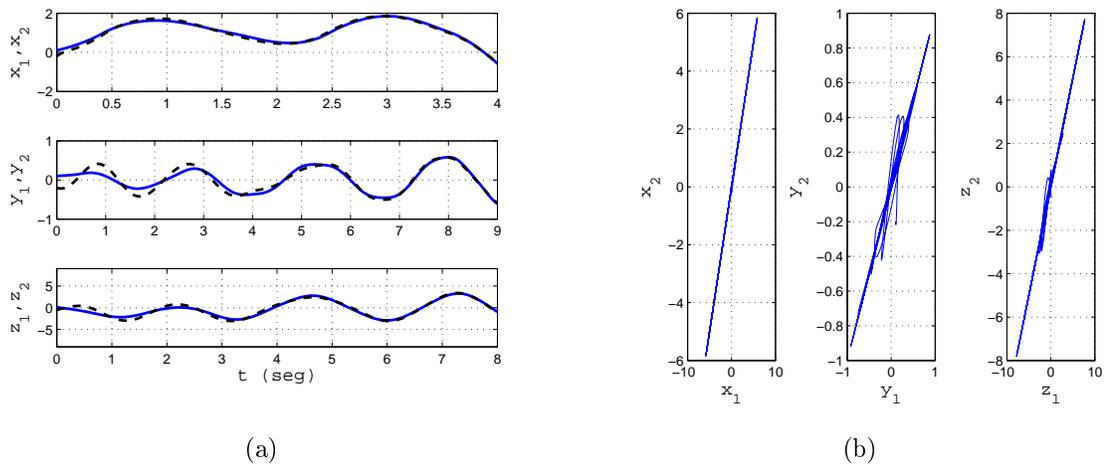


Figura 4.3: (a) Estados de los osciladores. (b) Planos de fase.

#### 4.4.2. Sincronización red regular Chua generalizado

El segundo resultado que se presenta es la sincronización de una red compleja regular. De igual forma, los nodos de la red son osciladores caóticos de Chua generalizado descritos por las ecuaciones (4.11)-(4.12) con valores de parámetros  $\alpha = 9$  y  $\beta = 14.2857$ . La red compleja que se desea sincronizar se muestra en la figura (4.4)(a) cuya matriz de acoplamiento  $A$  está dada por la ecuación (4.105) con valores propios  $\sigma\{0, -4, -4, -4\}$ ,

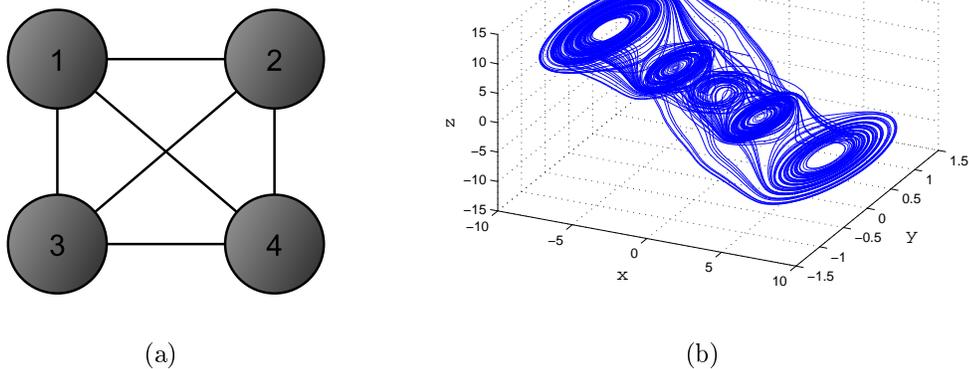


Figura 4.4: Sincronización 4 osciladores: (a) Configuración y acoplamiento de la red. (b) Atractor de 5 enrollamientos al que sincroniza la dinámica de la red.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad (4.105)$$

Las condiciones iniciales de las variable de estado de cada oscilador usadas son:

Condiciones iniciales				
$x_{1,\dots,4}(0)$	-3	-2	3	2
$y_{1,\dots,4}(0)$	0.4	0.3	0.2	0.1
$z_{1,\dots,4}(0)$	-4	3	2	-1

Tabla 4.2: Condiciones iniciales de la red compleja figura (4.4)(a).

El valor de la fuerza de acoplamiento  $c$  se calcula de acuerdo con el teorema (4.1) donde para  $d = -20$  se obtiene

$$c \geq \left| \frac{\bar{d}}{\lambda_2} \right| = \left| \frac{20}{-4} \right| = 5. \quad (4.106)$$

Las ecuaciones de la red compleja (4.4)(a) quedan de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \alpha [y_i - h(x_i)] + u_i, \\ \dot{y}_i = x_i - y_i + z_i, \\ \dot{z}_i = -\beta y_i, \end{cases} \quad \text{para } i = 1, \dots, 4, \quad (4.107)$$

donde

$$u_i = c \sum_{j=1}^4 a_{ij} \Gamma [x_i \ y_i \ z_i]^T, \quad (4.108)$$

$$h(x_i) = m_{2q-1} x_i + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{2q-1} (m_{l-1} - m_l) (|x_i + c_l| - |x_i - c_l|). \quad (4.109)$$

Usando los parámetros,

$$\begin{cases} q = 3, \\ m = [0.9/7, -3/7, 3.5/7, -2.7/7, 4/7, -2.4/7], \\ c = [1, 2.15, 3.6, 6.2, 9], \end{cases} \quad (4.110)$$

se obtiene el atractor de la figura (4.4)(b). Se puede ver en la figura (4.5) cómo los estados parten de condiciones iniciales diferentes pero cercanas entre sí y con

el transcurso del tiempo convergen a un comportamiento común. La figura (4.6) muestra los planos de fase del estado primero de cada oscilador.

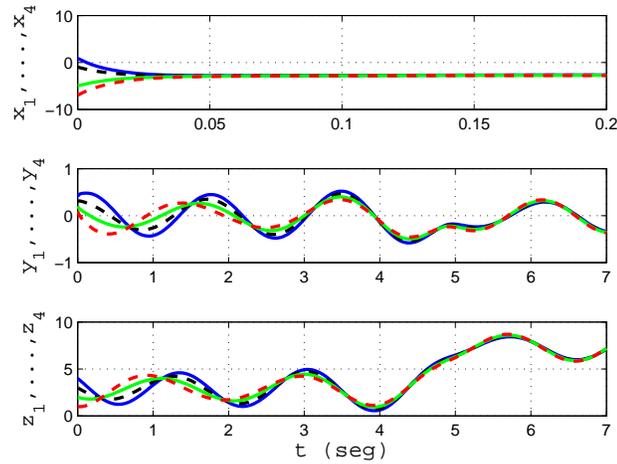


Figura 4.5: Convergencia de los estados a una sola dinámica.

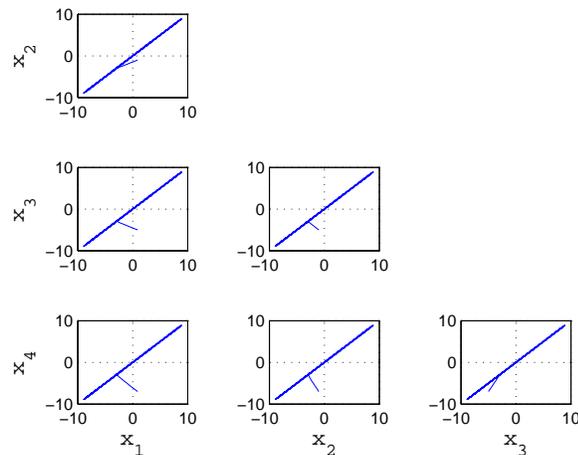


Figura 4.6: Planos de fase donde se observa una línea a  $45^\circ$  para las variables de estado de cada oscilador.

#### 4.4.3. Sincronización red regular Genesisio & Tesi 3-D

El tercer resultado es la sincronización de una red compleja regular constituida por osciladores de Genesisio & Tesi 3-D. Aquí, dichos osciladores caóticos están descritos por las ecuaciones (4.68)-(4.74), donde para el valor de parámetro  $a = 0.8$  el

oscilador exhibe comportamiento caótico. La red compleja que se desea sincronizar se muestra en la figura (4.7)(a) cuya matriz de acoplamiento  $A$  está dada por la ecuación (4.111) con valores propios  $\sigma\{0, -1, -1, -1, -1, -1\}$ .

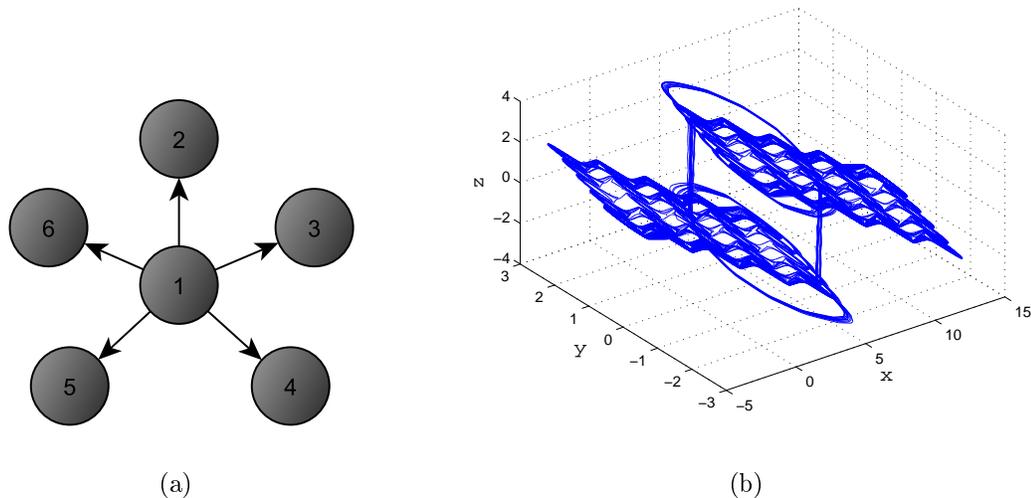


Figura 4.7: Sincronización de 6 osciladores Genesis & Tesi 3-D: (a) Configuración y acoplamiento que presenta la red. (b) Atractor que presenta el oscilador maestro.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.111)$$

Las condiciones iniciales de las variables de estado de cada oscilador caótico usadas son:

Condiciones iniciales						
$x_{1,\dots,6}(0)$	0.6	0.1	0.3	0.5	0.2	0.4
$y_{1,\dots,6}(0)$	0.6	0.1	0.3	0.5	0.2	0.4
$z_{1,\dots,6}(0)$	0.6	0.1	0.3	0.5	0.2	0.4

Tabla 4.3: Condiciones iniciales de la red compleja figura (4.7)(a).

El valor de la fuerza de acoplamiento  $c$ , se calcula de acuerdo con el análisis de estabilidad del sistema dinámico del error de sincronización que corresponde a la

configuración maestro - esclavo presentado en la sección anterior, donde, para cada par de osciladores de la red compleja de la figura (4.7)(a), el sistema dinámico del error de sincronización está dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & -a & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -[f_1(y_1) - f_1(y_2)] \\ -[f_1(z_1) - f_1(z_2)] \\ a[f_3(x_1) - f_3(x_2)] \end{bmatrix}, \quad (4.112)$$

del cual ya se mostró que el origen es un punto de equilibrio. Se propone para estudiar la estabilidad del sistema (4.112) la función candidata de Lyapunov dada por la ecuación (4.113), cuya derivada evaluada en las trayectorias del sistema (4.112) está dada por la ecuación (4.114).

$$V(e) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & 0 & 1 \\ 0 & b & 2 \\ 1 & 2 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(be_1^2 + 2e_1e_3 + be_2^2 + 4e_2e_3 + be_3^2), \quad (4.113)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= -(bc + a)e_1^2 + (b - 3a)e_1e_2 - (a + ba + c)e_1e_3 \\ &\quad + (1 + b - 2a - ba)e_2e_3 - 2ae_2^2 - (ba - 2)e_3^2. \end{aligned} \quad (4.114)$$

La forma matricial de la ecuación (4.114) permite demostrar que  $\dot{V}(e)$  es definida negativa mostrando la positividad de  $Q$ , por lo tanto:

$$\dot{V}(e) = - \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}, \quad (4.115)$$

donde

$$Q = \begin{bmatrix} (bc + a) & -\frac{1}{2}(b - 3a) & \frac{1}{2}(a + ba + c) \\ -\frac{1}{2}(b - 3a) & 2a & -\frac{1}{2}(1 + b - 2a - ba) \\ \frac{1}{2}(a + ba + c) & -\frac{1}{2}(1 + b - 2a - ba) & (ba - 2) \end{bmatrix}. \quad (4.116)$$

El polinomio que resulta de calcular el determinante de  $Q$  está en función del parámetro del sistema, el parámetro libre de la matriz  $P$  y la fuerza de acoplamiento  $c$  y se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
\det(Q) &= -\frac{1}{2}ac^2 + \frac{1}{4}(4a^2b^2 - a^2b^3 - 5a^2b + 2a^2 + 2ab^3 \\
&\quad + 5ab^2 - 17ab - 3a - b^2 - b^3)c + \frac{1}{4}(2a^2b^2 - a^2b^3 - 2a^2b \\
&\quad + 3a^2 + ab^2 - 13ab - a + b^2). \tag{4.117}
\end{aligned}$$

Sustituyendo el parámetro del sistema y fijando  $b = 5$ , la ecuación (4.117) se reduce a la expresión siguiente:

$$-\frac{2}{5}c^2 + \frac{611}{50}c - \frac{441}{50}, \tag{4.118}$$

de la ecuación (4.118) se puede demostrar que para el rango de la fuerza de acoplamiento  $0.7397 \leq c \leq 29.8104$ ,  $Q > 0$ , por lo tanto, se garantiza que  $\dot{V}(e) < 0$ , entonces, el punto de equilibrio es asintóticamente estable lo que implica que los estados de los osciladores caóticos involucrados alcanzan la sincronía de manera asintótica. Para este caso particular  $c = 15$ .

