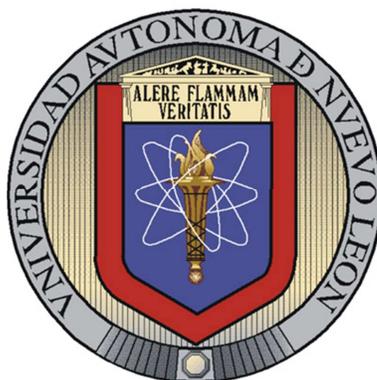


UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMATICAS
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



ESTUDIO DE LAS PROPIEDADES FÍSICAS DEL MESÓN ESCALAR SIGMA EN

EL VACÍO Y EN EL MEDIO NUCLEAR

POR

MÓNICA DEL CARMEN MENCHACA MACIEL

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN INGENIERIA FÍSICA INDUSTRIAL

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, N.L. ABRIL DE 2013

Estudio de las propiedades del mesón escalar sigma en el vacío y en el medio nuclear

Aprobación de tesis:

Dr. José Rubén Morones Ibarra
Director de Tesis

Dr. Max Salvador Hernández
Secretario

Dr. Manuel García Méndez
Miembro Sinodal

Dr. Edgar Martínez Guerra
Miembro Sinodal

Dr. Sergio Javier Mejía Rosales
Miembro Sinodal

RESUMEN

ESTUDIO DE LAS PROPIEDADES DEL MESÓN ESCALAR SIGMA EN EL VACÍO Y EN EL MEDIO NUCLEAR

Por Mónica del Carmen Menchaca Maciel

Esta tesis no sólo está enfocada al estudio del mesón sigma en el vacío y en el medio nuclear, sino que propone un método alternativo para la determinación de tres parámetros del mesón sigma: la masa, el ancho y la constante de interacción del mesón con los piones. Con el fin de evitar errores de tipo “Post hoc”, los parámetros serán calculados sin la necesidad de fijar un valor previo para la masa y ancho del mesón sigma o la constante de acoplamiento entre el mesón sigma y los piones.

Se demostrará que el uso del ancho crítico, sujeto a ciertas condiciones, limita el número posible de soluciones para éstos parámetros, los cuales se calcularán bajo el supuesto de que el mesón sigma se acopla en el vacío con un par de piones virtuales. Compararemos nuestros resultados con otros resultados, teóricos y experimentales, para conocer el alcance y la validez de los valores obtenidos.

Una vez calculados los valores posibles de los parámetros, la propagación del mesón sigma en la materia nuclear se estudia en el modelo de Walecka, bajo la hipótesis de que el mesón sigma se acopla a través de la producción de pares partícula-hoyo, el acoplamiento con el mar de Dirac y el efecto de la mezcla sigma-omega. En este cálculo

también se considerará el acoplamiento del mesón sigma con los dos piones virtuales, interacción que originalmente no contempla el modelo de Walecaka.

En este trabajo compararemos los resultados obtenidos al utilizar dos definiciones para la masa y el ancho del mesón sigma. En primera instancia se utilizará el concepto de la función espectral donde la masa física del mesón se define como la magnitud del cuadrimomentum $|k|$ para el cuál la función espectral obtiene su máximo valor y el ancho es tomado a la mitad del máximo de dicha función. En segundo lugar, utilizaremos la definición de la masa y ancho de Breit-Wigner, donde la masa se define como el cero de la parte real del propagador inverso y el ancho como $\Gamma_\sigma = -\text{Im}\Sigma(m_\sigma)/m_\sigma$.

RECONOCIMIENTO

Mi equipo medular

Sin duda fue, mi hermana, Cristina Lorena Guadalupe Menchaca Maciel la que me ayudó a llegar hasta este momento, fue la primera en apoyarme en los momentos difíciles. Ella me legó las habilidades de disciplina, entrega y crítica constructiva.

El Doctor José Rubén Morones Ibarra fue quien tuvo fe en este trabajo, dándome la oportunidad de darlo a conocer.

Mi equipo de lluvia de ideas

El Doctor Sergio Javier Mejía Rosales quien me enseñó que la obviedad no es parte del quehacer científico. Gracias Doctor, porque sin sus consejos y rápidas respuestas esta tesis nunca sería lo que es.

El Doctor Max Salvador Hernández quien fue el primero en aceptar mi trabajo, animándome a exponer y defender lo expuesto en esta tesis.

El Doctor Manuel García Méndez quien fue, sin saberlo, uno de los mejores maestros que tuve durante mis estudios doctorales. Durante cuatro años me animó y siempre compartía con una sonrisa sus conocimientos y opiniones. Gracias Doctor, porque hubo tiempos difíciles y desánimos que usted logró disipar.

El Doctor Edgar Martínez Guerra quien en mi pre-defensa me mostró que nunca debo conformarme y que siempre hay algo más que puedo aportar. También le quiero agradecer el tiempo que nos dedicó, a los alumnos, cuando estuvo a cargo de los seminarios, donde nos obligó a dar a conocer nuestros trabajos a toda la comunidad del DIF. Sin saberlo, usted logró crear un ambiente más colaborativo entre los estudiantes.

Otros de mis colaboradores valiosos.

Existen unos cuantos amigos que fueron voluntaria o involuntariamente colaboradores para la formación de esta tesis y merecen una mención muy especial. Alfredo Menchaca, Diana Hernández, Ana Patricia Sánchez y Luis Milán. Cada uno de ellos dedicó gran cantidad de tiempo y esfuerzo a darme una retroalimentación como estudiante y como persona. Son y serán siempre parte de lo que soy y de lo que seré.

Mi tía Haydee Menchaca y sus hijos Elizabeth y Luis José quienes fueron a mi primera exposición en el doctorado, dándome ánimos y apoyándome en mi disertación. Mi tío Luis Menchaca que ha tenido fe en mis estudios.

DEDICATORIA

A mi hermana Cristina Menchaca, por darme un apoyo incondicional en todos mis proyectos.

A mis padres, Pilar Maciel y José Menchaca, por darme el regalo de la vida.

ÍNDICE

Estudio de las propiedades del mesón escalar sigma en el vacío y en el medio nuclear	i
RESUMEN	ii
RECONOCIMIENTO.....	iv
<i>Mi equipo medular.....</i>	<i>iv</i>
<i>Mi equipo de lluvia de ideas</i>	<i>iv</i>
<i>Otros de mis colaboradores valiosos.</i>	<i>v</i>
DEDICATORIA	vi
ÍNDICE.....	vii
INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO I.....	10
MARCO CONTEXTUAL	10
1.1 <i>Introducción</i>	<i>10</i>
1.2 <i>Clasificación de las partículas.....</i>	<i>12</i>
1.2.1 <i>Las fuerzas nucleares.....</i>	<i>12</i>
1.2.2 <i>Teoría de quarks</i>	<i>15</i>
1.3 <i>El mesón sigma.....</i>	<i>16</i>
1.3.1 <i>Antecedentes.....</i>	<i>16</i>
1.3.2 <i>Relevancia e implicaciones del mesón sigma en la física de partículas.....</i>	<i>18</i>
1.4 <i>Experimentos que han detectado al mesón sigma.....</i>	<i>28</i>
1.4.1 <i>Introducción</i>	<i>28</i>
1.4.2 <i>Resonancias</i>	<i>30</i>
1.4.3 <i>Diagrama de Dalitz.....</i>	<i>30</i>
1.4.4 <i>MINUIT, Function Minimization and Error Analysis</i>	<i>32</i>
1.4.5 <i>El Fermilab</i>	<i>33</i>
1.4.6 <i>Beijing Electron Positron Collider</i>	<i>34</i>
1.5 <i>Conclusiones del capítulo</i>	<i>36</i>
CAPÍTULO II.....	37
MARCO TEÓRICO	37
2.1 <i>Introducción</i>	<i>37</i>
2.2 <i>Formalismo.....</i>	<i>38</i>
2.2.1 <i>Unidades naturales.....</i>	<i>38</i>
2.2.2 <i>Lagrangianas de sistemas continuos</i>	<i>39</i>
2.2.3 <i>Campos clásicos relativistas.....</i>	<i>39</i>
2.2.4 <i>Teorema de Noether</i>	<i>40</i>

2.2.5	Densidad hamiltoniana.....	44
2.2.6	Cuantización de los campos.....	45
2.2.7	Simetrías y leyes de conservación	46
2.3	<i>Campo mesónico: Partículas de espín 0</i>	48
2.3.1	El campo mesónico neutro	48
2.3.2	Constantes de movimiento.....	50
2.3.3	Transformación Gauge	52
2.3.4	Solución general del campo mesónico	53
2.3.5	Momento asociado al campo mesónico neutro	54
2.3.6	Campo mesónico cargado	56
2.3.7	Evolución temporal de estados y operadores	58
2.3.8	Operadores de creación y aniquilación	60
2.3.9	Operadores de campo mesónico.....	61
2.3.10	Relaciones de conmutación covariantes.....	62
2.4	<i>Potencial de Yukawa</i>	66
2.4.1	Hamiltoniano de Interacción	66
2.4.2	Potencial de Yukawa.....	68
2.5	<i>Campo de Dirac: Partículas de espín ½</i>	71
2.5.1	Campo fermiónico	71
2.5.2	Operador energía	73
2.5.3	Momento lineal	75
2.5.4	Momento angular.....	76
2.5.5	Carga.....	77
2.5.6	Propagador del campo fermiónico	77
2.6	<i>Campo fotónico</i>	79
2.6.1	Lagrangiana de la Electrodinámica Cuántica (QED).....	79
2.6.2	Ecuaciones de campo	81
2.6.3	Propagador del fotón.....	83
2.7	<i>Matriz S</i>	83
2.7.1	Interacciones	84
2.7.2	Matriz S.....	84
2.7.3	Estados inicial y final.....	86
2.7.4	Unitariedad de la matriz S	86
2.8	<i>Diagramas de Feynman</i>	87
2.8.1	Líneas externas	87
2.8.2	Vértices.....	87
2.8.3	Reglas de Feynman	87
2.9	<i>Conclusiones del capítulo</i>	91
CAPÍTULO III.....		92
PROPIEDADES DEL MESÓN SIGMA EN EL VACÍO		92
3.1	<i>Introducción</i>	92
3.2	<i>Formalismo</i>	93
3.2.1	Partículas inestables	93
3.2.2	Propagador de una partícula inestable	96
3.2.3	Función dinámica T_r	98
3.2.4	Densidad de Breit-Wigner	100

3.2.5	Tasa de decaimiento en el proceso $\varphi \rightarrow \pi \pi$	101
3.2.6	Cuasi-partículas	104
3.2.7	Propagador del campo escalar	105
3.3	<i>Propagador del mesón sigma en el vacío</i>	107
3.3.1	Convenciones.....	109
3.3.2	Cálculo de la autoenergía para la interacción $\sigma\pi\pi$	110
3.4	<i>Cálculo de los observables del mesón sigma</i>	114
3.5	<i>Validación de los resultados con el formalismo de BW</i>	122
3.6	<i>Formalismo de la cuasi-partícula</i>	126
CAPÍTULO IV		128
PROPIEDADES DEL MESÓN SIGMA EN EL MEDIO NUCLEAR.....		128
4.1	<i>Introducción</i>	128
4.2	<i>Formalismo</i>	130
4.2.1	Modelo de Walecka	130
4.2.2	Las ecuaciones de movimiento del modelo de Walecka.....	132
4.2.3	Teoría del campo medio MFT.....	135
4.2.4	Propagador para el estado fundamental de un sistema de bariones.....	137
4.3	<i>Propagador del mesón sigma en el medio nuclear</i>	138
4.3.1	Mesones en el medio nuclear.....	138
4.3.2	Interacción con los nucleones	139
4.3.3	Mezcla sigma omega	139
4.4	<i>Resultados</i>	140
CONCLUSIONES.....		143
BIBLIOGRAFIA		144
GLOSARIO		147
ANEXO		151
	<i>Mecánica Cuántica relativista</i>	151
	<i>Espacio de Hilbert</i>	151
	<i>Notación de Dirac</i>	151
	<i>Producto interno</i>	151
	<i>Operadores y propiedades</i>	152

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, amplios programas multidisciplinarios, de física hadrónica, atómica y nuclear, se han creado en torno al estudio de la materia en condiciones extremas de temperatura, presión y densidad. Estos programas científicos se han propuesto contestar preguntas fundamentales en tópicos tales como: la física de colisiones de iones pesados, las condiciones en los inicios del universo y la física de los procesos en la evolución estelar, entre otros [1]-[5].

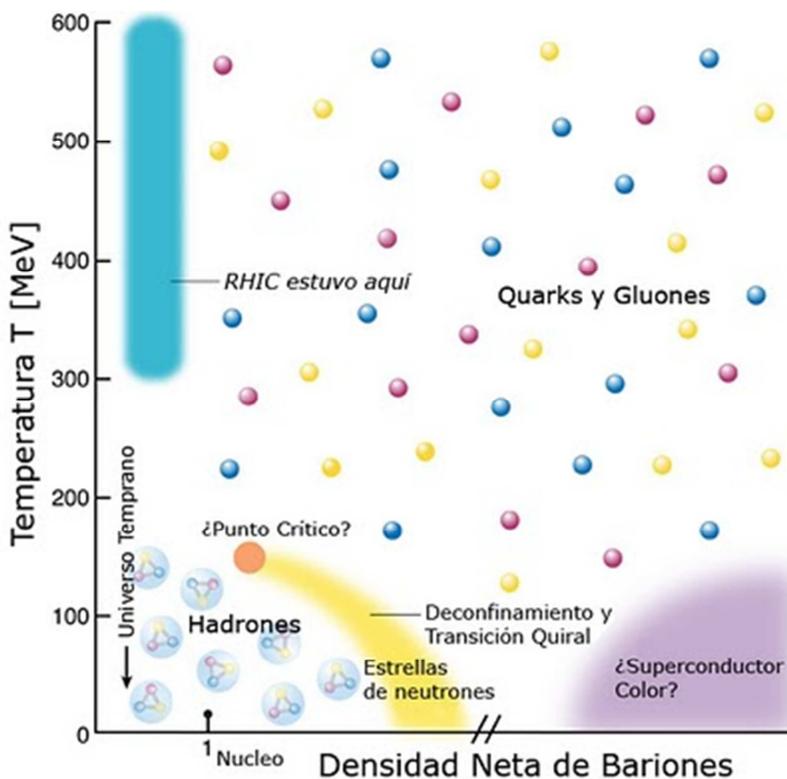


Figura Int 1 Diagrama de fase de QCD (Cromodinámica Cuántica) con una posible línea crítica: Una transición de fase de primer orden terminando en un extremo crítico. La región de temperatura deducida por la colaboración PHENIX aparece en azul¹. Ilustración: Carin Cain.

¹ Investigadores del Colisionador de Iones Pesados Relativísticos (RHIC) han medido la temperatura de la materia densa caliente creada en una colisión nuclear. Tomado de <http://universoalavista.blogspot.mx/2010/03/tomando-la-temperatura-de-la-materia.html>. Autor: Charles Gale, Profesor James McGill y Presidente del Departamento de Física de la Universidad McGill.

Experimentos en el LHC (Large Hadron Collider) del CERN generan grandes expectativas en el estudio de las propiedades de las masas de los hadrones en el seno de la materia hadrónica densa y caliente. En especial, la colaboración ALICE (A Large Ion Collider Experiment) puede llegar a ser uno de los experimentos más importantes para proveer información sobre la presencia y propiedades del estado de materia conocido como QGP (Quark-Gluon Plasma) [6]-[11].

El estudio de la propagación de los mesones en el medio nuclear es necesario para la explicación de los diferentes estados y condiciones de la materia nuclear. Proyectos experimentales como HADES (High Acceptance Di-Electron Spectrometer) [12]-[13], PANDA (Hadron Physics with Anti-Protons) [14], J-PARC E16 [15] y PHENIX [16]-[17], tienen como una de sus áreas de investigación la producción y estudio de los mesones ligeros y exóticos. Estos proyectos se han propuesto obtener información sobre el restablecimiento de la simetría quiral, la caracterización de la ecuación de estado de la materia nuclear, la estructura del núcleo atómico y el isoespín nuclear. A la par, físicos teóricos siguen haciendo predicciones, en espera de que las observaciones experimentales validen sus modelos [18]-[21].

La cromodinámica cuántica (QCD) es una teoría invariante local $SU(3)$ que estudia la estructura de los hadrones. Esta teoría puede utilizarse para describir la materia ligada por interacciones fuertes en el límite en el que el acoplamiento es débil y por tanto los métodos de cálculo perturbativo pueden ser utilizados. Los mesones no son considerados partículas simples, sino que son estudiados como objetos compuestos de combinaciones

quark-antiquark. Los quarks se mantienen unidos en pares mediante el intercambio de gluones. Para bajos momentos transferidos, las ecuaciones de la QCD son altamente difíciles de resolver debido a su estructura no lineal. Las predicciones hechas por esta teoría parecen ser verificadas cuando se trabaja a altas energías, sin embargo ha demostrado no ser concluyente a bajas energías [22]-[25].

El modelo NJL (Nambu Jona-Lasinio) es un modelo efectivo que es utilizado como un modelo fenomenológico de la QCD y ha tenido éxito en explicar la dinámica del rompimiento espontáneo y la restauración de la simetría quiral a altas densidades y temperaturas. El modelo NJL es anterior a la QCD y fue abandonado a mediados de los 70's debido a que no era renormalizable [26]-[27]. El resurgimiento de este modelo en los 80's es gracias a la reinterpretación del mismo, al relacionarlo con la QCD. El modelo se rediseñó para incorporar todas las simetrías globales de la QCD y se encuentra limitado a todos aquellos fenómenos hadrónicos que no dependan significativamente al mecanismo de confinamiento [28]-[29]. Cuando es necesario generar interacciones efectivas entre quarks, el modelo del intercambio de gluones es utilizado para evitar las divergencias en la determinación de la auto-energía de los quarks, masa de mesones y las constantes de acoplamiento[30]. Este modelo ha sido propuesto como una forma de implementar la propiedad de confinamiento que posee la QCD y que limita al modelo NJL. Del mismo modo, el estudio del fenómeno llamado “superconductividad de color” requiere el uso de modelos de quarks no locales tal como el modelo de líquido de instantones [31]. En este último modelo se supone que la solución de instantón representa la fluctuación estable dominante del campo de gluones. La interacción efectiva entre los quarks surge de la cuantización de los modos cero alrededor de dichas soluciones.

La Hadrodinámica Cuántica (QHD) es un marco de trabajo con densidades Lagrangianas locales basadas en grados de libertad hadrónicos [32]. Este marco de trabajo se encuentra restringido por las simetrías de la QCD [33]-[34]. La QHD ha logrado explicar satisfactoriamente la interacción entre nucleones en términos de intercambio de mesones. Existen muchos modelos basados en la QHD, todos estos modelos son consistentes con las simetrías fundamentales de la QCD [35] y se encuentran caracterizados por un número finito de masas y constantes de acoplamiento. Entre los modelos se encuentran el QHD-I, QHD-II y el QHD-III [34].

Uno de los modelos que ha probado ser efectivo, para la explicación de varios fenómenos observados en la materia nuclear, es el llamado QHD-I conocido también como el modelo de Walecka [36]-[40]. En este trabajo utilizamos el modelo de Walecka debido a que es una teoría cuántica relativista renormalizable que supone igualdad en la cantidad de protones y neutrones en el núcleo, y que éstos interactúan a través del intercambio de mesones escalares sigma y mesones vectoriales omega, donde los mesones sigma son los responsables de la fuerza atractiva, mientras que, los mesones omega son los responsables de la fuerza repulsiva [33],[41].

La colaboración BES en el Beijing Electron Positron Collider [42] y la colaboración E791 en el Fermilab [43] encontraron evidencia de la existencia del mesón sigma. Después de estos experimentos, la controversia se ha trasladado de la especulación sobre la existencia del mesón sigma hacia la estructura o dinámica del mismo.

El mesón sigma ha sido tratado como multipletes ($q\bar{q}q\bar{q}$), como un quark-antiquark ($q\bar{q}$) y como una resonancia de dos piones ($\pi\pi$) [44]-[49]. Esto significa que el mesón sigma ha podido ser incorporado a diferentes modelos que explican diferentes fenómenos que ocurren en el medio nuclear. Hasta el momento no hemos podido encontrar un modelo que explique toda la fenomenología de la física de partículas, por lo que cada modelo explica sólo una parte de la física de los procesos que ocurren a niveles subatómicos. Cada modelo se limita a las interacciones descritas por sus propias Lagrangianas, es decir, algunos modelos incorporan interacciones que otros modelos no toman en cuenta. Por ejemplo, el modelo sigma propuesto por Gell-Mann y Levy no contempla en sus cálculos la interacción de la partícula sigma con el mesón omega; para estudiar dicha interacción es necesario utilizar otro modelo, por ejemplo el modelo de Walecka. Por otro lado, el modelo de Walecka considera a la partícula sigma como una partícula simple y no contempla la interacción $\sigma\pi\pi$, y por tanto sería inútil usarlo en caso de querer estudiar el efecto del rompimiento de la simetría quiral en los nucleones. Sin embargo, podemos utilizar un modelo que incorpore a la partícula sigma como una partícula compuesta ($q\bar{q}$) y no simple, en cuyo caso usaríamos un modelo como el GCM (Global Color Symmetry Model), el cual incorpora un término de interacción pión-nucleón-sigma para la interacción entre quarks. Si nuestro propósito es explicar la fuerza nuclear fuerte es posible incorporar al mesón sigma como un estado de 4-quarks ($q\bar{q}q\bar{q}$) en el “Lattice QCD”. Por lo tanto, la elección del tratamiento del mesón sigma depende del modelo creado para la fenomenología que deseamos explicar.

El mesón sigma juega un papel fundamental en la comprensión del mecanismo de ruptura de la simetría quiral en la cromodinámica cuántica (QCD). El modelo σ lineal [50], el modelo quark relativista [44], el modelo PNJL (Nambu Jona-Lasinio) [51] y el modelo de Walecka [33],[49] , son utilizados para describir al mesón sigma. En el modelo sigma lineal, desarrollado por Gell-Mann y Levy, el mesón sigma juega un papel similar al bosón de Higgs en el modelo Estándar (Standard Electroweak Theory) [52],[53]. Las implicaciones y relevancia del mesón sigma en el modelo estándar han sido estudiadas por C.S. Lim [53]; Teiji Kunihiro ha disertado sobre su implicación en la QCD [54].

Una de las principales críticas hecha en el año 2000 en la Conferencia de la resonancia del mesón sigma, fue que el nombre $f_0(400-1200)$ del PDG (Particle Data Group) se ha utilizado como una entrada “basura” para la creación de picos y resonancias, las cuales se consideran cuestionables y poco entendibles [46]. La práctica común en el estudio del mesón sigma es el de fijar el valor de uno o varios de los parámetros del mesón para calcular algún otro parámetro (normalmente la constante de acoplamiento con los piones es calculada a través de la masa y ancho del mesón).

Nosotros creemos que es posible crear una formulación tal que los valores de dichos parámetros son restringidos, bajo la suposición de que el mesón sigma es la resonancia de dos piones y por tanto existe un número finito de soluciones para la masa, ancho y constante de interacción con los piones del mesón sigma.

Hacia una posible solución se encamina la siguiente propuesta, tomando como el **objeto de estudio** la propagación del mesón sigma en el vacío y el medio nuclear.

En correspondencia con el problema planteado, se formula como **objetivo general** demostrar que el mesón sigma es una resonancia de dos piones y que existen valores para los cuales la restauración parcial de la simetría quirial es obtenida en el medio nuclear.

Se plantea como **campo de acción** la utilización del concepto de ancho crítico de tal manera que sea compatible con el ancho de la formulación de Breit-Wigner así como la masa definida como el cero de la parte real del propagador inverso.

El alcance del trabajo es posible a partir de la siguiente **hipótesis**: si se introduce el uso del ancho crítico igualado al ancho parcial de Breit-Wigner, es posible encontrar los valores restringidos de la masa, ancho y constante de acoplamiento del mesón sigma al ser considerado como la resonancia de dos piones. De esta forma es posible encontrar los valores para los cuales la simetría quirial se restaura en el medio nuclear a una y dos veces su densidad normal nuclear.

Para la creación de este trabajo se desarrollaron las siguientes **tareas científicas**:

1. Búsqueda de información para la determinación del marco contextual.
2. Estudio de la teoría existente para el establecimiento del marco teórico.
3. Aplicación de métodos matemáticos para establecer el diagnóstico del objeto de la investigación.
4. Elaboración del modelo teórico que caracteriza el campo de acción de la investigación.

5. Aplicar el ancho crítico para el cálculo de los parámetros del mesón sigma en el vacío.
6. Comparación de los valores obtenidos con otros valores teóricos y experimentales reportados.
7. Uso de los parámetros encontrados para la caracterización de la propagación del mesón sigma en el medio nuclear a una y dos veces la densidad de la materia nuclear normal.

Los **métodos de investigación** que fueron empleados:

- Histórico: Para conocer el nacimiento, evolución y desarrollo del mesón sigma en el modelo sigma lineal con el fin de revelar su historia, las etapas principales de su desenvolvimiento y las conexiones con otros modelos.
- Modelación: Para establecer un modelo que permita obtener los parámetros principales del mesón sigma como una resonancia de dos piones.
- Hipotético-Deductivo: En el análisis del marco teórico y del problema para plantear la solución teórica del problema.

Programas informáticos (**software**) utilizados para realizar cálculos y gráficas:

- Wolfram Mathematica versión 6.0.0 con plataforma Microsoft Windows Vista (64-bit). Complementos: FeynCalc (Complemento de Mathematica para cálculos de Teoría Cuántica de Campos) <http://www.feyncalc.org/>.
- IBM SPSS versión 19 con plataforma Microsoft Windows Vista (64-bit).
- Microsoft Excel 2010.

Esta propuesta cuenta con 4 capítulos:

En el capítulo I se describe el estudio del objeto (marco contextual) que permite fundamentar la propuesta. Se caracteriza el objeto de estudio en su vínculo con lo que le rodea.

El capítulo II se refiere al marco teórico, es decir, las teorías existentes para establecer los fundamentos teóricos y metodológicos que permiten sustentar la hipótesis de la propuesta.

En el capítulo III se establece la propuesta en el vacío. Se da a conocer los resultados de la aplicación de la tesis en el vacío, utilizando el ancho crítico para la obtención de los parámetros del mesón sigma en el vacío.