Las ecuaciones de la red compleja (4.7)(a) quedan de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = y_i - f_1(y_i) + u_i, \\ \dot{y}_i = z_i - f_1(z_i), \\ \dot{z}_i = -ax_i - ay_i - az_i + af_3(x_i), \end{cases} \quad \text{para } i = 1, \dots, 6, \tag{4.119}$$

donde:

$$u_i = c \sum_{j=1}^6 a_{ij} \Gamma[x_i \ y_i \ z_i]^T, \tag{4.120}$$

$$f_1(y_i) = \sum_{n=1}^{M_y} g_{\frac{(-2n+1)}{2}}(y_i) + \sum_{n=1}^{N_y} g_{\frac{(2n-1)}{2}}(y_i), \tag{4.121}$$

$$f_1(z_i) = \sum_{n=1}^{M_z} g_{\frac{(-2n+1)}{2}}(z_i) + \sum_{n=1}^{N_z} g_{\frac{(2n-1)}{2}}(z_i), \tag{4.122}$$

$$g_\theta(\cdot) = \begin{cases} 1, & \cdot \geq \theta, \theta > 0, \\ 0, & \cdot < \theta, \theta > 0, \\ 0, & \cdot \geq \theta, \theta < 0, \\ -1, & \cdot < \theta, \theta < 0, \end{cases} \tag{4.123}$$

$$f_3(x_i) = \sum_{l=1}^{k-1} \gamma g_{n_l}(x_i), \tag{4.124}$$

donde:

$$\begin{aligned} n_l &= \rho + 0.5 + (l - 1)(\rho + \varsigma + 1), \\ \gamma &= \rho + \varsigma + 1. \end{aligned} \quad (4.125)$$

$$\begin{aligned} \rho &= | \min_{i,j} \{ u_i^{eq,y} + u_j^{eq,z} \} |, \\ \varsigma &= | \max_{i,j} \{ u_i^{eq,y} + u_j^{eq,z} \} |. \end{aligned} \quad (4.126)$$

Usando los parámetros  $M_y = 2$ ,  $N_y = 2$ ,  $M_z = 2$ ,  $N_z = 2$  y  $k = 2$  se obtiene el atractor de la figura (4.7)(b). En la figura (4.8) se muestran los tres estados de cada oscilador y se aprecia que parten de condiciones iniciales diferentes y puede verse que conforme el tiempo transcurre, los estados sincronizan a una misma dinámica. La figura (4.9) es prueba de la sincronización de la red (4.7)(a).

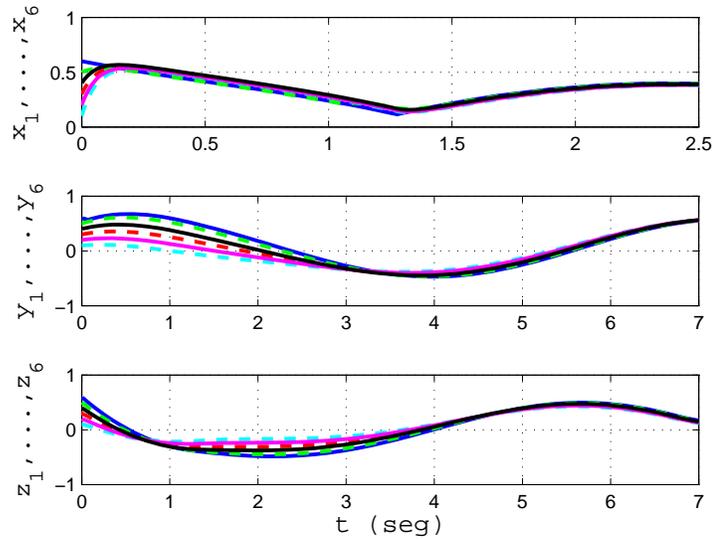


Figura 4.8: Estados de los osciladores de la red (4.7)(a) sincronizando asintóticamente a la dinámica del oscilador maestro.

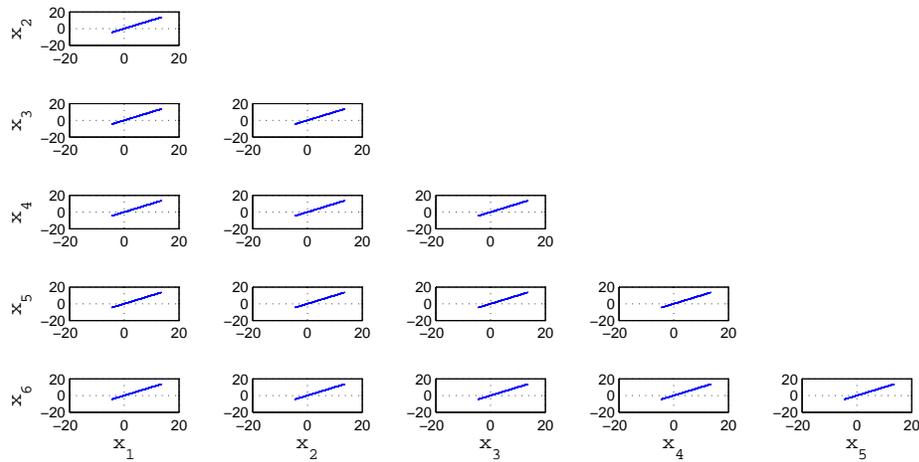


Figura 4.9: Plano de fase estados  $x_i$   $i = 1, \dots, 6$ .

#### 4.4.4. Sincronización red irregular Genesis & Tesi 3-D

Por último, se sincronizó una red compleja con topología irregular de osciladores Genesis & Tesi 3-D, el cual está descrito por las ecuaciones (4.68)-(4.74) y para valor de parámetro  $a = 0.8$  exhibe comportamiento caótico. La red compleja que se desea sincronizar se muestra en la figura (4.10)(a) cuya matriz de acoplamiento  $A$  está dada por la ecuación (4.127) y los valores propios son  $\sigma(A) = \{0, -0.1909, -0.8214, -1.3328, -1.8179, -3.6868, -3.9150, -5.6492, -6.5859\}$ .

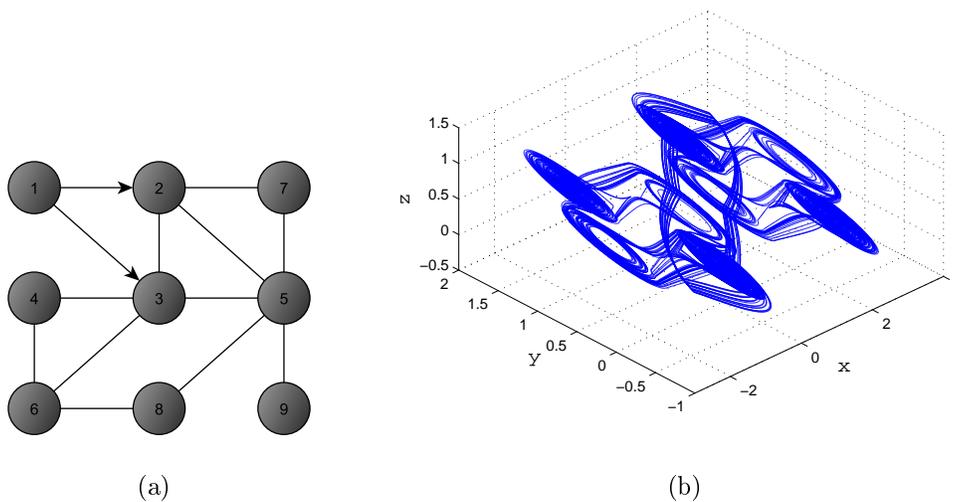


Figura 4.10: Sincronización 9 osciladores: (a) Configuración y acoplamiento de la red irregular a sincronizar. (b) Atractor que presenta el oscilador maestro.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -5 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.127)$$

Las condiciones iniciales de las variables de estado de cada oscilador caótico usadas son:

Condiciones iniciales									
$x_{1,\dots,9}(0)$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$y_{1,\dots,9}(0)$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$z_{1,\dots,9}(0)$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9

Tabla 4.4: Condiciones iniciales de la red compleja irregular (4.10)(a).

El valor de la fuerza de acoplamiento  $c$  de acuerdo con el teorema (4.1) para  $d = 10$  se obtiene,

$$c \geq \left| \frac{\bar{d}}{\lambda_2} \right| = \left| \frac{10}{-0.1909} \right| = 52.38. \quad (4.128)$$

El cálculo de la fuerza de acoplamiento  $c$ , realizado a través del análisis de estabilidad del error se obtiene de la misma manera que en el caso anterior, esto debido a que la red compleja presenta ambos tipos de configuración, y como se mostró en los análisis previos, es la configuración maestro - esclavo la que presenta mayor restricción para  $c$ , por tal motivo, el valor de la fuerza de acoplamiento para esta red compleja la dicta la configuración del oscilador 1. Para este caso particular  $c = 9$ .

Las ecuaciones de la red compleja (4.7)(a) quedan de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = y_i - f_1(y_i) + u_i, \\ \dot{y}_i = z_i - f_1(z_i), \\ \dot{z}_i = -ax_i - ay_i - az_i + af_3(x_i), \end{cases} \quad \text{para } i = 1, \dots, 6, \quad (4.129)$$

donde:

$$u_i = c \sum_{j=1}^6 a_{ij} \Gamma [x_i \ y_i \ z_i]^T, \quad (4.130)$$

$$f_1(y_i) = \sum_{n=1}^{M_y} g_{\frac{(-2n+1)}{2}}(y_i) + \sum_{n=1}^{N_y} g_{\frac{(2n-1)}{2}}(y_i), \quad (4.131)$$

$$f_1(z_i) = \sum_{n=1}^{M_z} g_{\frac{(-2n+1)}{2}}(z_i) + \sum_{n=1}^{N_z} g_{\frac{(2n-1)}{2}}(z_i), \quad (4.132)$$

$$g_\theta(\cdot) = \begin{cases} 1, & \cdot \geq \theta, \theta > 0, \\ 0, & \cdot < \theta, \theta > 0, \\ 0, & \cdot \geq \theta, \theta < 0, \\ -1, & \cdot < \theta, \theta < 0, \end{cases} \quad (4.133)$$

$$f_3(x_i) = \sum_{l=1}^{k-1} \gamma g_{n_l}(x_i), \quad (4.134)$$

donde:

$$\begin{aligned} n_l &= \rho + 0.5 + (l-1)(\rho + \varsigma + 1), \\ \gamma &= \rho + \varsigma + 1. \end{aligned} \quad (4.135)$$

$$\begin{aligned} \rho &= | \min_{i,j} \{ u_i^{eq,y} + u_j^{eq,z} \} |, \\ \varsigma &= | \max_{i,j} \{ u_i^{eq,y} + u_j^{eq,z} \} |. \end{aligned} \quad (4.136)$$

Usando los parámetros  $M_y = 0$ ,  $N_y = 1$ ,  $M_z = 0$ ,  $N_z = 1$  y  $k = 2$  se obtiene el atractor de la figura (4.10)(b). La figura (4.11) muestra los tres estados de cada oscilador partir de condiciones iniciales diferentes y con el paso del tiempo, estos tienden de manera asintótica a la dinámica que corresponde al oscilador maestro. El plano de fases que corresponde a la sincronización de la red (4.10)(a) se ha dividido en tres partes que se explican a continuación. El plano de fase (4.12) muestra los estados  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  comparados con los estados  $x_j$ ,  $j = 2, \dots, 5$ . La figura (4.13) corresponde a la parte central inferior de un plano de fase único y comprende la comparación de los estados  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  vs  $x_j$ ,  $j = 6, \dots, 9$ . Por último, la parte inferior derecha es la figura (4.14), donde se puede apreciar la comparación de los estados  $x_i$ ,  $i = 5, \dots, 8$  vs  $x_j$ ,  $j = 6, \dots, 9$ .