En el capítulo IV se establece la propuesta en el medio nuclear. Se da a conocer los resultados de la aplicación de la tesis en el medio nuclear, aplicando los parámetros encontrados en el vacío. El estudio de la propagación del mesón sigma se realiza a una y dos veces la densidad normal de la materia simétrica nuclear.

CAPÍTULO I

MARCO CONTEXTUAL

1.1 Introducción

"Multiplícalo por el infinito, llévalo hasta el fin de la eternidad y a penas tendrás un atisbo de lo que hablo"
Joe Black.

En el documental “La revolución cuántica”, producido por la BBC, el Dr. Michio Kaku inicia contando una anécdota de cuando era estudiante, rememora el momento en que su maestro dice: “Hay un objeto tan minúsculo que nunca podremos llegar a verlo” y termina la anécdota con una frase sardónica: "Por suerte eso nunca me desanimó". Esta frase parece ser bastante contrastante con la frase pronunciada por Enrico Fermi: " ¡Si llego a adivinar esto, me hubiera dedicado a la botánica!²" [55]. Ambos científicos se refiere a una de las más misteriosas ramas de la física: La Física de Partículas.

La gestación de la física de partículas puede datarse desde el siglo XVI a. C., cuando el sabio pensador de origen fenicio Mosco de Sidón, concibe la idea de un universo formado por partículas fundamentales, esto es, partículas sin estructura interna [56]. Demócrito desarrolla en el siglo V a.C. la filosofía del atomismo, describiendo al átomo como un objeto eterno, indivisible, homogéneo e incomprensible. Se teorizaba la existencia de diferentes tipos de átomos y que éstos sólo variaban en su forma y tamaño. Por lo tanto, se concluía que las diferentes propiedades de la materia dependían de la forma de agrupación de dichos átomos [57].

² "Se sapevo così, mi davo alla *botanica!*"

La infancia de la física de partículas pudo haber llegado con el descubrimiento de los rayos catódicos y los estudios de las sustancias radiactivas. En 1886, El físico alemán Eugen Goldstein observa por primera vez una partícula de naturaleza desconocida: el protón [58]. La relación y masa del protón fue calculada en 1898 por el científico alemán Wilhelm Wein. Se le atribuye al físico J. J. Thomson el descubrimiento de esta partícula debido a que fue quien determinó su naturaleza, demostrando que el protón se hallaba en el núcleo del átomo (1919).

La tecnología avanzaba, los primeros aceleradores de partículas fueron construidos, y cada vez se fueron hallando más y más partículas subatómicas. En menos de 80 años, los físicos habían descubierto al menos 100 partículas nuevas. Los científicos empezaron a preguntarse si había algo mal, no podían explicarse la existencia de tantas partículas elementales que parecían no tener relación unas con otras [59]. La pregunta seguía en el aire, ¿sería posible encontrar un número limitado de objetos cuya unión pudiera explicar la conformación de la materia existente?

Se veía inminente la necesidad de encontrar una manera de catalogar las diferentes partículas. En un principio la masa de las partículas sería usada para su clasificación. Criterios de clasificación más elaborados dependerían del conocimiento de la mecánica cuántica y de las fuerzas nucleares. Dos científicos se volverían los “Mendeleev” de la física moderna, Murray Gell-Mann y Yuval Ne’eman crearían una forma de clasificación de las partículas a través de un análogo de la tabla periódica de los elementos químicos. De manera independiente el modelo de los quarks sería propuesto por Gell Mann y Zweig [60].

1.2 Clasificación de las partículas

“Todo son adivinanzas y la clave de una adivinanza es otra adivinanza”
Filósofo. Ralph Waldo Emerson.

Si bien es cierto que la física clásica sigue siendo válida en muchos campos de la ciencia, fue necesaria la reformulación de algunos de sus fundamentos debido a los descubrimientos realizados durante los últimos años del siglo XIX y las primeras décadas del siglo XX.

Científicos como: Thompson, Becquerel, Plank, Rutherford, Bohr, Heisenberg, etc, cambiaron el paradigma de la física clásica, dando nacimiento a la física moderna y creando los nuevos caminos para la transformación de nuestras ideas preconcebidas.

1.2.1 Las fuerzas nucleares

En 1911 los físicos sabían con certeza que existían dos fuerzas fundamentales:

1. La fuerza gravitatoria, postulada por Isaac Newton en su publicación: “Principios matemáticos de la filosofía natural³”.
2. La fuerza electromagnética, elegantemente descrita por James Clerk Maxwell en la obra: “A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field”.

³ Philosophiae naturalis principia mathematica.

Una primera clasificación de las partículas sería a través de sus masas: leptones, mesones y bariones. Serían análogas a los pesos del boxeo: peso mosca, peso medio y peso pesado, respectivamente.

En cuanto más experimentos y cálculos teóricos se realizaban se volvía evidente que algo faltaba. El modelo atómico de Rutherford contradecía abiertamente las leyes del electromagnetismo. La física cuántica estaba a punto de hacer su aparición.

El científico Hideki Yukawa pone en un frenesí a la comunidad científica. La predicción de la interacción fuerte puso a buscar a varios grupos experimentales las partículas denominadas piones, las cuales eran mediadoras de dicha interacción. En 1946 la búsqueda terminó con la aparición de los tres piones de Yukawa: π^- , π^0 y π^+ .

Durante la búsqueda de los piones, una inesperada partícula fue descubierta: el mesón⁴ μ . En 1936 Carl D. Anderson detecta la presencia del muón⁵, una partícula similar a las predichas por Yukawa con la diferencia de que no sentía la interacción fuerte.

Por otro lado, Fermi propuso su teoría del decaimiento beta en 1933, dando paso a la primera teoría para la comprensión de la interacción débil. En la década de los 60's la teoría electrodébil explica dicha interacción como un campo de Yang-Mills asociado a un grupo de gauge.

⁴ La palabra mesón proviene del que la masa de dicha partícula es intermedia entre la masa del electrón y protón.

⁵ El muon fue reclasificado como partícula elemental por lo que la denominación mesón fue abandonada.

Entonces se incorporan dos nuevas fuerzas fundamentales [61]:

3. La fuerza fuerte. Responsable de mantener a los protones y neutrones para formar el núcleo.
4. La fuerza débil. Controla las interacciones entre los núcleos atómicos y los neutrinos. Es responsable de los procesos de radiación

Antes de la existencia de la teoría de quarks, las partículas fueron clasificadas según el principio de exclusión de Pauli y el criterio del espín. Aquellas partículas que se encontraban sometidas al principio de exclusión de Pauli se denominaron fermiones y aquellas que presentaban espín entero y no cumplían el principio de exclusión de Pauli se les denominaron bosones.

Se les llamó hadrones a todas las partículas susceptibles a la interacción fuerte, englobando a los bariones y a los mesones. Mientras que aquellas partículas que no experimentan la interacción fuerte se les denominaron leptones, tal es el caso de los muones, electrones y neutrinos.

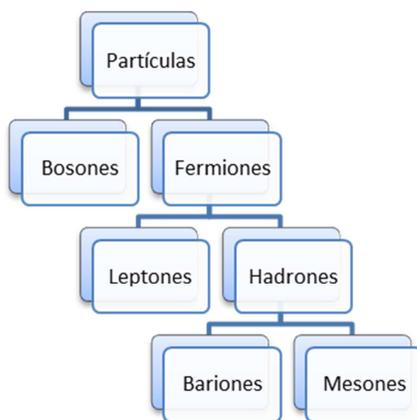


Figura 1.2-1 Clasificación básica de las partículas

1.2.2 Teoría de quarks

En 1963 dos mentes preclaras llegan a una teoría sobre como clasificar a los hadrones. Por separado, Murray Gell-Mann y Gorge Zewing llegan a la conclusión de que los hadrones no son partículas elementales. Gell-Mann bautiza a las partículas elementales que forman a los hadrones como quarks⁶ [62].

Los dos científicos proponen que los bariones están formados por tres quarks mientras que los mesones están formados por un par de quark-antiquark. Sería el Budismo quien diera el toque final a la clasificación. El camino óctuple de los quarks da los hermosos patrones conocidos de la simetría SU(3) [60].

	I	II	III	
masa →	3 MeV	1.24 GeV	172.5 GeV	0
carga →	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
spin →	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
nombre →	u up	c charm	t top	γ photon
	6 MeV	95 MeV	4.2 GeV	0
	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
Quarks	d down	s strange	b bottom	g gluon
	<2 eV	<0.19 MeV	<18.2 MeV	90.2 GeV ⁰
	0	0	0	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	ν_e electron neutrino	ν_μ muon neutrino	ν_τ tau neutrino	Z⁰ fuerza débil
	0.511 MeV	106 MeV	1.78 GeV	80.4 GeV
	-1	-1	-1	±1
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
Leptones	e electron	μ muon	τ tau	W[±] fuerza débil
				Bosons (Fuerzas)

Figura 1.2-2 Las Tres Generaciones de la Materia⁷.

⁶ La palabra proviene de la frase “Three quarks for Muster Mark” de la novela “Finnegan’s Wake” del escritor James Joyce.

⁷ Imagen tomada de <http://www.pruebayerror.net/gran-colisionador-de-hadrones/>

1.3 El mesón sigma

“El mesón σ es tal vez el mesón más importante en el libro”
Dr. Techn. Nils A. Törnqvist

Durante mucho tiempo el mesón sigma fue excluido de “La Biblia de la física de partículas”. En 1995 resucita y es incluido dentro del libro de partículas (“The Review of Particle Physics”) en la edición del año de 1996 [46]. Las ediciones impresas del PDG son las más citadas en el ámbito de las revistas científicas, debido a que esta publicación se dedica a recopilar y resumir todos los resultados publicados sobre las partículas.

1.3.1 Antecedentes

En 1960 M. Gell-Mann y M. Lévy introducen una partícula hipotética en su estudio llamado “The Axial Vector Current in Beta Decay”. Nace el mesón sigma en una teoría que sería conocida como el modelo sigma. El modelo nace restringido a la interacción entre nucleones, piones y la nueva partícula (el mesón escalar sigma) con la única intención de demostrar que la ecuación de conexión del estudio original se sostiene para diferentes modelos. Los autores llaman “bastante artificial” a su propio modelo, además advierten que no existe evidencia experimental alguna para la partícula postulada y por último afirman que, a menos de que el modelo propuesto pueda explicar todas las masas de forma consistente (al menos las masas de los bariones), el modelo no es satisfactorio del todo [50].

No es de extrañarse que el mesón sigma fuera rechazado por varios grupos teóricos, sin embargo algunos otros grupos comenzaron a preguntarse sobre los posibles alcances de este nuevo modelo. Preguntas sobre la composición y dinámica de la nueva partícula

comenzaron a hacerse. A. Scotti y D.Y. Wong asumen la existencia de la partícula sigma como una partícula simple en su estudio de 1965 [63]. En 1966 el mesón sigma es puesto a prueba para ver si cumple con la simetría SU(3) [64]. La controversia inicia, algunos estudios como el realizado por Earle L. Lomon [65] proponían la existencia del mesón sigma como la resonancia de dos piones, nuevas teorías ponen a prueba al mesón sigma como parte de multipletes ($qq\bar{q}\bar{q}$) y pares quark-antiquark ($q\bar{q}$). Resulta interesante que los diferentes tratamientos dados a este mesón no son mutuamente excluyentes, tal y como se señala en el estudio hecho por Faessler *et al* [44]. Dato curioso es el hecho de que la masa y ancho de Breit-Wigner parecen ser utilizados consistentemente sin importar la manera en que la naturaleza del mesón sigma sea tomada, ya sea que se defina como multipletes ($q\bar{q}q\bar{q}$), como un quark-antiquark ($q\bar{q}$) o como una resonancia de dos piones ($\pi\pi$) [66].

Tan buenas predicciones han logrado los modelos que incorporan a la partícula sigma, que aquellos detractores de la existencia de este mesón han hecho esfuerzos para demostrar que los modelos se sostienen sin la necesidad de la existencia del mesón sigma escalar, tal es el caso del estudio realizado por Hirokazu Tezuka en el año 2009 [67].

Sin importar que ocurra, es un hecho que el mesón sigma ya ha sido considerado como una de las partículas más importantes⁸ del PDG y continuará ofreciéndonos predicciones de interés para todos aquellos que deseamos conocer el entramado de las reacciones e interacciones entre partículas en el medio nuclear [46].

⁸ Conclusión de Nils A. Törnqvist en la conferencia de Japón: “A loved child has many names” (Ett kärt barn har manga namn). The σ certainly has many names.[46]

1.3.2 Relevancia e implicaciones del mesón sigma en la física de partículas

En la introducción de la tesis hemos hablado sobre la importancia de incorporar al mesón sigma en modelos que pretendan comprender o describir algunos fenómenos fundamentales de la QCD, algunos fenómenos mencionados fueron: la estructura de la simetría quiral, la interacción entre mesones y las fuerzas nucleares fuertes. También se ha dicho que, dependiendo del fenómeno de estudio, el mesón sigma puede ser tratado como quark-antiquark, multipletes o resonancia de dos piones.

En esta sección daremos a conocer algunas conclusiones, vertidas por diferentes autores, sobre las implicaciones de la incorporación de la partícula sigma en la QCD. Hemos hecho una breve discusión sobre los puntos más relevantes de sus estudios. La discusión no contienen las Lagrangianas de interacción ni la matemática expuesta por los investigadores, pero hacemos una explicación de cómo se llega a la conclusión mediante conceptos básicos de la QCD.

Es importante recordar que, en la física teórica las partículas son objetos matemáticos que deben cumplir las restricciones impuestas por el modelo que se desea utilizar. El no cumplimiento de los principios del modelo se considera una violación de la naturaleza del fenómeno que se está estudiando y por tanto la invalidación del modelo para explicar dicho fenómeno. Los modelos constantemente se están mejorando y las variaciones de ellos se debe precisamente a la incorporación de un nuevo objeto de estudio.

1.- Implicaciones del modelo sigma en el modelo estándar [53].

(a) *Relevancia del modelo sigma en la QCD.*

C.S. Lim pone a prueba el modelo sigma usando una Lagrangiana donde el mesón sigma es considerado una partícula compuesta por un quark-antiquark. El desarrollo matemático, de dicha Lagrangiana, predice (da como resultado) un rompimiento espontáneo de simetría por la presencia de un valor esperado en el vacío, el cual es equivalente a la constante de decaimiento del pión $f_{\pi}=93\text{MeV}$.

Ahora bien, la interpretación física del resultado es que el campo escalar del mesón sigma se ha roto espontáneamente mediante el mecanismo de Nambu-Goldstone y por las características y valores obtenidos, se debe deducir que los bosones de Nambu-Goldstone que han sido producidos deben ser piones. Debido a la matemática de la estructura de los piones, en el modelo usado por el autor, se debe concluir que los piones deben ser forzosamente compañeros quirales del mesón sigma. Esto implica que, en un proceso en que se producen piones debemos ser capaces de relacionar la producción de dichos piones con el mesón sigma.

Conclusión: el mesón sigma tratado como un par quark-antiquark en el modelo sigma (dentro del marco de la QCD) tiene un rol equivalente al bosón de Higgs en el modelo estándar.



Figura 1.3-1 Relevancia del modelo sigma en la QCD

(b) Relevancia del modelo sigma en el modelo estándar.

El autor describe al modelo sigma como un modelo en que los hadrones son descritos como estados ligados por lo que parecería que el modelo es poco relevante en procesos de interacción débil. A cortas distancias la matemática del modelo estándar es suficiente para describir los procesos de interacción débil entre quarks y leptones. Pero a grandes distancias es necesario incorporar la Lagrangiana del mesón sigma para sostener el mecanismo de confinamiento de las fuerzas de la QCD.

Debido a la interacción débil todos los fermiones, y en este caso los quarks, pueden cambiar de tipo; a este cambio se le denomina sabor. En particular el autor demuestra que en procesos que involucran hadrones formados de 3 sabores ligeros (u, s y d), el término cinético es en

realidad el mismo que se encuentra en el modelo GSM (Gauged Sigma Model).

También demuestra que el modelo sigma no lineal es relevante debido a que en el modelo estándar, los fermiones adquieren masa mediante los acoplamientos de Yukawa, los cuales se introducen a través de agregar nuevos términos en la Lagrangiana, pero la determinación de la masa del bosón de Higgs no explica directamente las masas fermiónicas, ya que dependen de las nuevas constantes y la masa de Higgs es un parámetro libre, esto puede ser sorteado al incorporar a la partícula sigma ya que tiene una masa dinámica del orden de 200MeV.

Conclusión: *la incorporación del modelo sigma en la QCD puede ser útil para sostener el mecanismo de confinamiento y explicar las masas fermiónicas.*

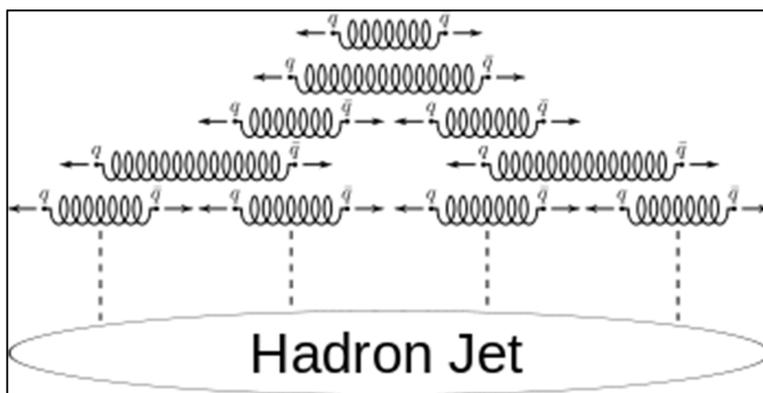


Figura 1.3-2 Representación del confinamiento. La elongación de los tubos de flujo de color asociado al campo gluónico puede llegar a un punto de ruptura llamado hadronización. La hadronización está ligada a la producción de mesones⁹.

⁹ Imagen tomada de http://es.wikipedia.org/wiki/Confinamiento_del_color.

2.- Importancia del mesón sigma en la QCD[54].

(a) $\langle (q\bar{q})^2 \rangle$, por lo tanto análogo a la partícula de Higgs en el modelo estándar. El mesón sigma es una fluctuación cuántica con parámetro de orden cuadrático.

La fluctuación cuántica es un cambio temporal en la cantidad de energía en un punto espacio-temporal y el valor esperado en el vacío se calcula en n-órdenes: $\langle 0 | q\bar{q} | 0 \rangle, \langle 0 | (q\bar{q})^2 | 0 \rangle, \langle 0 | (q\bar{q})^3 | 0 \rangle \dots$

Cuando el valor esperado en el vacío es no nulo, la simetría quiral de la Lagrangiana se rompe generando nuevos campos y por tanto la aparición de nuevas partículas. Como ya se ha mencionado, existen dos mecanismos por los cuales puede haber una ruptura de simetría quiral: el mecanismo de Nambu-Goldstone y el mecanismo de Higgs.

En el caso de la Lagrangiana del modelo estándar el rompimiento de simetría quiral ocurre en el término de orden cuadrático con un valor esperado en el vacío no nulo. En el modelo sigma el rompimiento de la simetría quiral tiene lugar en el término de orden cuadrático, que es el que corresponde al potencial de la Lagrangiana del modelo, con un valor esperado en el vacío que es equivalente a la constante de decaimiento del pión $f_\pi=93\text{MeV}$, cuyas implicaciones hemos comentado en el punto 1 (a)¹⁰.

¹⁰ El rompimiento de la simetría quiral en el modelo sigma lineal se desarrolla al final de esta sección y se encuentra marcado con el encabezado ***.

(b) *En análisis realizado mediante la matriz de ondas S en la dispersión $\pi-\pi$ ha revelado la existencia de un polo en el canal de σ . La relevancia de este estudio es que la incorporación del mesón sigma mantienen las simetrías quiral y de cruce, además de que se cumple con la condición de unitariedad.*

La matriz de dispersión S es un tipo de formalismo de la mecánica cuántica utilizado para calcular resultados en problemas de dispersión de ondas (partículas). La efectividad de este formalismo ha sido sobradamente probada.

El hecho de que el mesón sigma pueda ser incorporado en un estudio con la matriz S significa que no existe razón para su no existencia, es decir, el mesón sigma es una partícula que cumple con los requisitos para poder ser parte de un fenómeno de dispersión $\pi-\pi$.

(c) *La parte atractiva del potencial nuclear es atribuida a un intercambio de un mesón sigma.*

A distancias de 10^{-15} m, la fuerza nuclear se comporta como una fuerza atractiva, permitiendo que los protones se mantengan unidos. Por tanto el mesón sigma intervendría en ese proceso.

En el modelo de Walecka, los mesones sigma y omega proveen la fuerza atractiva a largas distancias y la fuerza repulsiva a cortas distancias respectivamente [68].

En el primer y segundo punto se discutió sobre las implicaciones del modelo sigma y la relevancia del mesón sigma en la QCD, los artículos fueron publicados entre los años 2000- 2001. Ahora discutiremos tres nuevas publicaciones sobre el tema y el tratamiento que se le da al mesón sigma.

3.- Efecto del mesón sigma en el decaimiento $D_1(2430) \rightarrow D\pi\pi$ [69].

Este estudio fue publicado a mediados del año 2012. Los autores construyen una Lagrangiana que preserve la simetría quiral y la simetría de quarks pesados. El mesón sigma es estudiado como una partícula compuesta y hacen un análisis tanto para una estructura de $q\bar{q}$ y $q\bar{q}q\bar{q}$. Fijan el valor de la masa de mesón sigma y la constante de acoplamiento de la interacción $\sigma\pi\pi$ con datos reportados por otros autores y se analiza mediante el canal 0 de isospín en la matriz de ondas S en la dispersión $\pi-\pi$. Concluyen que la tasa de decaimiento diferencial del mesón D se ve afectada dependiendo de la estructura del mesón sigma, pero no mencionan explícitamente cual tratamiento de la estructura del mesón sigma da mejores resultados.

4.- De la medición y naturaleza del mesón sigma [71].

En este estudio utilizan la teoría quiral de perturbaciones unitarias para tratar de conocer la masa, ancho y estructura del mesón sigma. Concluyen que el mesón sigma no puede ser calificado como un quark-antiquark o glueballs, pero es compatible con la estructura de un estado de 4-quarks. También especulan con la idea de que el mesón sigma posiblemente deba ser catalogada como una molécula. Encuentran su masa de $458 \pm 14 \text{ MeV}$ y $\Gamma/2 = 238 \pm 10 \text{ MeV}$.

5.- Fenomenología del mesón en el vacío con el modelo sigma lineal en 3-sabores con mesones vectorial (-axial).

Estudio publicando en el 2013. Estudian los mesones escalar, vectorial y axial-vectorial. Calculan sus masas, anchos de decaimiento y amplitudes de decaimiento. Encuentran que el mesón escalar tiene una resonancia superior a 1 GeV. Concluyen que el mesón puede ser: una cuasi-molécula de dos piones o una molécula de dos kaones, o bien, un estado de cuatro quarks. También propone estudios que podrían realizarse de ser cualquiera de los 3 estados descritos en su conclusión, el más novedoso sería el estudio de la partícula mediante la aproximación holográfica.

Debido a que en los inicios de mi estudio, de la obtención de la constante de acoplamiento entre el mesón sigma y los piones, me vi involucrada en cálculos usando el potencial definido en la Lagrangiana del modelo sigma lineal, hemos decidido incluir en esta sección la parte donde ocurre el rompimiento de la simetría quiral. Debemos notar que el término que se involucra es precisamente el parámetro de orden cuadrático del campo escalar sigma. Como mis estudios del mesón son como partícula no compuesta, el desarrollo del potencial utiliza el campo escalar σ y no es cambiado a sus componentes quark-antiquark.

Rompimiento de la simetría quiral en el modelo sigma lineal

El modelo σ -lineal está descrito por una Lagrangiana quiral que describe la interacción entre piones, nucleones y partículas σ . El rompimiento espontaneo de la simetría quiral se realiza mediante la interacción del potencial:

$$V(\pi, \sigma) = \frac{\lambda}{4} [\pi^2 + \sigma^2 - f_\pi^2]^2 \quad (0.0.1)$$

donde λ es la constante de acoplamiento de la interacción, σ el campo escalar del mesón sigma, $\vec{\pi} = \langle \pi_1, \pi_2, \pi_3 \rangle$ representa el pión en términos de sus componentes cartesianas y la constante de decaimiento del pión está dada por $f_\pi = 93 \text{ MeV}$.

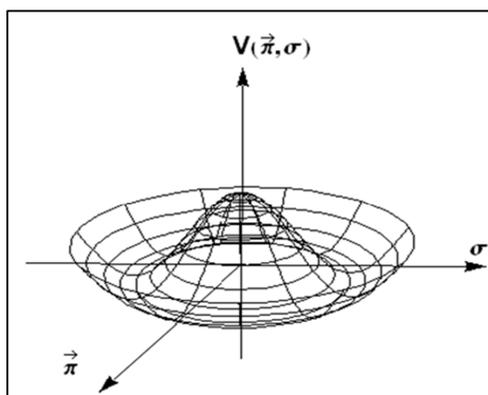


Figura 1.3-3 Potencial de Sombrero Mexicano (Mexican hat potential).

Para encontrar el valor esperado en el vacío, del campo escalar sigma, hemos de calcular el valor mínimo del potencial mediante la obtención de los puntos estacionarios de la función descrita en la ecuación (0.0.1).

Usando la condición $\frac{\partial V(\vec{\pi}, \sigma)}{\partial \pi} = 0$ obtenemos:

$$\frac{\lambda}{2} [\vec{\pi}^2 + \sigma^2 - f_\pi^2] (2\vec{\pi}) = 0 \quad (0.0.2)$$

De la ecuación (0.0.2), obtenemos las posibles soluciones:

$$\vec{\pi} = 0 \quad \text{o} \quad \begin{aligned} \vec{\pi}^2 + \sigma^2 - f_\pi^2 &= 0 \\ \sigma^2 &= f_\pi^2 - \vec{\pi}^2 \end{aligned} \quad (0.0.3)$$

Usando la condición $\frac{\partial V(\vec{\pi}, \sigma)}{\partial \sigma} = 0$ obtenemos

$$\frac{\lambda}{2} [\vec{\pi}^2 + \sigma^2 - f_\pi^2] (2\sigma) = 0 \quad (0.0.4)$$

Resolviendo la ecuación (0.0.4) obtenemos las posibles soluciones:

$$\sigma = 0 \quad \text{o} \quad \begin{aligned} \vec{\pi}^2 + \sigma^2 - f_\pi^2 &= 0 \\ \sigma^2 &= f_\pi^2 - \vec{\pi}^2 \end{aligned} \quad (0.0.5)$$

Como la simetría quiral se rompe cuando el valor esperado del campo escalar sigma es no nulo ($\sigma \neq 0$), la selección del estado base (mínimo valor del potencial V) debe tomarse como la solución dada por el valor de $\vec{\pi} = 0$.