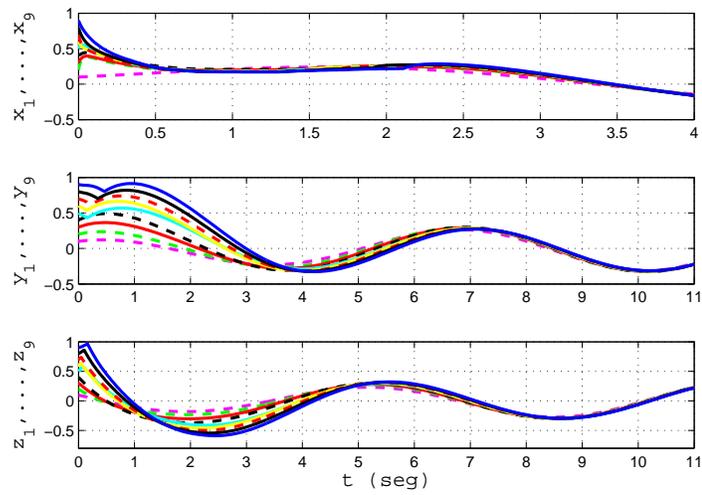


Figura 4.11: Estados de la red (4.10)(a) sincronizando asintóticamente.

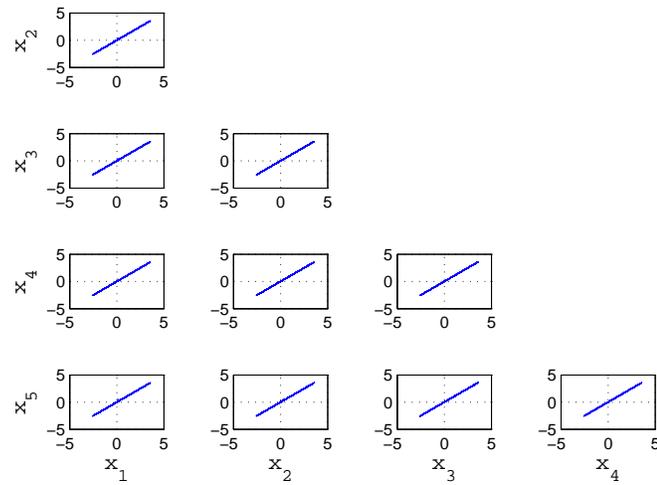


Figura 4.12: Plano de fase estados  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  vs.  $x_j$ ,  $j = 2, \dots, 5$ .

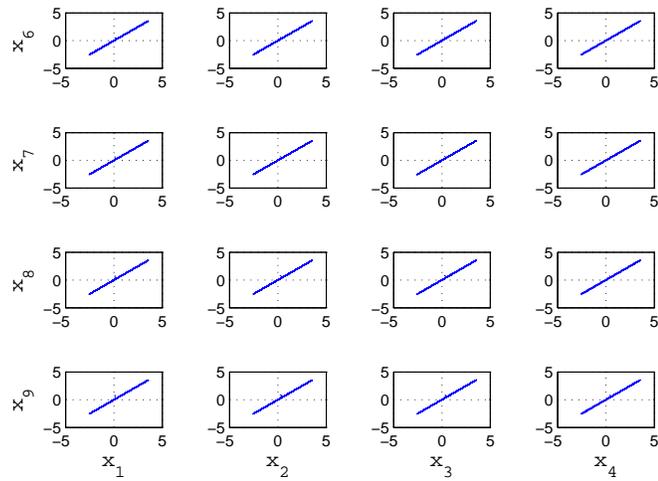


Figura 4.13: Plano de fase estados  $x_i, i = 1, \dots, 4$  vs.  $x_j, j = 6, \dots, 9$ .

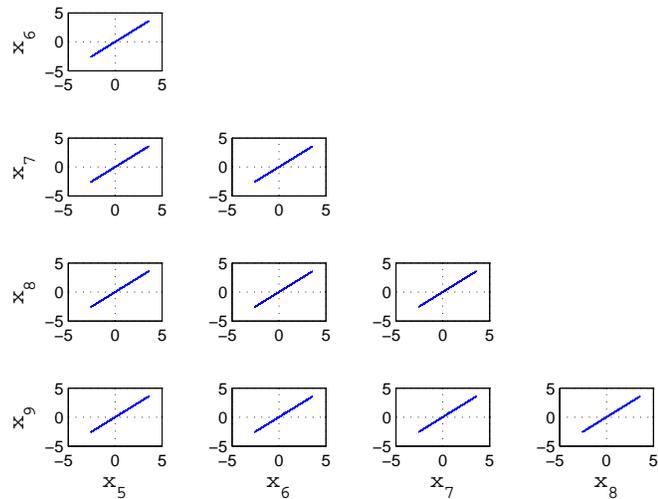


Figura 4.14: Plano de fase estados  $x_i, i = 5, \dots, 8$  vs.  $x_j, j = 6, \dots, 9$ .

A manera de resumen del capítulo, en la primer sección se proporcionaron los conceptos de sincronización, la teoría para sincronizar redes y las condiciones de sincronización de una red compleja (4.1), posteriormente, se proporcionó el análisis de estabilidad del error de sincronización entre cualquier par de osciladores de una red compleja constituida ya sea por osciladores de Chua generalizado o por osciladores de Genesis & Tesi en configuración maestro - esclavo y bidireccional. Finalmente,

se presentaron cuatro resultados de simulaciones de redes complejas que presentan atractores de múltiples enrollamientos.

# Capítulo 5

## Encriptado caótico de datos

En el capítulo 1 se dio la definición de encriptamiento, se proporcionaron algunos ejemplos de encriptamiento antiguo, algunos algoritmos que se usan actualmente como métodos de encriptado y se mencionó como técnica de encriptado alternativa el uso del encriptamiento caótico. En este capítulo se proporcionan varios conceptos importantes de análisis frecuencial de señales que ayudan a discriminar o jerarquizar las señales caóticas usadas para el encriptado. También se presentan resultados de las simulaciones del proceso de comunicación segura empleando caos, cuyo encriptamiento caótico está basado en criterios que garantizan un nivel más alto de seguridad.

### 5.1. Criterios de selección

El encriptamiento caótico experimental reportado hasta el momento, refleja la carencia de una justificación en la selección de la señal caótica que enmascara el mensaje a encriptar, esto, aunado a la variedad de modelos generadores de caos presentados en esta investigación (capítulo 3), crea un ambiente en el cual es necesario clasificar, discriminar o descartar señales caóticas potenciales. El objetivo de este capítulo es el reforzar el nivel de seguridad de la etapa de encriptado en el sistema de comunicación, se propone el uso de criterios que permitan seleccionar la señal caótica que mejor enmascara al mensaje.

A continuación, se propone el uso de dos criterios basados en energía.

### 5.1.1. Criterio 1: Selección basada en energía de la señal que enmascara

Es importante establecer la terminología que describe la energía de una señal. Sea  $x(t)$  una señal continua en el tiempo, su energía está dada por [29]:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt, \quad (5.1)$$

note que la energía de la señal está relacionada con el área bajo el cuadrado de la magnitud.

Si además,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty, \quad (5.2)$$

entonces, se dice que  $x(t)$  es de energía finita. Realizando el muestreo uniforme a  $x(t)$  para el tiempo discreto, la expresión equivalente a (5.1) está dada por:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2, \quad (5.3)$$

que es la energía de una señal discreta en tiempo  $x(n) = x(t)|_{t=nT}$  con  $T$  siendo el tiempo de muestreo.

Básicamente, lo que se propone en este primer criterio, es la elección de la señal caótica que será usada para enmascarar con base en la cantidad de energía que presenta. Los resultados reportados hasta el momento sugieren la atenuación del mensaje a encriptar con el propósito de ocultarlo eficientemente. Sin embargo, atenuar el mensaje en forma considerable puede significar un riesgo al momento del descifrado, ya que pueden existir pérdidas de información debido a que aumenta la sensibilidad a ruido (SNR), o en caso de llevar a cabo de manera física el sistema de comunicación, debido a las imprecisiones introducidas por los componentes.

De manera general, se sugiere la elección de la señal que enmascara con base en su energía y el cociente resultado de la relación de la energía de la señal caótica y la energía del mensaje,

$$J_1 = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} |x_c(n)|^2}{\sum_{n=0}^{N-1} |x_m(n)|^2}, \quad (5.4)$$

ya que este último da una noción de cuantas veces es más grande la energía de la señal caótica comparada con la energía del mensaje. Es fácil determinar de la ecuación (5.4) que un valor alto de  $J_1$  indica un buen encriptado, es decir,

$$J_1 \gg 1 \quad \rightarrow \quad \text{Buen encriptado.}$$

Emplear un criterio como el descrito, abre la posibilidad de encriptamiento caótico usando una variable de estado diferente a la primera, aprovechando así, de manera más eficiente, el potencial que brinda tener diferentes modalidades de osciladores con atractores que presentan múltiples enrollamientos.

En la figura (5.1) se muestran los valores de energía de los tres estados del oscilador de Chua generalizado para diferente número de enrollamientos. Se puede observar que de acuerdo al criterio de la ecuación (5.4), la variable de estado  $z$  es una mejor candidata que  $x$  para enmascarar el mensaje debido a la cantidad de energía. Es de particular importancia mencionar que una hipótesis inicial se corrobora con estos resultados, ya que aumentar el número de enrollamientos del atractor impacta de manera directa en la energía de la señal caótica aunque se desconozca la proporción en que lo hace.

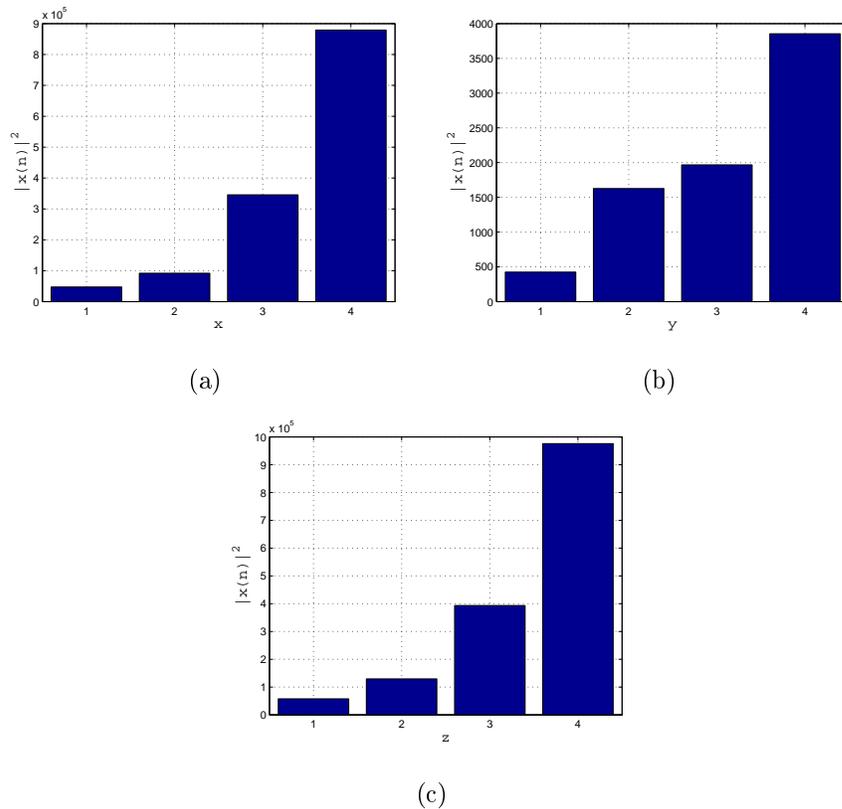


Figura 5.1: Niveles de energía del oscilador de Chua generalizado: (a) Energía del estado  $x$  para 3, 4, 5 y 7 enrollamientos respectivamente, (b) Energía del estado  $y$  para 3, 4, 5 y 7 enrollamientos respectivamente, (c) Energía del estado  $z$  para 3, 4, 5 y 7 enrollamientos respectivamente.