$V(\vec{\pi} = 0, \sigma = f_\pi)$ sería el estado base cuyo valor esperado en el vacío para el campo escalar del mesón sigma es no nulo y por tanto la simetría quiral se rompe, que era a lo que queríamos llegar.

1.4 Experimentos que han detectado al mesón sigma

“Ningún descubrimiento se hizo
nunca sin una conjetura audaz”
Sir. Isaac Newton

1.4.1 Introducción

La física teórica intenta explicar fenómenos que ocurren en la naturaleza mediante modelos matemáticos, los cuales contienen restricciones y parámetros que deben cumplir las restricciones del modelo. Una teoría se dice que es completa (consolidada) cuando logra explicar toda la fenomenología que la misma teoría maneja. Dos de estas teorías que no están en discusión y toda la comunidad científica aceptan son: la mecánica newtoniana y la teoría electromagnética.

UNA BREVE HISTORIA

La teoría de la relatividad estuvo a punto de morir y quedar archivada en la historia. Una de las razones por las que al inicio, la teoría de la relatividad especial, fue rechazada es que la teoría planteada por un científico desconocido tenía ideas incompatibles con la teoría gravitatoria (de Sir Isaac Newton) en la cual el espacio era plano y el tiempo era absoluto.

El 29 de mayo de 1919 llega la oportunidad de comprobar la teoría de Einstein. El astrónomo Sir Frank Dyson y el astrofísico Arthur Eddington demostraron que los resultados obtenidos en la observación de un eclipse de Sol le daban la razón a Einstein.

Actualmente se ha diseñado un experimento para validar la teoría de la relatividad general; tres naves espaciales volarán a 5 millones de kilómetros y se dispararan rayos láser entre ellas y todo para observar un objeto matemático que predice la teoría general de la relatividad, el objeto matemático son las ondas gravitatorias.

Mientras las ondas gravitatorias no sean observadas la teoría general de la relatividad no estará confirmada, ya que estas ondas son la última pieza del rompecabezas de la teoría.

En la sección dedicada a los antecedentes del mesón sigma, se habló de la controversia de la existencia de la partícula y en la introducción de la tesis se dijo que dos experimentos terminaron con esa controversia. Lo que no se mencionó es que antes de esos experimentos ya habían existido al menos 4 experimentos que confirmaban la existencia del mesón sigma [72]-[75]. Aún con la existencia de éstos experimentos la controversia seguía, fue hasta que dos de los laboratorios más importantes del mundo confirmaron el haber obtenido la masa y ancho de la partícula que la comunidad científica aceptó la existencia del mesón.

Para entender la importancia de esos laboratorios es necesario conocer algo de su historia. En esta sección no discutiremos los experimentos que se realizaron en dichos laboratorios, pero si daremos una breve historia de ellos, daremos a conocer algunas de las contribuciones que han hecho a la física de partículas, en especial a la teoría de quarks y por último los resultados que obtuvieron para el mesón sigma. Pero antes mencionaremos algunos conceptos claves para entender qué es y cómo se mide una resonancia.

1.4.2 Resonancias

En el conjunto de los hadrones se les llama resonancia a las partículas de vida corta, existiendo resonancias bariónicas y mesónicas. El espín de las resonancias varía de 0 a $19/2$. En general las resonancias mesónicas tienen espín 1 excepto el mesón f cuyo espín es 2. Las resonancias mesónicas siguen la estadística de Bose-Einstein y las resonancias bariónicas la estadística de Fermi-Dirac [76].

Debido a que la vida media de una resonancia puede ser muy corta, no es posible detectarla en forma directa, por lo que la detección de estas partículas es a través de las partículas en las que se desintegran.

Los datos experimentales son analizados con diferentes métodos entre ellos el más utilizado para el decaimiento de partículas es el diagrama de Dalitz trazado mediante programas de análisis de datos para diferentes eventos del decaimiento. Otra forma de analizar los resultados es el uso de programas de análisis estadísticos como el MINUIT.

1.4.3 Diagrama de Dalitz

El diagrama de Dalitz es una representación del espacio de fase de dos dimensiones que describe un estado final de tres cuerpos originado en un proceso de desintegración. El estudio de este diagrama proporciona información acerca de la dependencia con la energía de la probabilidad de que tenga lugar el proceso considerado y puede poner de manifiesto con extraordinaria claridad la formación de estados resonantes entre grupos de las tres partículas que constituyen el estado final [77].

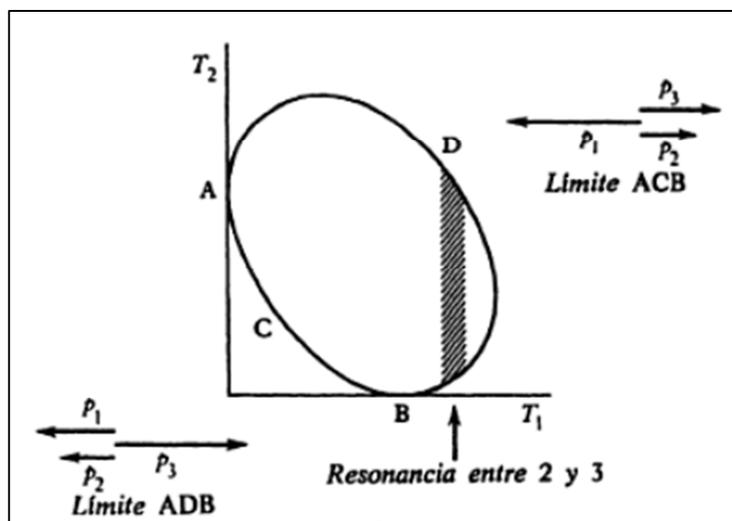


Figura 1.4-1 Diagrama de Dalitz para un estado final de tres cuerpos¹¹.

En la Figura 1.4-1 se observa la producción de un estado final con tres partículas de masas diferentes entre las cuales se distribuye una energía E en el sistema de centro de masa. Para cada suceso observado se presenta la energía cinética T_1 de una de las partículas en función de la energía cinética T_2 de otra de las partículas, los puntos se distribuirán en el interior de una región definida cinemáticamente cuyos límites corresponden a situaciones colineales. Los correspondientes momentos en el centro de masas están relacionados por la ecuación:

$$p_3^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 \cos \theta_{12} \quad (1.4.1)$$

¹¹ Imagen de W E Burcham “Física nuclear”. Barcelona Editorial Reverte p.579 (1974)

1.4.4 MINUIT, Function Minimization and Error Analysis

El MINUIT fue concebido como una herramienta para encontrar el mínimo valor de una función que contiene varios parámetros y analiza la forma de esa función alrededor de su valor mínimo. La principal aplicación es el análisis estadístico para trabajar sobre las pruebas de la chi-cuadrada, log de verosimilitud y las pruebas t de los parámetros. Así mismo incluye pruebas de correlación entre parámetros. Fue escrito por Fred James del CERN y su código estaba en FORTRAN. Actualmente se encuentra en C++ orientado a objetos¹².

MINUIT corre bajo la plataforma UNIX. Puede ser descargado en la página del CERN (<http://www.cern.ch/minuit>), es un programa gratuito pero debe ser referido al momento de hacer alguna publicación de resultados obtenidos con el programa.

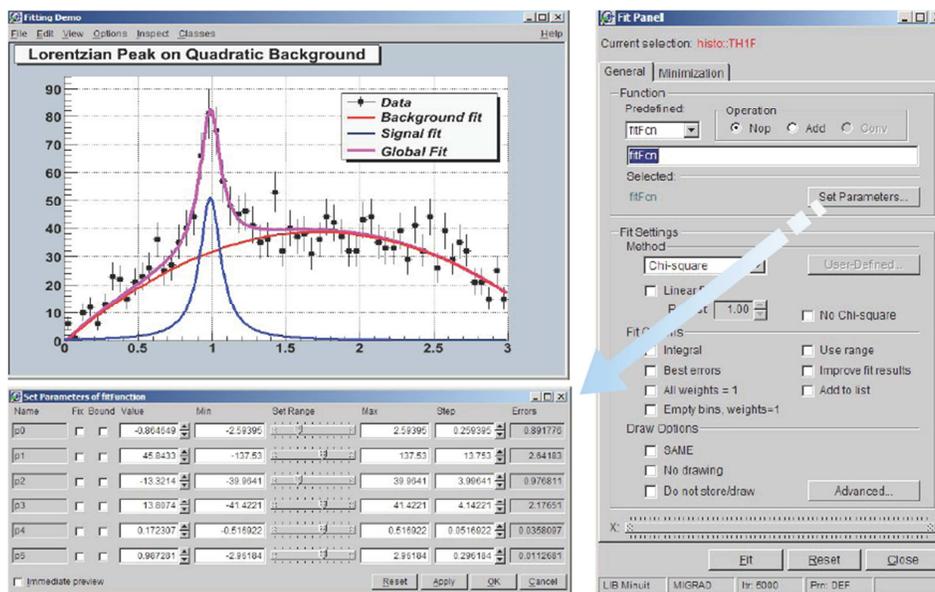


Figura 1.4-2 Imagen de la interfaz del MINUIT para nuevos procedimientos de la librería ROOT. <http://seal.web.cern.ch/seal/snapshot/work-packages/mathlibs/minuit/>.

¹² MINUIT User's Guide Fred James and Matthias Winkler CERN, Geneva.

1.4.5 El Fermilab

El Fermilab nace en 1967 con el nombre de “National Accelerator Laboratory”. El laboratorio se encuentra sobre una extensión de 2,630 hectáreas en Illinois en los Estados Unidos de América. En honor al Premio Nobel Enrico Fermi, el laboratorio fue renombrado en 1974.

Los tipos de experimentos se dividen en experimentos de colisión frontal y de blanco fijo. Los aceleradores del Fermilab mandan las partículas a través del Tevatrón al 99.9999% de la velocidad de la luz en el vacío. La observación de las partículas es mediante dos detectores de colisión frontal, CDF y D0, las colisiones entre partículas ocurren en el centro de los detectores. Cada detector tiene alrededor de un millón de trayectos individuales para grabar los datos electrónicos generados por las colisiones.

Dentro de los logros del Fermilab se encuentran el descubrimiento de los quarks top y bottom, determinación de la masa del bosón W y los mapeos de la estructura de los protones y neutrones [78].

Dentro de los experimentos de blanco fijo se encuentra el E791. En el año 2001 la colaboración E791, reportó haber encontrado evidencia experimental de la existencia de una resonancia en el decaimiento $D^+ \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^+$. La colaboración afirmaba tener fuertes evidencias de una resonancia escalar de masa $478_{-23}^{+24} \pm 17$ MeV/c² y ancho $324_{-40}^{+42} \pm 21$ MeV/c². El estado de resonancia $\pi^+ \pi^-$ es referida como $\sigma(500)$. La resonancia fue estudiada mediante el programa MINUIT, un simulador usando el método Montecarlo y haciendo un análisis con la gráfica de Dalitz para diferentes eventos. La amplitud del

$\sigma(500)$ produce una fracción de decaimiento del 46% con un error del 9%, esto es estudiado como el decaimiento $D^+ \rightarrow \sigma(500)\pi^+$ [43].

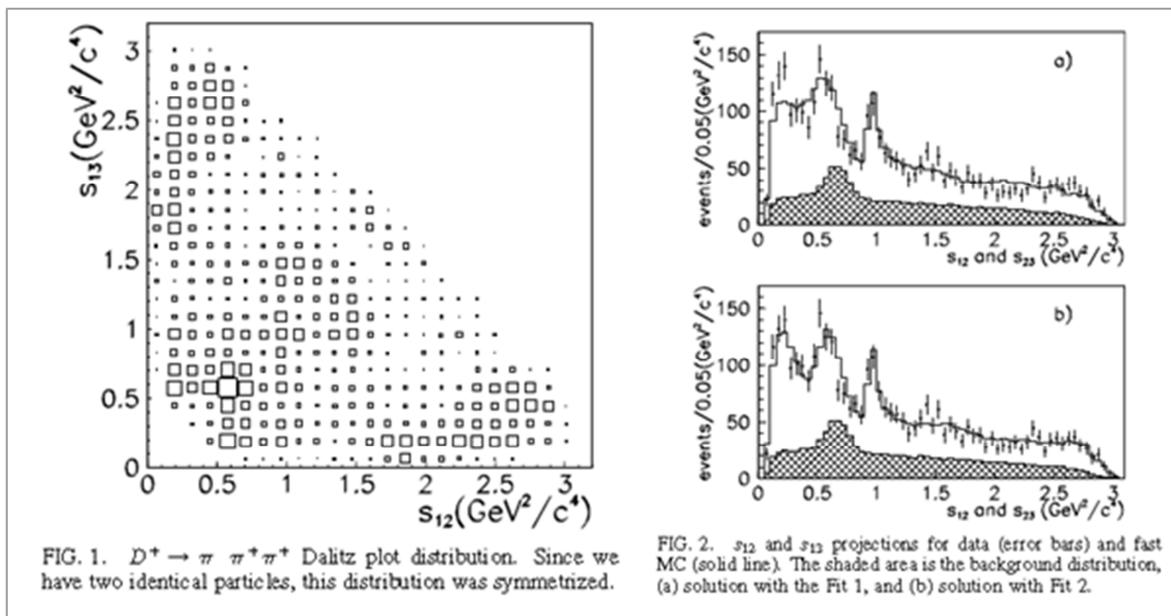


Figura 1.4-3 Gráficas obtenidas por la colaboración E791 para la resonancia del meón escalar. La figura 1 muestra una resonancia alrededor de los 0.5 GeV mediante la gráfica de Dalitz. La figura 2 muestra la densidad de probabilidad utilizando el método Montecarlo (distribución marcada por las barras de error de la media) y la densidad de distribución sombreada es la obtenida mediante el programa MINUIT.

1.4.6 Beijing Electron Positron Collider

El Beijing Electron Positron Collider (BEPC) es el primer acelerador de altas energías construido en China. El proyecto fue aprobado en 1984 por el gobierno chino y en 1988 fue realizada la primera colisión de partículas. El BEPC tiene como uno de sus componentes el espectrómetro de Beijing mejor conocido como el BES.

El BES se considera uno de los instrumentos más importantes para el estudio de las partículas que contienen quarks del tipo charm. El BES tiene una larga carrera en la historia

de la física de hadrones. El descubrimiento de una nueva partícula llamada X(1835) es posiblemente uno de los mayores logros del BES en los últimos años[79].

En el 2001 el BES encontró evidencia de la existencia del mesón sigma en el proceso de decaimiento de $J/\psi \rightarrow \omega \pi^+ \pi^-$. Utilizando la gráfica de Dalitz encontraron evidencia de una resonancia con masa 390_{-36}^{60} MeV y un ancho de 282_{-36}^{60} MeV [42]. El proceso sería estudiado más adelante como el decaimiento $J/\Psi \rightarrow \sigma\omega$ [80].

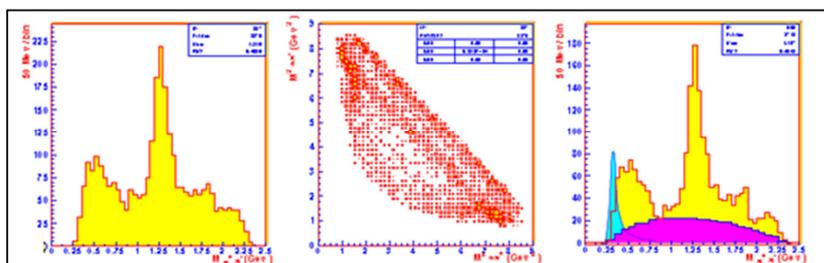


Figure 2: LEFT: The invariant mass spectrum of $\pi^+\pi^-$; MIDDLE: Dalitz plot; RIGHT: mass spectrum after side-band subtraction.

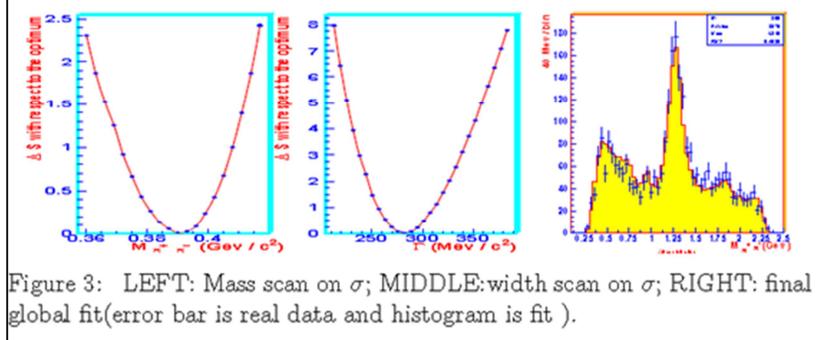


Figure 3: LEFT: Mass scan on σ ; MIDDLE: width scan on σ ; RIGHT: final global fit (error bar is real data and histogram is fit).

Figura 1.4.2-1 Estudio de la dispersión de los piones (Figure 2) y resonancia de sigma (Figure 3) con los datos experimentales obtenidos de BES I. Trabajo realizado por Ning Wu, reportando el valor de sigma alrededor de 390MeV [42]. Este reporte es conocido como la evidencia BES de la existencia del mesón sigma.

1.5 Conclusiones del capítulo

La física de partículas ha tenido un largo viaje y muchas preguntas en los procesos nucleares aún no han podido ser contestadas. Los mesones son una parte fundamental para el entendimiento de los procesos en la materia nuclear y han sido considerados como partículas simples y como partículas compuestas (de pares quark-antiquark).

El estudio de la propagación de los mesones en el medio nuclear es un tópico de gran interés tanto teórico como experimental. En lo particular, el mesón sigma ha mostrado ser una partícula que al incorporarla en diferentes modelos ha logrado ajustar la teoría con los datos experimentales.

Diferentes modelos han mostrado que las simetrías de la QCD y Matriz S (en la dispersión $\pi\pi$) se siguen manteniendo después de la incorporación del mesón sigma. Por tanto, el mesón sigma es una partícula que muestra cualidades dignas de seguir estudiando. Mientras la naturaleza del mesón sigma no sea clarificada, este mesón es un comodín muy importante para diferentes modelos basados en la QCD y en especial para la QHD.

Los valores obtenidos para el mesón sigma en los experimentos del Fermilab y el BES dependen de las condiciones iniciales y el tipo de decaimiento que se trabaja, por lo que no existen contradicciones entre ellos sino que existen condiciones diferentes en los experimentos. Tanto las partículas iniciales como los productos del decaimiento son diferentes. Mientras que el Fermilab tiene un producto final $\sigma\pi^+$, el BES obtiene un producto final $\sigma\omega$.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1 *Introducción*

Hasta finales del siglo XIX la Física Clásica parecía ser suficiente para la descripción de la naturaleza. Las leyes de Newton eran confirmadas en las observaciones astronómicas. Los fenómenos eléctricos y magnéticos fueron unificados por Maxwell mediante funciones de campos. El problema inicia cuando Thomson no consigue describir el espectro de emisión y absorción. Rutherford rectifica el modelo atómico de Thomson, pero el nuevo modelo no era compatible con el electromagnetismo. Bohr consigue explicar la absorción y emisión de luz por los átomos al aplicar la teoría de cuántos al modelo de Rutherford. Heisenberg inicia la física no determinista. Schrödinger crea el nuevo marco teórico, la Física Cuántica basada en la Ecuación de Schrödinger. Para 1940 la Física Moderna estaba constituida por los nuevos conocimientos de la Física Cuántica y la Teoría de la Relatividad de Einstein. El paradigma de la Física Actual iniciaría con las investigaciones de Dirac.

La Teoría Cuántica de Campos es la unificación de la Mecánica Cuántica y la Relatividad Especial. En 1927, Paul Adrien Maurice Dirac sienta las bases de la TCC en el artículo “The Quantum Theory of the Emission and Absorption of Radiation” [81]. El siguiente capítulo es un resumen del curso de teoría cuántica de campos, basado en los recursos proporcionados por la Profesora María Isabel Gallardo Fuentes¹³.

¹³ <http://huespedes.cica.es/aliens/dfamnus/cursos/tcc/>

2.2 Formalismo

2.2.1 Unidades naturales

Las unidades naturales (unidades de Planck) es un sistema que mide las magnitudes de tal forma en que la velocidad de la luz en el vacío y la constante de Planck dividida entre 2π son iguales a la unidad: $\hbar = c = 1$.

En el Sistema Internacional tenemos los siguientes valores para la constante de Planck y la velocidad de la luz: $h = 6.6260876 \cdot 10^{-43} Js$ y $c = 299792458 m/s$ respectivamente. Como la física está en las dimensiones y no en los números que dependen del sistema de unidades elegido, lo más conveniente es homologar los valores. Planck toma la energía como dimensión fundamental y el resto (masa, longitudes, etc.) las considera como unidades derivadas.

El sistema de unidades naturales (unidades de Planck) mide varias de las magnitudes fundamentales del universo: masa, tiempo, longitud, temperatura y carga eléctrica. El sistema se define haciendo que las cinco constantes físicas universales (velocidad de la luz, constante gravitatoria, constante reducida de Planck, constante de Coulomb y constante de Boltzmann) tomen el valor 1. La mecánica cuántica relativista ha decidido tomar este sistema de unidades. Esta elección de unidades reduce las unidades de tiempo, masa y longitud a una sola unidad (generalmente llamada masa):

$$T = L = M^{-1} \quad (2.2.1)$$

2.2.2 Lagrangianas de sistemas continuos

La teoría cuántica de campos trata sistemas relativistas cuánticos con infinitos grados de libertad. Esta teoría se puede desarrollar usando los conceptos de una teoría clásica de campos combinándolo con los postulados de la mecánica cuántica. La dinámica del sistema que estudiamos se describe por medio de una Lagrangiana \mathcal{L} ; las ecuaciones de movimiento se obtienen exigiendo que la acción sea extrema por medio de un principio variacional. A partir de \mathcal{L} se definen los momentos generalizados. Por último, se cuantifican los campos asociándoles, a ellos y a sus momentos, operadores que verifican las reglas canónicas de conmutación.

2.2.3 Campos clásicos relativistas

Consideremos un sistema cuyos grados de libertad se describen por distintos campos arbitrarios ϕ^r funciones del cuadvectores x^μ . Postulamos la existencia de una densidad Lagrangiana que describa al sistema $\mathcal{L}(\phi^r, \partial\phi^r)$.

La integral de acción $S(\Omega)$ para una región Ω arbitraria espacio-temporal se define:

$$S(\Omega; \phi^r) = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi^r, \partial\phi^r) \quad (2.2.1)$$

La teoría relativista exige que S sea un escalar bajo transformaciones de Lorentz y, por lo tanto, también \mathcal{L} .

Se postula que las ecuaciones de movimiento del sistema (las ecuaciones de campo) se obtienen a partir del principio variacional, el cual exige que la integral de acción sea un

extremo para variaciones de los campos $\delta\phi^r$ ($\phi^r \rightarrow \phi^r + \delta\phi^r$) que se anulen en la superficie Γ del volumen Ω .

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^r} \delta\phi^r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi^r)} \partial_{\mu} \delta\phi^r \right] = 0 \quad (2.2.2)$$

Al integrar por partes el último término y simplificando el resultado, se obtiene que para cualquier variación $\delta\phi^r$ que se anule en la superficie:

$$\int_{\Omega} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^r} - \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi^r)} \right] \delta\phi^r = 0 \quad (2.2.3)$$

Llegamos a las ecuaciones de Euler:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^r} - \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi^r)} = 0 \quad (2.2.4)$$

2.2.4 Teorema de Noether

El teorema de Noether es fundamental en la física teórica, constituye una explicación de la existencia de leyes de conservación y magnitudes físicas que no cambian a lo largo de la evolución temporal de un sistema físico. Expresa que cualquier simetría diferenciable, proveniente de un sistema físico, tiene su correspondiente ley de conservación.

Teorema de Noether: A cada transformación continua que deja invariante la integral de acción y para la que se conoce la ley de transformación de los campos, le

corresponde una ecuación de continuidad y una constante de movimiento que se expresa en función de los campos y sus derivadas.

Toda transformación continua de coordenadas se puede obtener por aplicaciones sucesivas de transformaciones infinitesimales del tipo:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \quad (2.2.5)$$

que pueden depender de una serie de N parámetros infinitesimales dados por las componentes del tensor antisimétrico $\varepsilon^{\mu\nu}$ y del desplazamiento δ^μ

$$\delta x^\mu = \varepsilon^{\mu\nu} x_\nu + \delta^\mu \quad (2.2.6)$$

Este cambio de coordenadas se traduce en un cambio en los campos:

$$\phi^r(x) \rightarrow \phi'^r(x') = \phi^r(x) + \delta\phi^r(x) \quad (2.2.7)$$

La variación asociada al cambio de coordenadas se puede escribir como:

$$\delta\phi^r = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu} S_{\mu\nu}^{rs} \phi^s \quad (2.2.8)$$

Los coeficientes $S_{\mu\nu}^{rs}$ son antisimétricos en μ y ν ; se determinan por las propiedades de transformación de los campos. En cualquier caso, $\delta\phi^r$, se puede escribir en función de una variación local del campo, que denotamos $\bar{\delta}\phi^r$, definida como:

$$\begin{aligned} \delta\phi^r &= \phi'^r(x') - \phi^r(x') + \phi^r(x') - \phi^r(x) \\ &= \bar{\delta}\phi^r + \partial_\mu \phi^r \delta x^\mu \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Imponemos ahora la condición de que el sistema bajo estudio sea simétrico bajo la transformación definida en las ecuaciones (2.2.5) y (2.2.7), exigiendo que la integral de acción permanezca invariante. Para ello basta que $\mathcal{L}d^4x$ se conserve salvo una divergencia

total de una función de x , $Q^\mu(x)$, que se anule suficientemente rápido en la superficie del volumen en que está encerrado nuestro sistema:

$$\mathcal{L}'(x')d^4x' = (\mathcal{L}(x) + \partial_\mu Q^\mu)d^4x \quad (2.2.10)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) &= \mathcal{L}(x, \phi^r(x), \partial_\mu \phi^r(x)) \\ \mathcal{L}'(x') &= \mathcal{L}(x', \phi^r(x'), \partial'_\mu \phi^r(x')) \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Así:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta(\mathcal{L}d^4x) - \partial_\mu Q^\mu d^4x \\ &= \delta\mathcal{L}d^4x + \mathcal{L}\delta d^4x - \partial_\mu Q^\mu d^4x \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

La variación de la densidad Lagrangiana se puede escribir como suma de una variación local y otra variación proporcional al cambio en las coordenadas, δx^μ .