### 5.1.2. Criterio 2: Selección basada en el dominio de la frecuencia

A pesar de la ventaja que puede llegar a significar elegir la señal que ocultará el mensaje por el nivel de energía que presente, es conveniente conocer su ancho de banda, esto con el objetivo de garantizar un buen encriptado visto desde el dominio de la frecuencia, es decir, considerando al rango de frecuencias en que puede ubicar el espectro del mensaje que se desea encriptar. Esta idea es la que propició considerar la introducción del análisis en frecuencia y a continuación se describen algunos conceptos importantes para generar claridad al lector sobre el análisis frecuencial de señales.

El análisis en frecuencia sirve para representar señales periódicas y aperiódicas continuas y discretas en tiempo a través de las series de Fourier y la transformada

de Fourier respectivamente. Estas presentaciones implican la descomposición de las señales en función de componentes sinusoidales (o exponenciales complejas). Dichas presentaciones son llamadas **espectros** y proporcionan una identidad a la señal, en el sentido de que el mismo la define. Para el cálculo del espectro de una señal se centra la atención en las señales discretas en el tiempo de duración finita.

El análisis en frecuencia de una señal discreta en tiempo  $x(n)$  requiere de una representación en el dominio de la frecuencia, tal representación está dada por la transformada de Fourier  $X(\omega)$  de  $x(n)$ .  $X(\omega)$  es una función continua y periódica de la frecuencia, por tal motivo, se requiere muestrearla para obtener una representación adecuada. Sea  $X(k)$   $N$  muestras del espectro y  $x(n)$   $N$  muestras de la señal en el dominio del tiempo, la relación entre ambas está dada por:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.5)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.6)$$

Donde (5.5) es la Transformada de Fourier Discreta (*DFT Discrete Fourier Transform*) y (5.6) es la Transformada de Fourier Discreta Inversa (*IDFT*). Aprovechando las propiedades de simetría y periodicidad del factor de fase  $e^{-j2\pi/N}$  surgieron los algoritmos FFT [29], que es una manera más eficiente de calcular la transformada de Fourier discreta. A los lectores interesados en profundizar en el tema se recomienda [29] y [30].

### 5.1.2.1. Espectro de señales caóticas

A continuación se presentan las densidades espectrales de algunas modalidades de los osciladores descritos en el capítulo 3, obtenidos con el *toolbox* de MATLAB aplicando una frecuencia de muestreo  $F_s=44.1$  kHz.

Las figuras (5.2) y (5.3) muestran la densidad espectral de los tres estados del conjunto de ecuaciones 3.1 que describen el oscilador de Chua generalizado para 4 enrollamientos empleando los parámetros 3.4.

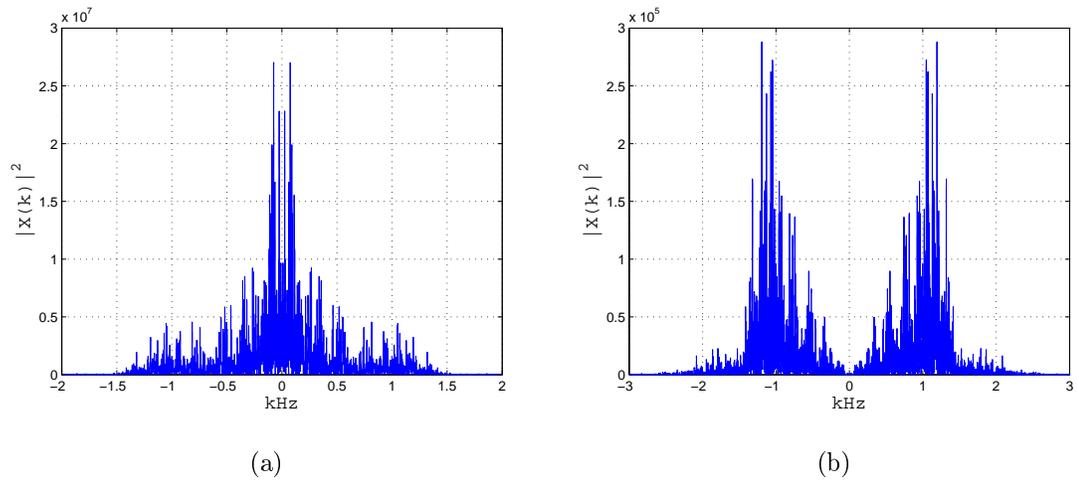


Figura 5.2: Densidad espectral: (a) estado  $x$ , (b) estado  $y$ .

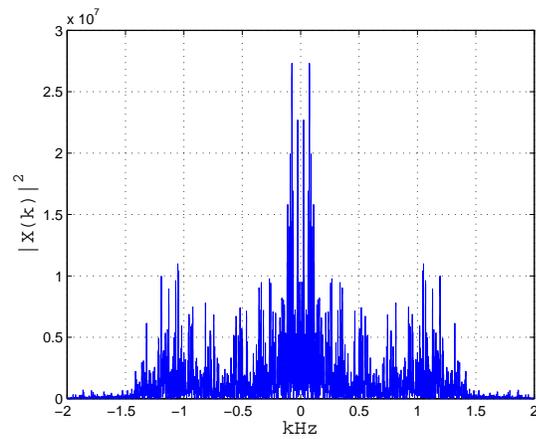


Figura 5.3: Densidad espectral estado  $z$ .

Las figuras (5.4) y (5.5) muestran la densidad espectral de las tres variables de estado del oscilador de Genesio & Tesi en 1-D de 10 enrollamientos.

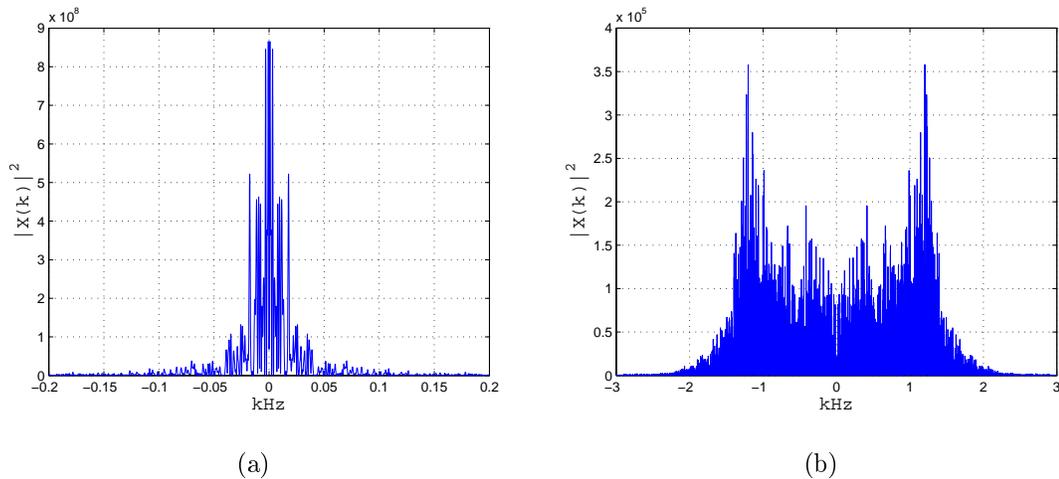


Figura 5.4: Densidad espectral: (a) estado  $x$ , (b) estado  $y$ .

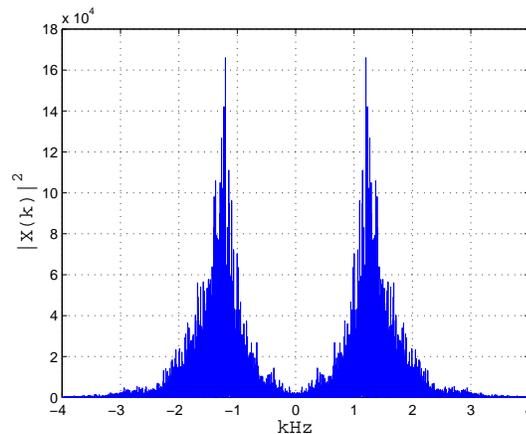


Figura 5.5: Densidad espectral estado  $z$ .

Es importante destacar de las figuras (5.2) - (5.5) que se aprecia de manera general la zona en la que se encuentra concentrada la mayor cantidad de energía de la señal, estas frecuencias son llamadas ancho de banda de la señal. La relación de la energía en los dominios del tiempo y la frecuencia está dada por el teorema de Parseval (5.7), que denota el principio de la conservación de la energía en los dominios del tiempo y de la frecuencia.

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2. \quad (5.7)$$

En particular, las señales se clasifican en el dominio de la frecuencia en señales de *baja*, *media* o *alta* frecuencia de acuerdo a la ubicación de su espectro.

Otro concepto relevante del análisis frecuencial de las señales es el **ancho de banda**, que se interpreta como el rango de frecuencias en el que se encuentra concentrada la mayor cantidad de potencia o energía de una señal y está dado en Hertz (Hz). El ancho de banda comprende todo el espectro de la señal hasta donde la magnitud decae 3 dB por debajo del valor inicial, o la reducción de la amplitud de la señal a menos del 70.7% de la amplitud original. La figura (5.6) muestra gráficamente este concepto.

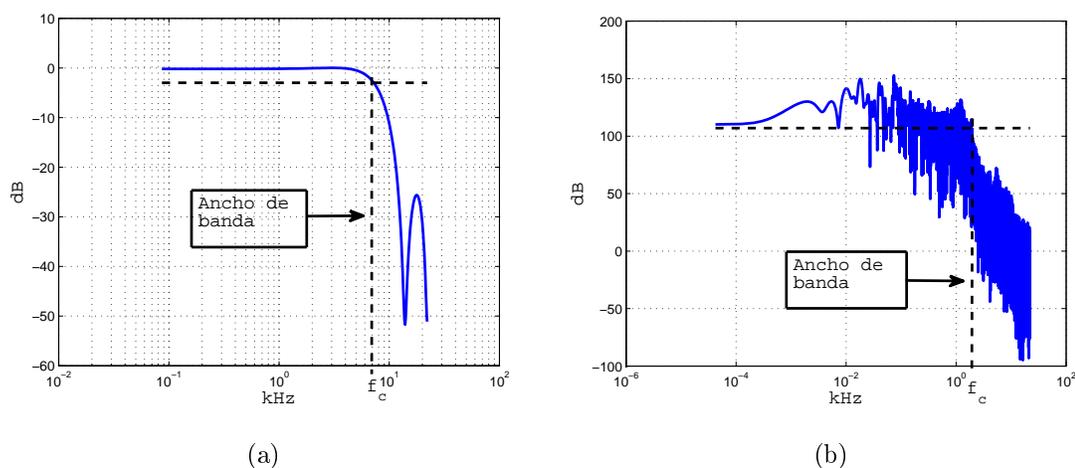


Figura 5.6: Ancho de banda: (a) Ejemplo simplificado, (b) Señal caótica.

La información presentada sobre el análisis frecuencial de señales permite concluir lo importante que es conocer la ubicación en frecuencia del mensaje a encriptar y de la señal que enmascara, con el propósito de realizar un encriptado que sea seguro en el dominio de la frecuencia; es importante aclarar que sólo se aplica al encriptado de audio. Bajo esta idea, se propone ponderar la energía de una señal caótica que enmascare el rango de frecuencias en que se encuentra el espectro de la voz humana, y emplear como función de ponderación una ventana rectangular que se asemeja a la respuesta frecuencial del oído humano para abarcar las frecuencias que son audibles.

De acuerdo con [31] la voz humana tiene un ancho de banda de aproximadamente 2700 Hz que va en promedio desde los 300 Hz hasta los 3000 Hz; por lo tanto, de manera ideal se busca usar una señal que enmascare ese rango de frecuencias para encriptar un mensaje de voz. La capacidad auditiva del hombre juega un papel importante en el reconocimiento de la señal, por tal motivo, la función de ponderación debe abarcar las frecuencias en las que se encuentra la voz y aquellas

que son mejor escuchadas por el hombre.