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \mathcal{L}'(x') - \mathcal{L}'(x) + \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x) \\ &= \partial_\mu \mathcal{L} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^r} \bar{\delta} \phi^r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi^r)} \partial_\nu \bar{\delta} \phi^r \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Usando las ecuaciones (2.2.4) de Euler-Lagrange para los campos ϕ^r , la ecuación (2.2.13) puede escribirse:

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \mathcal{L} \delta x^\mu + \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi^r)} \bar{\delta} \phi^r \right) \quad (2.2.14)$$

Por otro lado:

$$\delta d^4x = d^4x' - d^4x = \partial_\mu \delta x^\mu d^4x \quad (2.2.15)$$

ya que el jacobiano \mathcal{J} de la transformación (2.2.5) es, en primer orden:

$$\mathcal{J}\left(\frac{d^4 x'}{d^4 x}\right) = 1 + \partial_\mu \delta x^\mu \quad (2.2.16)$$

Sustituyendo (2.2.14) y (2.2.15) en la ecuación (2.2.12) obtenemos

$$d^4 x \partial_\mu \left[\left(\mathcal{L} \delta_\nu^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^r)} \right) \partial_\nu \phi^r \right] \delta x^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^r)} \delta \phi^r - Q^\mu = 0 \quad (2.2.17)$$

La ecuación (2.2.17) es válida integrada en cualquier región B del espacio de Minkowski. El integrando define una ecuación de continuidad para un cuadvectores corriente:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (2.2.18)$$

con

$$J^\mu = \tau_\nu^\mu \delta x^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^r)} \delta \phi^r - Q^\mu \quad (2.2.19)$$

donde

$$\tau_\nu^\mu = \mathcal{L} \delta_\nu^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^r)} \partial_\nu \phi^r \quad (2.2.20)$$

La ecuación de continuidad (2.2.18) implica la existencia de una serie de constantes de movimiento. Cada parámetro independiente de la transformación (2.2.5) y (2.2.7) tiene su propia constante de movimiento llamada carga. Integrando (2.2.18) en un volumen V que englobe el sistema a estudiar y aplicando el teorema de Green, tenemos:

$$\int_{V \rightarrow \infty} J_0 d^3 \vec{x} = cte \quad (2.2.21)$$

2.2.5 Densidad hamiltoniana

Para cuantificar la teoría clásica desarrollada en las secciones anteriores según los métodos utilizados en mecánica cuántica ordinaria, hemos de establecer un formalismo hamiltoniano. Para estudiar un sistema descrito por campos (con un número infinito y continuo de grados de libertad) vamos a utilizar el mismo método de discretizar el problema y tomar posteriormente el límite.

Consideremos el sistema en un instante determinado t . Descomponemos entonces el espacio tridimensional en pequeñas celdas de volumen $\delta\vec{x}_i$, enumeradas por los índices $i = 1, 2, \dots$. Las variables, ya discretas, del sistema en esta aproximación son:

$$q_i^r = \phi^r(\vec{x}_i, t); \quad (r = 1, 2, \dots, N; \quad i = 1, 2, \dots) \quad (2.2.22)$$

que son los valores de los campos en cada celda i centrada en \vec{x}_i . La Lagrangiana del sistema estudiado se puede escribir como:

$$L = \sum \delta\vec{x}_i \mathcal{L}^i \quad (2.2.23)$$

donde \mathcal{L}^i es la densidad Lagrangiana en la celda i . Los momentos conjugados se definen de la manera tradicional:

$$p_i^r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i^r} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^r(\vec{x}_i, t)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^r(\vec{x}_i, t)} \delta\vec{x}_i \quad (2.2.24)$$

El hamiltoniano se define como:

$$H = \sum_{i,r} p_i^r \dot{q}_i^r - L \quad (2.2.25)$$

Definimos al campo conjugado de $\phi^r(x)$ mediante una nueva variable (sólo por conveniencia) a la que llamaremos π^r :

$$\pi^r(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^r(x)} \quad (2.2.26)$$

esto nos permite escribir el hamiltoniano (2.2.25) como:

$$H = \sum_i \delta \vec{x}_i \left\{ \sum_r \pi^r(\vec{x}_i, t) \dot{\phi}^r(\vec{x}_i, t) - \mathcal{L}(\vec{x}_i, t) \right\} \quad (2.2.27)$$

en el límite $\delta \vec{x}_i \rightarrow 0$

$$H = \int d^3 \vec{x} \left\{ \sum_r \pi^r(x) \dot{\phi}^r(x) - \mathcal{L}(x) \right\} \quad (2.2.28)$$

La densidad hamiltoniana es:

$$\mathcal{H} = \sum_r \pi^r(x) \dot{\phi}^r(x) - \mathcal{L}(x) \quad (2.2.29)$$

Estas definiciones de las variables y sus momentos conjugados nos proporcionan los elementos necesarios para cuantizar la teoría de manera similar a la usada en la mecánica cuántica no relativista.

2.2.6 Cuantización de los campos

La teoría de campos clásica puede cuantizarse fácilmente interpretando las coordenadas conjugadas q_i^r y p_i^r como operadores que satisfacen las relaciones de conmutación canónicas usuales:

$$[q_i^r, q_j^s] = [p_i^r, p_j^s] = 0; \quad [q_i^r, p_j^s] = i \delta_{r,s} \delta_{i,j} \quad (2.2.30)$$

Sustituyendo las expresiones de q_i^r y p_i^r de las ecuaciones (2.2.22) y (2.2.24):

$$\begin{aligned} [\phi^r(\vec{x}_i, t), \phi^s(\vec{x}_j, t)] &= [\pi^r(\vec{x}_i, t), \pi^s(\vec{x}_j, t)] = 0 \\ [\phi^r(\vec{x}_i, t), \pi^s(\vec{x}_j, t)] &= i \delta_{r,s} \frac{\delta_{i,j}}{\delta \vec{x}_i} \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

Haciendo ahora tender el volumen de las celdas a 0 obtenemos las relaciones de conmutación entre los campos ϕ y sus conjugados π en dos puntos del espacio \vec{x} y \vec{x}' en un mismo instante de tiempo t , o de éstos en la representación de Schrödinger en la que los operadores no llevan la evolución temporal. Así en esta representación:

$$\begin{aligned} [\phi^r(\vec{x}), \phi^s(\vec{x}')] &= [\pi^r(\vec{x}), \pi^s(\vec{x}')] = 0 \\ [\phi^r(\vec{x}), \pi^s(\vec{x}')] &= i\delta_{r,s} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

siendo $\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$ la función delta de Dirac tridimensional y los puntos \vec{x} y \vec{x}' situados en las celdas i y j respectivamente. El cálculo en el límite: $\lim_{\delta\vec{x}_i \rightarrow 0} \frac{\delta_{i,j}}{\delta\vec{x}_i} = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$.

Para establecer una relación con el formalismo de segunda cuantización se realiza una descomposición de Fourier de los campos clásicos, solución de las correspondientes ecuaciones de Klein–Gordon, y de sus momentos conjugados y se interpretan los coeficientes de ésta como operadores. Posteriormente, a partir de las relaciones de conmutación encontradas en la ecuación (2.2.32), se obtienen las correspondientes a los nuevos operadores–coeficientes de la descomposición de Fourier. Se encuentra entonces que éstas coinciden con las de los operadores de creación y aniquilación de bosones, estableciéndose así la conexión deseada entre campos y partículas.

2.2.7 Simetrías y leyes de conservación

En mecánica cuántica, el cambio de un sistema bajo un grupo de transformaciones se lleva a cabo por medio de un operador U . Este actúa sobre los estados $|\Psi\rangle$ y sobre los operadores O de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle \rightarrow |\Psi'\rangle &= U |\Psi\rangle \\ O \rightarrow O' &= UOU^\dagger \end{aligned} \quad (2.2.33)$$

Para una transformación continua y unitaria, este operador se puede escribir como:

$$U = e^{i\alpha T} \quad (2.2.34)$$

con T hermitiano ($T^\dagger = T$). La correspondiente transformación infinitesimal queda:

$$U = 1 + i\delta\alpha T \quad (2.2.35)$$

Aplicada a cualquier operador O :

$$O' = (1 + i\delta\alpha T) O (1 - i\delta\alpha T) = O + i\delta\alpha [T, O] \quad (2.2.36)$$

Si el sistema permanece invariante bajo este grupo de transformaciones, su hamiltoniano no cambia ($H' = H$) y, por tanto, haciendo uso de la ecuación anterior se tiene que $[H, T] = 0$. Esto implica, estudiando la evolución de T en la representación de Heisenberg que:

$$i \frac{dT}{dt} = [T, H] = 0 \quad (2.2.37)$$

Es decir, asociado al operador T de la transformación de simetría, tenemos un observable ($T^\dagger = T$) constante de movimiento. Se establece, por tanto, un paralelismo entre este operador y la magnitud $Q \propto \int d^3\vec{x} J^0$, de tal manera que el operador U (2.2.34) de la transformación (2.2.33) se puede escribir (con Q convenientemente cuantizado):

$$U = e^{i\alpha Q} \quad (2.2.38)$$

2.3 Campo mesónico: Partículas de espín 0

Los mesones son partículas hadrónicas de espín entero. El mesón más conocido es el pión o mesón π , que tiene espín intrínseco 0. Es la partícula asociada a la interacción nuclear fuerte. Basándonos en el formalismo Lagrangiano de las subsecciones anteriores vamos a estudiar el campo mesónico y las ecuaciones que lo rigen. Con la ayuda del teorema de Noether vamos a encontrar la expresión de distintas constantes de movimiento asociadas a las simetrías del sistema.

2.3.1 El campo mesónico neutro

El campo mesónico $\phi(x)$ es un campo, real o imaginario, escalar bajo transformaciones de Lorentz. Supongamos un campo ϕ real al que le asignamos la densidad Lagrangiana descrita por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2) \quad (2.3.1)$$

Las ecuaciones de Euler–Lagrange conducen a la ecuación de evolución del campo.

$$[\square + m^2] \phi = 0 \quad (2.3.2)$$

El operador D'Alembertiano es la generalización del operador laplaciano a un espacio de Minkowski, o, más en general, a un espacio de dimensión y métrica arbitraria. Se suele representar como \square^2 , o simplemente como \square . Técnicamente el D'Alembertiano de una función escalar es el operador de Laplace-Beltrami asociado a la métrica de dicho espacio, operando sobre dicha función.

$$\begin{aligned} \square &= \partial^\mu \partial_\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Las soluciones particulares k para la ecuación (2.3.2), con ϕ real son:

$$\phi_k^1 = c_k \cos(kx) \quad \text{o} \quad \phi_k^2 = c_k \text{sen}(kx) \quad (2.3.4)$$

con $k_0 = \pm\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$.

Podemos construir un campo complejo a partir de:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi^1 - i\phi^2) \\ \phi^* &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi^1 + i\phi^2) \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

donde cada componente evolucione según la Lagrangiana descrita en (2.3.1). La suma de las correspondientes a cada una de las componentes reales independientes es:

$$\mathcal{L} = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi^\alpha \partial^\mu \phi^\alpha - m^2 \phi^\alpha \phi^\alpha) \quad (2.3.6)$$

escrita en función de los campos complejos dados en (2.3.5):

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi) \quad (2.3.7)$$

Las ecuaciones de evolución de estos campos coinciden claramente con la ecuación (2.3.2).

Las soluciones particulares k complejas pueden ser escritas como:

$$\phi_k = c_k e^{-ikx} \quad (2.3.8)$$

con $k_0 = \pm\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ y la constante c_k se selecciona dependiendo de los criterios de normalización del campo ϕ_k . La solución general es:

$$\phi = \sum_k a_k \phi_k \quad (2.3.9)$$

2.3.2 Constantes de movimiento

Las expresiones de distintas constantes de movimiento en función de los campos se pueden obtener utilizando el teorema de Noether y atendiendo a las simetrías del sistema.

El sistema de mesones tiene que ser invariante bajo traslaciones espacio–temporales

$$x_\mu \rightarrow x_\mu + \delta_\mu \quad (2.3.10)$$

donde δ_μ son 4 constantes (parámetros independientes de la transformación), el sistema de mesones permanece invariante. Las constantes de movimiento asociadas son el momento lineal y la energía ($P^\nu = (E, \vec{p})$):

$$P_\nu = A \int d^3\vec{x} \tau_\nu^0 \quad (2.3.11)$$

donde, A es una constante de proporcionalidad que se obtiene de igualar la densidad de energía \mathcal{E} dada por esa ecuación ($\mathcal{E} = A \tau_0^0$) con la expresión de la densidad hamiltoniana

\mathcal{H} para estos campos y τ_ν^0 dado en la ecuación (2.2.20).