La respuesta frecuencial del oído humano presenta una tendencia a amplificar naturalmente las frecuencias que se encuentran entre 1 kHz - 4 kHz, es decir, requiere una ganancia menor para escuchar los sonidos presentes en este rango que la ganancia requerida para escuchar los sonidos que se encuentran fuera de él. Esto se puede observar en la figura (5.7) donde se muestra la amplificación necesaria para que distintas componentes frecuenciales puedan ser escuchadas por el oído humano.

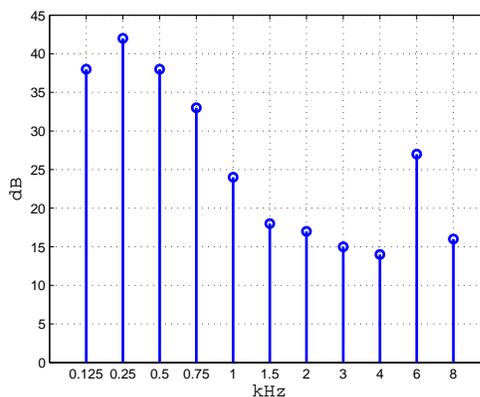


Figura 5.7: Respuesta frecuencial del oído humano con la ganancia en decibelios. Los resultados muestran el promedio de una audiometría de un grupo de personas con rango de edad de 20 a 40 años y que coincide con lo reportado en [32].

Visto desde el punto de vista en que se analizan las respuestas en frecuencia de los sistemas o los espectros de las señales, la respuesta frecuencial del oído se vería como en la figura (5.8) donde se puede observar que el rango de 1 kHz - 4 kHz es la banda de frecuencias que el oído capta mejor.

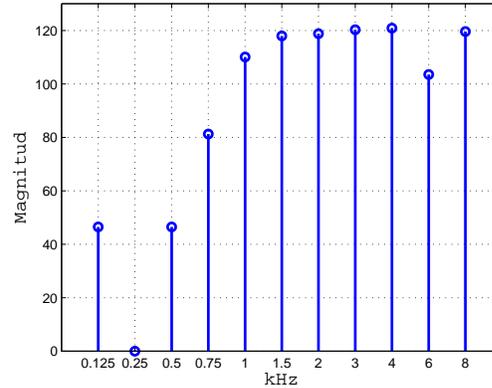


Figura 5.8: Respuesta frecuencial del oído vista como filtro pasa banda.

Por lo tanto, se usa una función de ponderación como la mostrada en la figura (5.9) para este caso particular, sin embargo de acuerdo a los requerimientos del mensaje esta última puede cambiar. Claramente puede verse que al multiplicar la función de ponderación por el espectro de la señal caótica, las frecuencias extremadamente bajas y las frecuencias que estén más allá de 8 kHz tendrán menor importancia que el rango de frecuencias de 0.12 kHz - 8 kHz. Esta idea se expresa matemáticamente en la ecuación (5.8), donde  $\alpha(n)$  es la función de ponderación en frecuencia,  $X_c(n)$  son los coeficientes de Fourier de la señal caótica y  $X_m(n)$  los coeficientes de Fourier del mensaje. Con esto se pretende proteger el mensaje encriptado de ser obtenido mediante técnicas de filtrado convencional.

$$J_2 = \frac{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha(k) |X_c(k)|^2}{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha(k) |X_m(k)|^2} \quad (5.8)$$

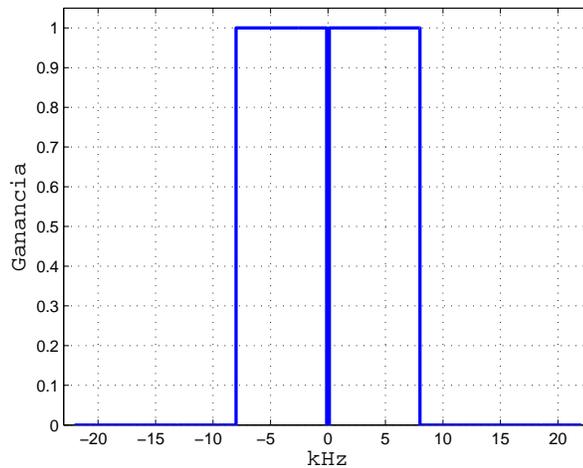


Figura 5.9: Función de ponderación basada en la respuesta frecuencial de oído.

Numerosos resultados de estudios realizados al comportamiento del oído humano han sido reportado, para el lector interesado se recomiendan [32]-[36], donde podrá encontrar información sobre respuesta y sensibilidad auditiva.

## 5.2. Resultados de simulaciones

En esta sección, se presentan los resultados de las simulaciones de encriptado caótico de audio empleando los dos criterios descritos en la sección anterior. En las tablas (5.1)-(5.3) se muestran los datos pertinentes de la variedad de señales caóticas que se pueden emplear, y que se obtuvieron de los modelos descritos en el capítulo 3 que son osciladores caóticos que presentan atractores con múltiples enrollamientos.

Oscilador de Chua generalizado							
# Enroll.	Edo.	$E_c \cdot 10^5$	$J_1^*$	E. P. $10^5$	$J_2^*$	A. B.	Atenuación
3	$x$	0.4748	34.4073	0.2007	14.5479	1.2589 kHz	1
	$y$	0.0042	0.3079	0.0042	0.3062	6.166 kHz	1/4
	$z$	0.5809	42.0996	0.3045	22.0709	1.8621 kHz	1
4	$x$	0.9184	66.5602	0.626	45.3684	1.052 kHz	1
	$y$	0.0163	1.1794	0.0162	1.1732	6.0256 kHz	1/2
	$z$	1.2959	93.9181	1.0025	72.6536	1.3183 kHz	1

5	$x$	3.4569	250.5372	0.8043	58.2916	0.182 kHz	1
	$y$	0.019	1.426	0.0194	1.4085	6.3096 kHz	1/2
	$z$	3.9339	285.1109	1.2787	92.6712	0.1778 kHz	1
7	$x$	8.7925	637.2294	1.9949	144.5793	0.01 kHz	1
	$y$	0.0385	2.793	0.0382	2.7702	2.3442 kHz	1/2
	$z$	9.7569	707.1312	3.0166	218.6288	0.0115 kHz	1

Tabla 5.1: Índices para selección de la señal más adecuada del oscilador de Chua generalizado. \*  $E_c$  Energía señal caótica, E. P. energía ponderada,  $J_1$  y  $J_2$  criterios definidos en las ecuaciones (5.4) y (5.8) respectivamente, A. B. ancho de banda.

Oscilador de Genesis & Tesi 1-D							
# Enroll.	Edo.	$E_c \cdot 10^5$	$J_1^*$	E. P. $10^5$	$J_2^*$	A. B.	Atenuación
4	$x$	0.51	36.9591	0.21676	15.7098	0.0004 kHz	1
	$y$	0.0329	2.3824	0.03229	2.3404	5.0119 kHz	1/2
	$z$	0.0111	0.8044	0.01107	0.8022	4.2658 kHz	1/4
5	$x$	2.4907	180.5158	0.20874	15.1286	0.0004 kHz	1
	$y$	0.0307	2.2222	0.0297	2.1522	6.3096 kHz	1/2
	$z$	0.0105	0.7588	0.01044	0.7563	4.5814 kHz	1/4
6	$x$	1.7444	126.4266	0.19926	14.4416	0.0003 kHz	1
	$y$	0.0284	2.0566	0.02739	1.9854	4.6774 kHz	1/2
	$z$	0.0099	0.7208	0.00991	0.7185	15.8489 kHz	1/5
7	$x$	1.6218	117.5413	0.17211	12.474	0.0004 kHz	1
	$y$	0.0258	1.8695	0.02484	1.8003	4.8978 kHz	1/2
	$z$	0.0092	0.6689	0.0092	0.6665	14.7911 kHz	1/5
8	$x$	2.6912	195.0455	0.17484	12.6717	0.006 kHz	1
	$y$	0.0255	1.845	0.0243	1.7611	5.2 kHz	1/2
	$z$	0.0093	0.6708	0.00922	0.6679	5.0119 kHz	1/4

10	$x$	2.8207	204.4256	0.18649	13.5159	0.0363 kHz	1
	$y$	0.0246	1.7822	0.02351	1.7042	4.4668 kHz	1/2
	$z$	0.0091	0.6583	0.00904	0.6555	5.0119 kHz	1/5

Tabla 5.2: Índices para selección de la señal más adecuada del oscilador de Genesis & Tesi 1-D. \*  $E_c$  Energía señal caótica, E. P. energía ponderada,  $J_1$  y  $J_2$  criterios definidos en las ecuaciones (5.4) y (5.8) respectivamente, A. B. ancho de banda.

Oscilador de Genesis & Tesi 3-D							
# Enroll.	Edo.	$E_c 10^5$	$J_1^*$	E. P. $10^5$	$J_2^*$	A. B.	Atenuación
$2 \times 2 \times 2$	$x$	0.516	37.3631	0.066	4.7817	0.001 kHz	1
	$y$	0.073	5.3233	0.0403	2.9181	0.0008 kHz	1
	$z$	0.098	7.0949	0.0308	2.2345	0.0009 kHz	1
$4 \times 2 \times 2$	$x$	5.552	402.389	0.0778	5.6369	0.0009 kHz	1
	$y$	0.072	5.2498	0.0402	2.916	0.0008 kHz	1
	$z$	0.082	5.9123	0.0354	2.5647	0.0008 kHz	1
$2 \times 5 \times 5$	$x$	11.899	862.3639	0.2306	16.7096	0.0005 kHz	1
	$y$	0.543	39.3244	0.1611	11.6753	1.9498 kHz	1
	$z$	1.153	84.5925	0.1474	10.6807	0.1175 kHz	1
$3 \times 6 \times 6$	$x$	645.89	46811	2.333	169.0815	0.0009 kHz	1
	$y$	7.62	552	1.6996	123.1779	0.0316 kHz	1
	$z$	16.87	1223	1.6118	116.8171	0.0251 kHz	1

Tabla 5.3: Índices para selección de la señal más adecuada del oscilador del Genesis & Tesi 3-D. \*  $E_c$  Energía señal caótica, E. P. energía ponderada,  $J_1$  y  $J_2$  criterios definidos en las ecuaciones (5.4) y (5.8) respectivamente, A. B. ancho de banda.

Se omitió la tabla que proporciona los índices para el oscilador de Genesio & Tesi 2-D con el objetivo de evitar confusión al lector debido a que particularmente, las trayectorias caóticas de esta modalidad de oscilador presentan intervalos de magnitudes muy pequeñas como se muestra en la figura (5.10), lo que provoca que el audio deba ser atenuado considerablemente si se quiere evitar la identificación de las palabras que coinciden con dichos intervalos.

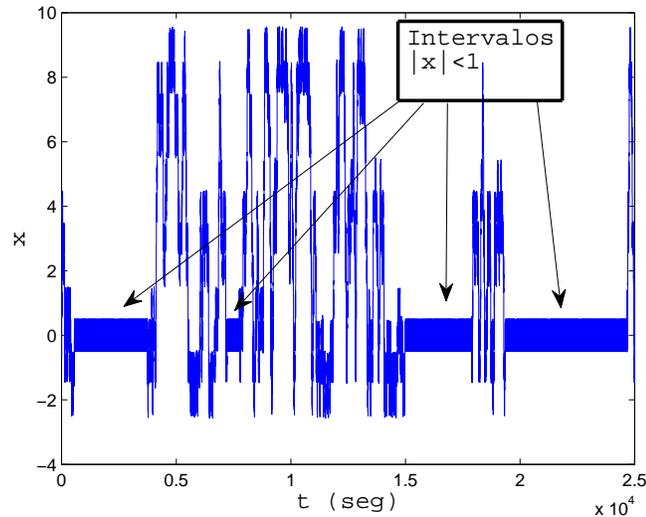


Figura 5.10: Estado  $x$  del oscilador de Genesio & Tesi 2-D que muestra intervalos de magnitud menor a 1.

En las tablas (5.1)-(5.3) se describe lo siguiente: En la tercer columna se proporciona la energía de cada variable de estado de las diferentes modalidades de atractores para los diferentes tipos de osciladores. La cuarta columna proporciona el cociente entre la energía de la señal caótica y energía de la señal de audio ( $1.3798 \times 10^3$ ). En la quinta columna se proporciona la energía de la señal caótica presente en el rango de frecuencias de 0.12 kHz - 8 kHz. La sexta columna es el cociente entre la energía de la señal caótica en el rango 0.12 kHz - 8 kHz y la señal del mensaje, la séptima columna proporciona el ancho de banda de la señal caótica. Finalmente, el factor de atenuación  $f > 0$  tal que  $fm(t)$  presentan un buen encryptado se proporciona en la octava columna.

De la tabla (5.1) se destaca lo siguiente: En la columna  $E_c$  se aprecia que para las diferentes modalidades de atractores del oscilador de Chua generalizado, la variable  $z$  es la que presenta la mayor cantidad de energía. En principio, esto refuerza

la intención de usar para encriptar una variable diferente a la primera. Las columnas  $J_1$  y  $J_2$  correspondientes a los criterios definidos sugieren la misma conclusión, ya que, presentan los índices más grandes para las tres variables en todas las modalidades de atractores. Aunque la variable  $y$  no es favorecida por la mayoría de los índices, presenta el ancho de banda más grande, hecho que la convierte en una candidata fuerte si se requiere encriptar un mensaje con una mayor riqueza frecuencia; también es importante mencionar que a medida que el número de enrollamientos aumenta, la atenuación requerida para asegurar buen encriptamiento disminuye debido a que la energía de la señal caótica aumenta al aumentar el número de enrollamientos.

De la tabla (5.2) podemos concluir que de acuerdo con los índices de las columnas  $E_c$ ,  $J_1$ , E. P.,  $J_2$  y atenuación, la variable  $x$  es la mejor candidata para encriptar ya que presenta los valores más altos en todas las modalidades de atractores, sin embargo, se destaca que las variables  $y$  y  $z$  presentan un ancho de banda más grande que el correspondiente ancho de banda de  $x$ , por lo tanto, no se descartan y se sugiere su uso cuando los requerimientos frecuenciales del mensaje sean más rigurosos y excedan la capacidad frecuenciale de  $x$ .

De la tabla (5.3) se destacan los índices de las columnas  $J_1$  y  $J_2$ , donde claramente puede verse que para  $J_1$  en su modalidad de  $5 \times 5 \times 5$  y  $3 \times 6 \times 6$  enrollamientos  $J_1 \gg 1$ , lo que de acuerdo con lo establecido previamente, implica un buen encriptado. Para la columna  $J_2$  puede observarse que la cantidad de energía presente en el rango de frecuencias de 0.12 kHz - 8 kHz, es suficientemente grande para que todos los valores sean mayores que 1, esto se ve reflejado directamente en la columna de atenuación, donde puede verse que no se requirió atenuar el mensaje.

En conclusión,  $J_1$  y  $J_2$  brindan una noción de la capacidad de encriptamiento que tienen una señal caótica, es decir, entre más grande el índice mejor encriptamiento; aquí,  $J_1$  considera la energía total de la señal, mientras que  $J_2$  la energía presente en un rango de frecuencias específico. Aunque es difícil definir una cota mínima, la atenuación requerida para un buen encriptado se relaciona directamente con  $J_1$  y  $J_2$ , en el sentido en que para valores grandes de los criterios, no se requiere atenuar el mensaje.

Antes de presentar los resultados del encriptamiento, se destaca la importancia que tiene considerar las características frecuenciales de la señal caótica tal que cubra los requerimientos del mensaje, esto con el único objetivo de elevar el nivel de seguridad del sistema de comunicación.

### 5.2.1. Caso de estudio: encriptamiento de voz

Como se describió en el capítulo 1, se realiza el encriptamiento aditivo empleando un sistema de comunicación de dos canales. En esta ocasión, se realiza la transmisión a través de una red de múltiples usuarios como se muestra en la figura (5.11), donde los sistemas caóticos presentes en el emisor y receptor pueden ser tanto un solo oscilador caótico como una red compleja.

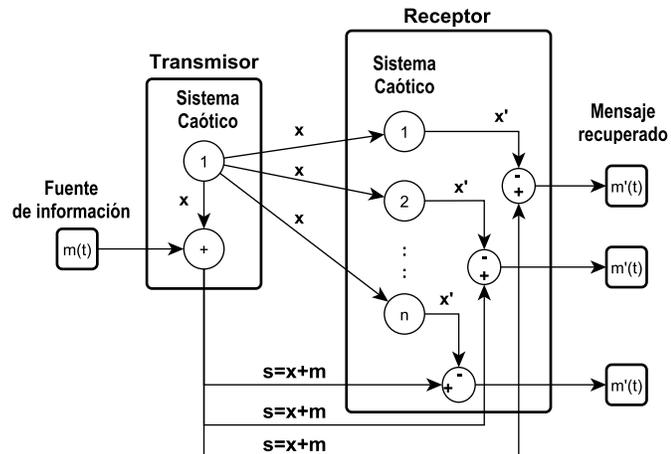


Figura 5.11: Sistema de comunicación multi-usuario.

#### 5.2.1.1. Encriptado

Primeramente, es de suma importancia conocer las frecuencias en las que se encuentra ubicada la mayor cantidad de energía del mensaje, es decir, determinar su densidad espectral para conocer el rango que debe abarcar la densidad espectral de la señal caótica. Con esto se pretende evitar que el mensaje sea recuperado a través de filtrado convencional, asegurando un encriptado correcto visto desde el dominio de la frecuencia.

En la figura (5.12) se ilustra esta idea, donde puede verse claramente que, la ubicación de la mayor parte de la densidad espectral de la señal caótica, así como la amplitud de la misma, juegan un papel crucial en el proceso de encriptado.

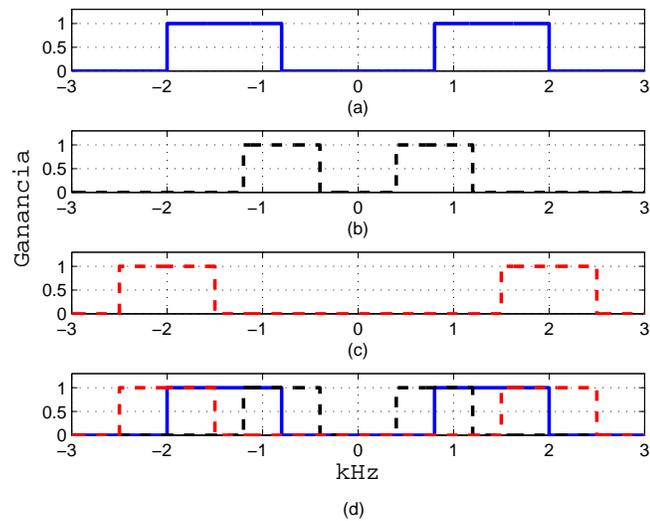


Figura 5.12: Ilustración de mal encriptamiento visto desde el dominio de la frecuencia. Densidad espectral: (a) señal caótica, (b) mensaje  $m_1(t)$ , (c) mensaje  $m_2(t)$ , (d) señal caótica +  $m_1(t)$  ó  $m_2(t)$ .

Es importante señalar de los datos proporcionados, la posibilidad de encriptar mensajes con un ancho de banda mucho mayor al que presentan los mensajes de voz, ya que como se vio en las tablas (5.1)-(5.3), al ancho de banda de las variables de estado, varía según el oscilador y la modalidad del atractor.

El contenido del mensaje de voz  $m(t)$  que se desea encriptar es: **Sincronización de redes complejas con atractores caóticos de múltiples enrollamientos: Aplicado al encriptado de datos** que corresponde al título de esta investigación. La figura (5.13) muestra la evolución temporal del mensaje, mientras que la figura (5.14) su densidad espectral.

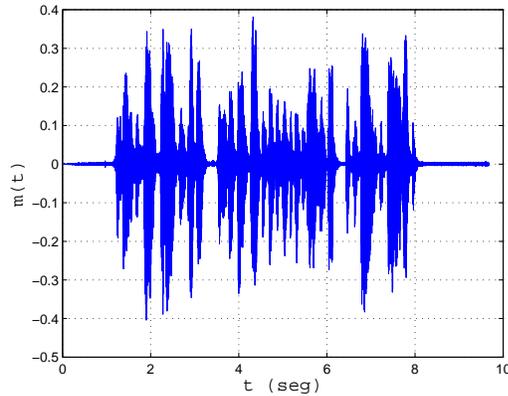


Figura 5.13: Evolución temporal del mensaje de voz que se desea encriptar.

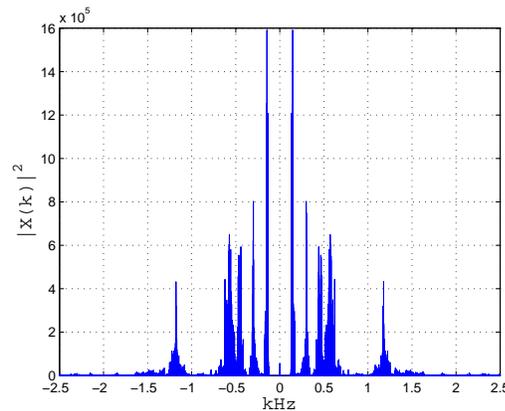


Figura 5.14: Densidad espectral de la señal de audio que se desea encriptar.

Como ya se mencionó, el propósito de considerar las características frecuenciales del mensaje, es elegir una señal caótica que cumpla con esos requerimientos para asegurar un buen encriptado.

Considere que el sistema caótico presente en el emisor del diagrama de la figura (5.11) es un oscilador de Genesio & Tesi 1-D, cuyas ecuaciones diferenciales están dadas por (3.12)-(3.14) y  $a = 0.8$  en su modalidad de 5 enrollamientos cuyo atractor y trayectorias al que convergen los sistemas caóticos presentes en el receptor se muestran en las figuras (5.15) y (5.16) respectivamente.

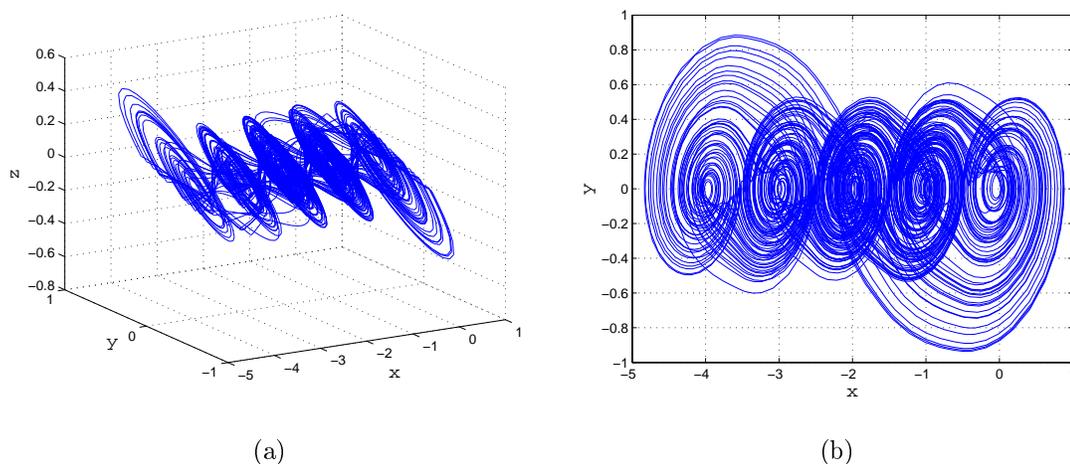


Figura 5.15: Atractor Genesis & Tesi 1-D de 5 enrollamientos: (a) Visión 3-D x-y-z, (b) Visión x-y.

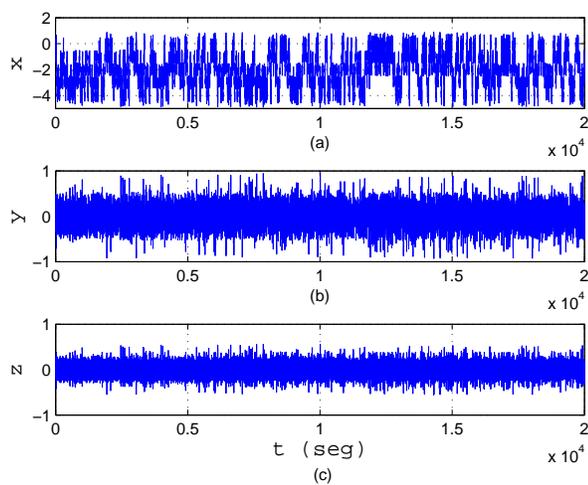


Figura 5.16: Evolución temporal de los estados Genesis & Tesi 1-D: (a) estado  $x$ , (b) estado  $y$  y (c) estado  $z$ .

En la figura (5.17) se muestra como sincronizan los estados de los sistemas caóticos presentes en los receptores a la dinámica del sistema caótico del emisor.

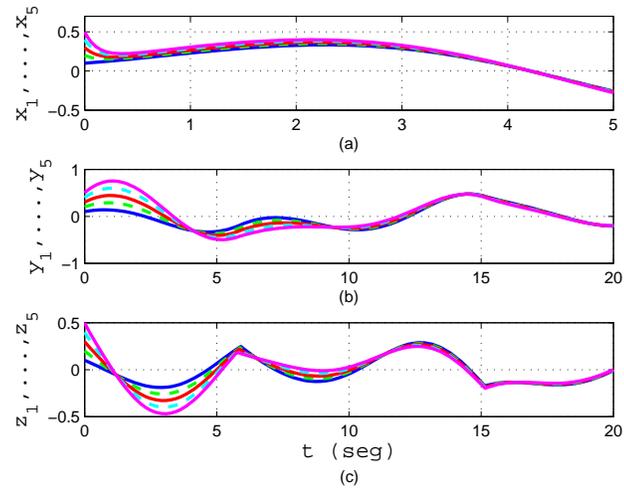


Figura 5.17: Evolución temporal de la sincronización de los estados Genesio & Tesi 1-D: (a) estados  $x$ , (b) estados  $y$  y (c) estados  $z$ .

Con propósitos ilustrativos, se elige encriptar el mensaje de voz (figura (5.13)) con la variable de estado  $y$  (figura (5.16)(b)) del oscilador de Genesio & Tesis 1-D. Se destaca primordialmente, el impacto que tiene la riqueza frecuencial de la señal que enmascara, en el número de veces que es necesario atenuar el audio para asegurar un encriptado confiable. La densidad espectral de la señal elegida para encriptar se muestra en la figura (5.18)(a), donde puede verse que abarca las frecuencias donde se encuentra la densidad espectral del audio, esto último se corrobora en la figura (5.18)(b), donde fácilmente puede verse que la densidad espectral del mensaje de voz queda cubierto con la densidad espectral de la señal caótica.

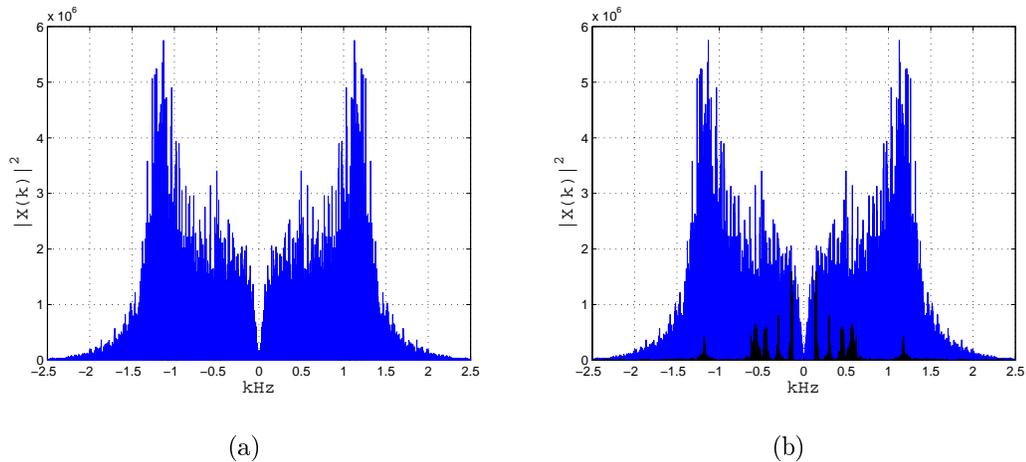


Figura 5.18: Densidades espectrales: (a) Densidad espectral estado  $y$  Genesio & Tesi 1-D 5 enrollamientos, (b) comparación de densidades espectrales señal caótica (azul) y señal de audio (negro).

Después de atenuar el audio con el factor proporcionado en la tabla (5.2), los resultados se muestran en la figura (5.19), donde (5.19)(a) muestra el mensaje de voz que se desea encriptar, (5.19)(b) es la señal  $s(t)$  la cual es enviada a través del segundo canal de transmisión con el mensaje encriptado, y finalmente, (5.19)(c) muestra el mensaje recuperado del lado del receptor.

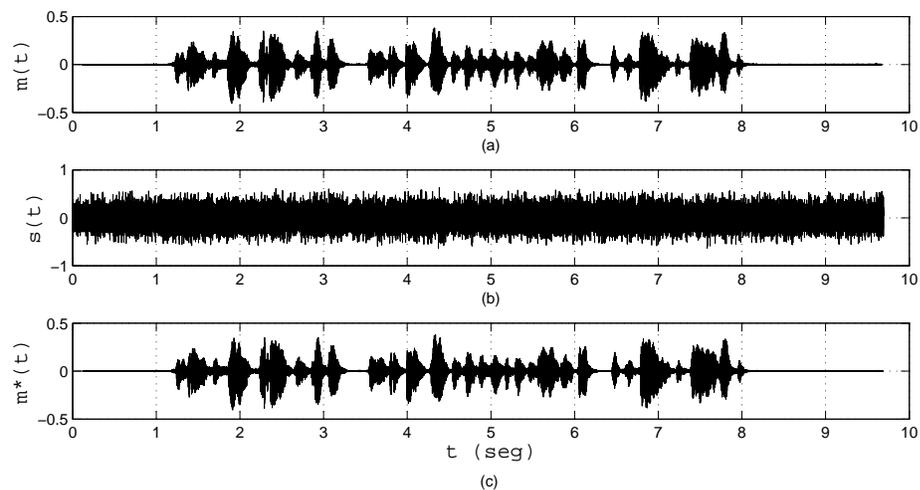


Figura 5.19: Señales del sistema de comunicación: (a) señal de audio que se encripta, (b) señal  $s(t)$  con el audio encriptado, (c) señal de audio recuperada.

A manera de contraejemplo y para reforzar la idea ilustrada en la figura (5.12),

se muestra como se encriptaría el mensaje de la figura (5.13) usando la variable  $z$  (figura (5.16)(c)). En la figura (5.20)(a) se proporciona el espectro de  $z$ , donde puede apreciarse que la falta de energía presente en las frecuencias bajas del mensaje, influye directamente en su atenuación, propiciado un factor más pequeño para disminuir la energía del audio. La figura (5.20)(b) muestra la comparación entre las densidades espectrales de la variable  $z$  y la señal de audio, donde claramente puede verse lo que sería un mal encriptado visto desde el dominio de la frecuencia.

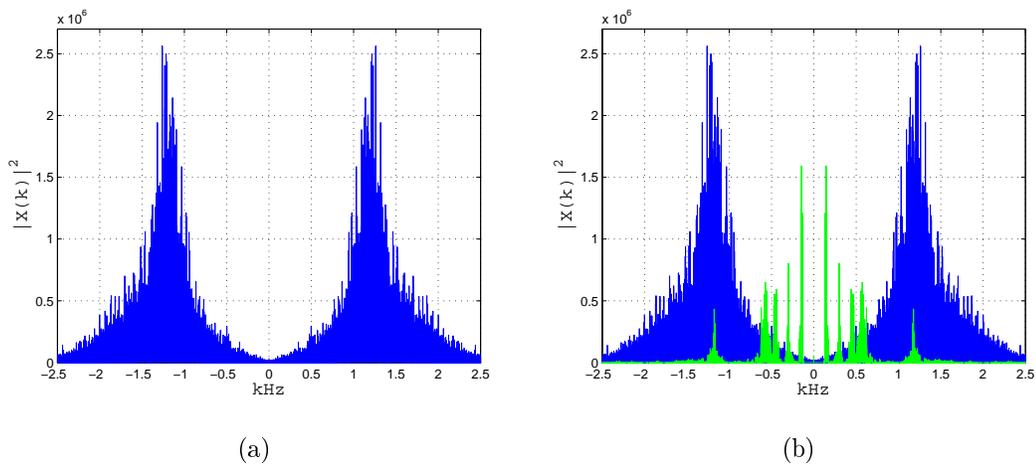


Figura 5.20: Densidades espectrales: (a) Densidad espectral estado  $z$  Genesis & Tesi 1-D 5 enrollamientos, (b) comparación de densidades espectrales señal caótica (azul) y señal de audio (verde).

Por último, en la figura (5.21) se muestra la densidad espectral que presenta el mensaje encriptado con la variable  $z$ , donde claramente puede verse que debido a la linealidad que existe en los dominios del tiempo y la frecuencia, es el cuadrado de la suma de las señales azul y negra de la figura (5.20)(b), y con esto, se reafirma la importancia que tiene conocer la ubicación de la densidad espectral del mensaje que se desea encriptar antes de elegir la señal que encripta.

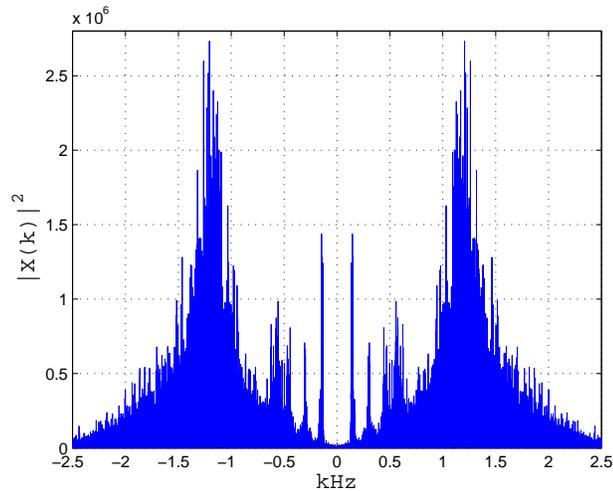


Figura 5.21: Mensaje de voz mal encriptado por la dinámica de la variable  $z$  del oscilador de Genesis & Tesi 1-D en su modalidad de 5 enrollamientos.

### 5.2.2. Encriptamiento de imagen

Para el encriptamientos de imagen se emplea la dinámica de la red de la figura (5.22), que es una red regular compuesta por osciladores de Genesis & Tesi 3-D en su modalidad de  $2 \times 2 \times 2$  enrollamientos descrito por (3.25)-(3.31) para valores de  $a = .8$ ,  $m_y = 0$ ,  $n_y = 1$ ,  $m_z = 0$ ,  $n_z = 1$  y  $k = 2$  en configuración bidireccional. El atractor que presenta la dinámica final de la red se muestra en la figura (5.23).

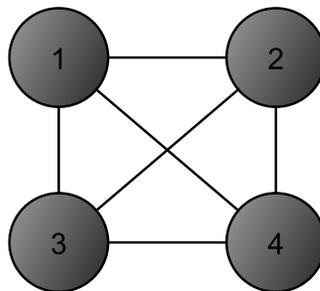


Figura 5.22: Red compleja regular compuesta de osciladores de Genesis & Tesi 3-D presente en el emisor del diagrama de comunicación figura (5.11).

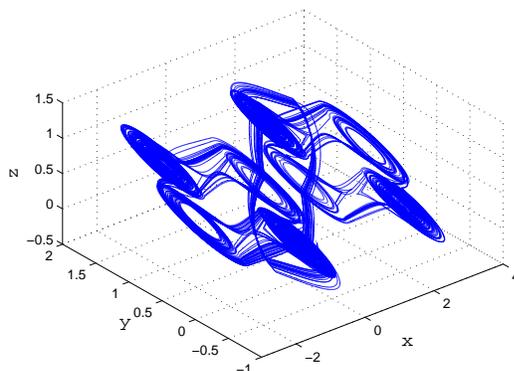


Figura 5.23: Atractor caótico de la red de la figura (5.22)  $2 \times 2 \times 2$  enrollamientos.

La figura (5.24) muestra los tres estados de cada oscilador y se aprecia que con el transcurso del tiempo estos sincronizan.

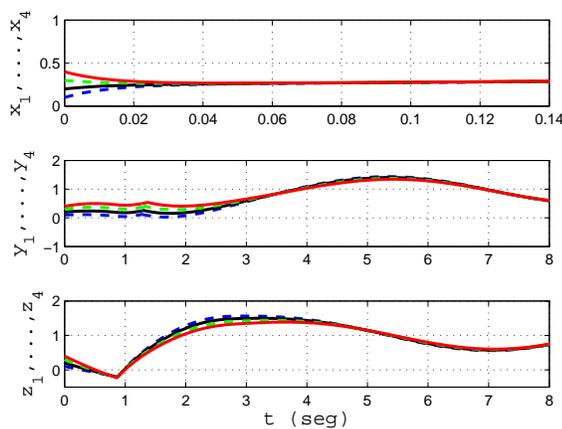


Figura 5.24: Evolución temporal de los estados de la red de la figura (5.22).

El mensaje que se desea encriptar es la imagen de la pintura de Fernando Botero llamada *Mona lisa a los doce años*, la cual se muestra en la figura (5.25), que es una imagen tipo RGB con formato de datos *Uint8* cuyo rango de valor para cada pixel es  $0 \leq P \leq 255$ .



Figura 5.25: Imagen a encriptar: *Mona lisa a los doce años* de Fernando Botero.

Debido al rango de valores que puede tomar cada pixel de una imagen en el formato mencionado, es necesario antes de realizar el encriptado, multiplicar el vector de datos de la imagen por un factor de atenuación, dicho factor es de 0.01. Una vez hecha la multiplicación, se realiza el encriptado aditivo y el resultado se muestra en la figura (5.26)(a) que es la imagen encriptada. En la figura (5.26)(b) se muestra la imagen que se recupera en el lado del receptor para cada uno de los usuarios.



(a)



(b)

Figura 5.26: (a) Imagen encriptada, (b) Imagen recuperada.

Por último, en la figura (5.27) se muestra la gráfica del error que existe entre el vector de la imagen original y el vector de datos de la imagen recuperada, aunque

parece ser un error de magnitud grande, el valor más grande es 11 que corresponde a un error de 4.3137 %.

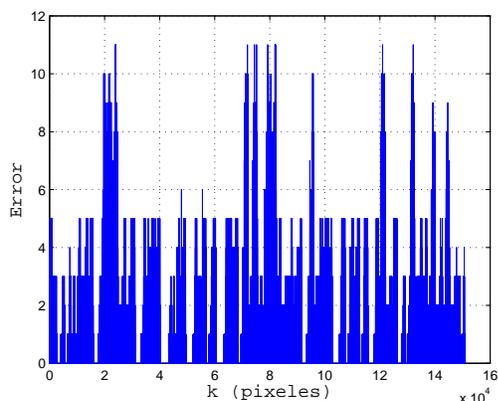


Figura 5.27: Gáfica del error de recuperación para el valor de RGB del pixel.

Con los resultados de estas simulaciones, se muestra que se puede aplicar el comportamiento colectivo de redes complejas constituidas por osciladores caóticos que presentan atractores con múltiples enrollamientos al cifrado de información. Se dejó ver que debido a que es posible sincronizar redes complejas de este tipo, el mensaje que se cifra puede ser recuperado de manera eficiente.

El encriptamiento caótico es una buena alternativa para el cifrado de información, donde puede elevarse el nivel de seguridad del mensaje encriptado si, como se sugirió, se consideran algunas características adicionales del mensaje y de la señal caótica.

Es importante mencionar que los índices proporcionados en este capítulo son generales y no locales, es decir, reflejan la calidad del encriptado en el intervalo de muestras elegido y carecen de capacidad para detectar malos encriptados en subintervalos del mismo.

Para finalizar este capítulo, sólo se destacan los datos proporcionados en las tablas (5.1)-(5.3), donde de cierta manera, se caracterizaron las variables de estado de diferentes osciladores que presentan varias modalidades en sus atractores, lo cual facilitó la elección (basada en datos) de la señal que se usaría para encriptar, y mostró las deficiencias de algunas otras variables.

# Capítulo 6

## Conclusiones

En este trabajo de investigación se llevó a cabo como principal objetivo, la sincronización de redes complejas constituidas por osciladores caóticos que presentan múltiples enrollamientos. Los modelos de osciladores caóticos con atractores de múltiples enrollamientos empleados fueron, el oscilador de Chua generalizado [1] y nueva familia de osciladores de n-enrollamientos [1, 2], estos últimos llamados a la largo de la investigación osciladores de Gensio & Tesi en 1,2,3-D debido a su origen.

Dicha sincronización se realizó sobre osciladores idénticos, empleando la técnica de control de la matriz de acoplamiento que fué descrita en el capítulo 4, y mediante la cual se sincronizaron redes complejas en topologías regulares e irregulares en los dos tipos de configuración.

La principal aplicación que se le dio a esta sincronización se mostró en el capítulo 5, donde se presentan los resultados de la simulación de un sistema de comunicación, aquí se empleo el encriptamiento aditivo para enmascarar un mensaje que se considera confidencial, y que se desea se transmita por un canal público de manera segura. Una vez transmitido, el mensaje debe ser recuperado de manera eficiente y con un mínimo de error, lo cual es posible gracias a que los sistemas caóticos del emisor y receptor sincronizan de manera completa. Los mensajes usados como confidenciales fueron: en audio, *Sincronización de redes complejas con atractores caóticos de múltiples enrollamientos: Aplicado al encriptado de datos* y una imagen de la pintura de Fernando Botero *Mona lisa a los doce años*.

Las aportaciones que deben destacarse de este trabajo son las siguientes:

- Sincronización completa de redes complejas constituidas por osciladores caóticos con atractores de múltiples enrollamientos.

- Análisis de estabilidad del sistema dinámico del error de sincronización entre cualquier par de osciladores de una red compleja de este tipo.
- La propuesta de dos criterios de selección de la señal caótica con base en sus características de energía y frecuencia.
- Caracterización de todas las variables de estado de los diferentes tipos de osciladores descritos en la tesis para diferentes modalidades del atractor (diferente número de enrollamientos).
- Se mostró la importancia que tiene la riqueza frecuencial de la señal caótica en el encriptado vista desde el dominio de la frecuencia.
- Encriptado caótico de audio e imagen empleando las dinámicas de redes complejas con atractores caóticos de múltiples enrollamientos, donde la selección de la señal que enmascara se realizó con base en sus características de energía y frecuencia.

## 6.1. Trabajos futuros

Como posibles trabajos futuros se proponen los siguientes:

- Sincronización de redes complejas constituidas por osciladores caóticos que presentan múltiples enrollamientos no idénticos.
- Modulación de la energía presente en las bajas frecuencias de las señales caóticas, para aprovecharla de manera mas eficiente al encriptar en una banda de frecuencia específica.
- Encriptamiento múltiple, es decir, enmascara más de un mensaje en una sola señal caótica en diferentes bandas de frecuencia.
- Emplear la metodología de encriptado caótico por conmutación entre atractores extraños, donde el número de enrollamientos del atractor es lo que se conmuta.
- Realizar un estudio de estabilidad ante perturbaciones de la sincronía de la red compleja.
- Encriptamiento caótico de video.

# Bibliografía

- [1] M. E. Yalçın, J. A. K. Suykens, and J. P. Vandewalle., *Cellular Neural Networks, Multi-Scroll Chaos and Synchronization*.
- [2] M. E. Yalçın, S. Ozoguz, J. A. K. Suykens, and J. Vandewalle, “n-scroll chaos generator: a simple circuit model.,” *Electronics Letters*., vol. 37(3), pp. 147–148., 2001.
- [3] S. C. Manrubia, A. S. Mikhailov, and D. H. Zanette., *Emergence of Dynamical Order: Synchronization Phenomena in Complex Systems*.
- [4] O. U. Color, *Diccionario Enciclopédico*.
- [5] A. Pikosvky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Science*.
- [6] F. Dachselt and W. Schwarz., “Chaos and cryptography.,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications*., vol. 48(12), 2001.
- [7] D. D. R. Stinson, *Cryptography: Theory and Practice*.
- [8] C. E. Shannon., “A mathematical theory of communication.,” *The bell system technical*, vol. 27, pp. 379–423, 623–656., 1948.
- [9] C. E. Shannon., “Communication theory of secrecy systems.,” *The bell system technical*, 1946.
- [10] W. Diffie and M. Hellman., “New directions in cryptography.,” *IEEE Transactions on Information Theory*., vol. 22(6), 1976.

- [11] A. Arellano-Delgado, R. López-Gutiérrez, C. Cruz-Hernández, C. Posadas-Castillo, L. C.-A. no, and H. Serrano-Guerrero., “Experimental network synchronization via plastic optical fiber.,” *Optical Fiber Technology.*, 2012.
- [12] H. Serrano-Guerrero, C. Cruz-Hernández, R. M. López-Gutiérrez, C. Posadas-Castillo, and E. Inzunza-González., “Chaotic synchronization in star coupled networks of 3d cnns and its application in communications.,” *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation.*, vol. ISSN Number: 1565-1339. 11(8), pp. 571–580., 1997.
- [13] R. López-Gutiérrez, C. Posadas-Castillo, D. López-Mancilla, and C. Cruz-Hernández., “Communicating via robust synchronization of chaotic lasers.,” *Chaos, Solitons and Fractals.*, vol. 42, pp. 277–285., 2009.
- [14] W. Yu, J. Cao, K.-W. Wong, and J. Lü., “New communication schemes based on adaptive synchronization.,” *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2007.
- [15] Y. Feng, X. Yu, and L. Sun., “Synchronization of uncertain chaotic systems using a single transmission channel.,” *Chaos, Solitons & Fractals.*, vol. 35, pp. 755–762, 2008.
- [16] M. E. J. Newman, “The structure and function of complex networks.,”
- [17] W.-K. Chen., *Graph Theory and its Engineering Applications.*
- [18] D. Narsingh., *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science.*
- [19] M. Newman, A.-L. Barabási, and D. J. Watts., *The structure and Dynamics of Networks.*
- [20] S. Boccaletti, V. Latorab, M. C. Y. Morenod, and D. U. Hwang., “Complex networks: Structure and dynamics.,” *Physics Reports.*, vol. 424, pp. 175–308., 2006.
- [21] X. F. Wang, “Complex networks: Topology, dynamics and synchronization.,” *International Journal of Bifurcation and Chaos.*, vol. 12(5), pp. 885–916, 2008.

- [22] C. Posadas-Castillo, C. Cruz-Hernández, and R. M. López-Gutiérrez, “Synchronization of chaotic neural networks with delay in irregular networks,” *Applied Mathematics and Computation.*, vol. 205, Elsevier Editorial. ISSN: 0096-3003. doi: 10.1016/j.amc.2008.08.015., pp. 487–496., 2008.
- [23] M. Götz, U. Feldmann, and W. Schwarz., “Synthesis of higher dimensional chua circuits,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications.*, vol. 40(11), 1993.
- [24] J. A. K. suykens and J. P. L. Vandewalle., “Quasilinear approach to nonlinear systems and the design of n-doble scroll (n=1,2,3...),” *IEE proceeding.*, vol. 138(5), 1991.
- [25] C. Posadas-Castillo, C. Cruz-Hernández, R. López-Gutiérrez, and A. Loya-Cabrera, “Sincronización de redes complejas.”
- [26] S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D. L. Valladares, and C. S. Zhou., “The synchronization of chaotic systems,” *Physics Reports.*, vol. 366, pp. 1–101., 2002.
- [27] X. F. Wang and G. Chen., “Synchronization in small-world dynamical networks,” *International Journal of Bifurcation and Chaos.*, vol. 12(1), pp. 187–1927, 2002.
- [28] H. K. Khalil., *Nonlinear systems.*
- [29] J. G. Proakis and D. G. Manolakis., *Tratamiento Digital de Señales.*
- [30] M. J. Roberts., *Señales y Sistemas: Análisis mediante métodos de transformada y MATLAB.*
- [31] W. Tomasi., *Sistemas de Comunicaciones Electrónicas.*
- [32] R. L. Wegel and C. E. Lane., “The auditory masking of one pure tone by another and its probable relation to the dynamics of the inner ear,” *Proc. Nat. Acad. Sci y Bell System Tech. J.*, 1992.
- [33] A. L. Pittman, P. G. Stelmachowicz, D. E. Lewis, and B. M. Hoover., “Spectral characteristics of speech at the ear: Implications for amplification in children,” *Journal of Speech, Language, and Hearing Research.*, vol. 46, pp. 649–657, 2003.

- [34] P. Dallos., “The active cochlea.,” *The journal of neuroscience.*, vol. 12(12), pp. 4575–4585, 1992.
- [35] L. E. Cornelisse, L.-P. Gagne, and R. C. Seewald., “long-term average speech spectrum at the chest-level microphone location.,” *JSLPA.*, vol. 15(3), 1991.
- [36] G. A. Manley., “Frequency response of the middle ear of geckos.,” *J. comp. Physiol.*, vol. 81, pp. 251–258, 1972.