Para los campos mesónicos complejos:

$$\tau_\nu^0 = \mathcal{L} \delta_\nu^0 - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} \partial_\nu \phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi^*)} \partial_\nu \phi^* \quad (2.3.12)$$

$$\mathcal{E} = -A [\vec{\nabla} \phi^* \vec{\nabla} \phi + \dot{\phi}^* \dot{\phi} + m^2 \phi^* \phi] \quad (2.3.13)$$

Utilizando las ecuaciones (2.2.26) y (2.2.29) tenemos:

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^*} \dot{\phi}^* - \mathcal{L} \quad (2.3.14)$$

Al igualar \mathcal{E} y \mathcal{H} se obtiene $A = -1$. Al sustituir el valor de A en la ecuación (2.3.11):

$$P_v = -\int d^3\vec{x}\tau_v^0 \quad (2.3.15)$$

Por tanto para el campo mesónico se obtiene:

$$\vec{P} = -\int d^3\vec{x}(\vec{\nabla}\phi^*\dot{\phi} + \dot{\phi}^*\vec{\nabla}\phi) \quad (2.3.16)$$

$$E = \int d^3\vec{x}(m^2\phi^*\phi + \vec{\nabla}\phi^*\vec{\nabla}\phi + \dot{\phi}^*\dot{\phi}) \quad (2.3.17)$$

Para la solución particular ϕ_k , descrita en la ecuación (2.3.8), se tiene:

$$\vec{P}_k = 2|c_k|^2 V k_0 \vec{k} \quad (2.3.18)$$

$$E_k = 2|c_k|^2 V k_0^2 \quad (2.3.19)$$

El campo ϕ_k se suele normalizar de manera que su energía y momento en el volumen V sean respectivamente $\omega_k = |k_0| = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ y $\pm\vec{k}$ (según $k_0 = \pm\omega_k$). Con esta convención:

$$|c_k| = \frac{1}{\sqrt{2V|k_0|}} \quad (2.3.20)$$

y por tanto las ecuaciones (2.3.18) y (2.3.19) toman la forma:

$$\vec{P}_k = \frac{k_0}{|k_0|} \vec{k} \quad (2.3.21)$$

$$E_k = |k_0| = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \quad (2.3.22)$$

Las cuales están relacionados por la ecuación relativista de la energía de una partícula de masa m.

2.3.3 Transformación Gauge

Las transformaciones gauge son un tipo de transformaciones cuya invariancia está asociada a la conservación de una propiedad interna del campo, como la carga eléctrica o el número bariónico o leptónico. Estas transformaciones cambian la fase del campo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow \phi' = e^{-iq}\phi \\ \phi^* &\rightarrow \phi^{*'} = e^{iq}\phi^*\end{aligned}\tag{2.3.23}$$

donde q es constante, dejando invariantes las coordenadas $x_\mu \rightarrow x_\mu$.

El campo mesónico es invariante bajo esta transformación y, haciendo uso del teorema de Noether, se puede encontrar la expresión del cuadvectores corriente conservada asociado (2.2.19):

$$S^\mu = -iq(\phi\partial^\mu\phi^* - \phi^*\partial^\mu\phi)\tag{2.3.24}$$

La componente 0 integrada en el volumen V corresponde a la constante de movimiento:

$$Q = \int d^3\vec{x}S^0 = -iq\int d^3\vec{x}(\phi\partial_t\phi^* - \phi^*\partial_t\phi)\tag{2.3.25}$$

En particular para la solución ϕ_k , descrita en la ecuación (2.3.8), se obtiene:

$$Q = q\frac{k_0}{|k_0|}\tag{2.3.26}$$

Q cambia de signo bajo la sustitución $\phi \leftrightarrow \phi^*$. Esto, asociado al hecho de que es una constante de movimiento, sugiere que Q pueda interpretarse como una carga del sistema y por lo tanto la densidad de corriente de carga S^μ .

2.3.4 Solución general del campo mesónico

La solución general se puede escribir como combinación de las particulares ϕ_k :

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \pm k_0} \frac{1}{\sqrt{2|k_0|}} a_k e^{i(\vec{k}\vec{x} - k_0 t)} \quad (2.3.27)$$

Renombrando a $|k_0|$ como ω_k :

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \omega_k} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left[a_{\vec{k}, \omega_k} e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega_k t)} + a_{\vec{k}, -\omega_k} e^{i(\vec{k}\vec{x} + \omega_k t)} \right] \quad (2.3.28)$$

En términos de los cuadvectores:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \omega_k} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left[a_k e^{-ikx} + b_k^* e^{ikx} \right] \quad (2.3.29)$$

En particular, si el campo ϕ es real se tiene:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \omega_k} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left[a_k e^{-ikx} + a_k^* e^{ikx} \right] \quad (2.3.30)$$

Si el volumen V tiende a infinito, se sustituye la sumatoria por su límite:

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int d^3\vec{k} \quad (2.3.31)$$

Recordando que $|k_0| = \omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$.

2.3.5 Momento asociado al campo mesónico neutro

El momento π asociado al campo ϕ está dado por:

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)} = \dot{\phi}(x) \quad (2.3.32)$$

Usando las soluciones encontradas (2.3.30), se tiene:

$$\pi(x) = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}}{2}} [-a_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}x} + a_{\vec{k}}^* e^{-i\vec{k}x}] \quad (2.3.33)$$

Los operadores asociados, que deben verificar las relaciones de conmutación de las ecuaciones (2.2.32) en la representación de Schrödinger (o de forma equivalente para $t=0$), se pueden entonces escribir (dado el carácter de operador a los coeficientes del desarrollo

$a_{\vec{k}}^-$ y $a_{\vec{k}}^*$):

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} [a_{\vec{k}}^- e^{-i\vec{k}\vec{x}} + a_{\vec{k}}^{\dagger} e^{i\vec{k}\vec{x}}] \quad (2.3.34)$$

$$\pi(x) = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}}{2}} [-a_{\vec{k}}^- e^{i\vec{k}\vec{x}} + a_{\vec{k}}^{\dagger} e^{-i\vec{k}\vec{x}}] \quad (2.3.35)$$

Las relaciones de conmutación de estos nuevos operadores se obtienen de los propios ϕ y π . Al multiplicar las ecuaciones (2.3.34) y (2.3.35) por $e^{-i\vec{k}'\vec{x}}$ e integrando en el volumen V se obtienen las relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned} [a_{\vec{k}}^-, a_{\vec{k}'}^-] &= [a_{\vec{k}}^{\dagger}, a_{\vec{k}'}^{\dagger}] = 0 \\ [a_{\vec{k}}^-, a_{\vec{k}'}^{\dagger}] &= \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \end{aligned} \quad (2.3.36)$$

Estos nuevos operadores coinciden con las de operadores de creación y destrucción de un determinado tipo de bosones \vec{k} y establece la relación entre campos y partículas.

Si escribimos los operadores campo en función de los de creación y destrucción, el momento total y la energía quedan:

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}} \vec{k} \\ E &= \sum_{\vec{k}} \left(a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right) \omega_{\vec{k}}\end{aligned}\tag{2.3.37}$$

Estas ecuaciones corresponden exactamente al momento y energía de un sistema de partículas libres relativistas de masa m . El término $1/2$ en implica una energía infinita, incluso para el vacío. Sin embargo sólo son observables las diferencias energéticas por lo que ese término queda sin sentido. Se puede suprimir redefiniendo los operadores como el producto normal de las expresiones encontradas hasta ahora. El significado de los parámetros \vec{k} que definen a los operadores $a_{\vec{k}}^{\dagger}$ es que indican las componentes del momento lineal de las partículas creadas por ellos. Así, $a_{\vec{k}}^{\dagger}$ crea un bosón de masa m y momento \vec{k} .

2.3.6 Campo mesónico cargado

Los campos mesónicos complejos están sujetos a la densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi) \quad (2.3.38)$$

cuya solución general es:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \omega_k} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left[a_{\vec{k}} e^{-ikx} + b_{\vec{k}}^* e^{ikx} \right] \quad (2.3.39)$$

y el complejo conjugado para $\phi(x)$. Los momentos asociados se calculan de la manera usual:

$$\begin{aligned} \pi_\phi(x) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)} = \dot{\phi}^*(x) \\ \pi_{\phi^*}(x) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^*(x)} = \dot{\phi}(x) \end{aligned} \quad (2.3.40)$$

desarrollando tenemos:

$$\pi_\phi(x) = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \omega_k} \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \left[a_{\vec{k}}^* e^{ikx} - b_{\vec{k}} e^{-ikx} \right] \quad (2.3.41)$$

$$\pi_{\phi^*}(x) = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \omega_k} \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \left[-a_{\vec{k}} e^{ikx} - b_{\vec{k}}^* e^{-ikx} \right] \quad (2.3.42)$$

para los operadores asociados a los campos anteriores se verifica:

$$\begin{aligned} [\phi(\vec{x}), \phi(\vec{x}')] &= [\pi_\phi(\vec{x}), \pi_\phi(\vec{x}')] = 0 \\ [\phi(\vec{x}), \pi_\phi(\vec{x}')] &= i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \end{aligned} \quad (2.3.43)$$

y para ϕ^\dagger y su respectivo momento asociado π_{ϕ^*} :

$$\begin{aligned} [\phi^\dagger(\vec{x}), \phi^\dagger(\vec{x}')] &= [\pi_{\phi^\dagger}(\vec{x}), \pi_{\phi^\dagger}(\vec{x}')] = 0 \\ [\phi^\dagger(\vec{x}), \pi_{\phi^\dagger}(\vec{x}')] &= i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \end{aligned} \quad (2.3.44)$$

Las relaciones de conmutación anteriores implican:

$$\begin{aligned} \left[a_{\vec{k}^-}, a_{\vec{k}'^-} \right] &= \left[a_{\vec{k}^-}^\dagger, a_{\vec{k}'^-}^\dagger \right] = 0 ; & \left[b_{\vec{k}^-}, b_{\vec{k}'^-} \right] &= \left[b_{\vec{k}^-}^\dagger, b_{\vec{k}'^-}^\dagger \right] = 0 \\ \left[a_{\vec{k}^-}, a_{\vec{k}'^-}^\dagger \right] &= \delta_{\vec{k}^-, \vec{k}'^-}, & \left[b_{\vec{k}^-}, b_{\vec{k}'^-}^\dagger \right] &= \delta_{\vec{k}^-, \vec{k}'^-} \end{aligned} \quad (2.3.45)$$

Estas relaciones de conmutación indican que $a_{\vec{k}^-}^\dagger$ y $b_{\vec{k}^-}^\dagger$ crean partículas bosónicas diferentes.

Si escribimos los operadores campo en función de los de creación y destrucción, el momento total y la energía del sistema son:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \sum_{\vec{k}} \left(a_{\vec{k}^-}^\dagger a_{\vec{k}^-} + b_{\vec{k}^-}^\dagger b_{\vec{k}^-} \right) \vec{k} \\ E &= \sum_{\vec{k}} \left(a_{\vec{k}^-}^\dagger a_{\vec{k}^-} + b_{\vec{k}^-}^\dagger b_{\vec{k}^-} + 1 \right) \omega_{\vec{k}} \end{aligned} \quad (2.3.46)$$

Estas ecuaciones corresponden exactamente al momento y energía de un sistema de dos tipos de partículas libres relativistas de masa m : las creadas por $a_{\vec{k}^-}^\dagger$ y $b_{\vec{k}^-}^\dagger$. El subíndice \vec{k}^- etiqueta el momento de la partícula. Así, tanto $a_{\vec{k}^-}^\dagger$ como $b_{\vec{k}^-}^\dagger$ crean un bosón de masa m y momento \vec{k}^- .

Los bosones anteriores (a y b) se diferencian en su carga. Para demostrarlo, se cuantiza la expresión clásica de la densidad de corriente, sustituyendo los campos por sus operadores asociados, teniendo cuidado de simetrizar convenientemente:

$$S^\mu = -iq \left(\phi \partial^\mu \phi^\dagger - \phi^\dagger \partial^\mu \phi \right) \quad (2.3.47)$$

La carga conservada es la integral respecto a de la componente 0 (S^0). En función de los operadores de creación y aniquilación está dada por:

$$Q = q \sum_{\vec{k}} \left(a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}} - b_{\vec{k}}^{\dagger} b_{\vec{k}} \right) \quad (2.3.48)$$

Lo anterior indica que mientras que $a_{\vec{k}}^{\dagger}$ crea bosones de carga q , los creados por $b_{\vec{k}}^{\dagger}$ tienen carga $-q$, pudiendo ser q cualquier tipo de carga (por ejemplo, eléctrica). La ecuación anterior muestra también cómo la teoría cuántica conduce naturalmente a la cuantización de la carga.

2.3.7 Evolución temporal de estados y operadores

En la representación de Schrödinger (etiquetada con el superíndice S), la ecuación de movimiento del sistema se escribe:

$$i \frac{\partial |\varphi^S(t)\rangle}{\partial t} = H^S |\varphi^S(t)\rangle \quad (2.3.49)$$

El Hamiltoniano H^S es el hamiltoniano total que se puede descomponer en una parte asociada a las partículas (A, B, \dots) libres y otra a la posible interacción:

$$H^S = H_0^S + H_I^S \quad (2.3.50)$$

En la representación de interacción (sin etiquetar), tanto los vectores estado $|\varphi(t)\rangle$ como los operadores $O(t)$ llevan la evolución temporal del sistema. Se obtienen de los de la representación de Schrödinger mediante la transformación unitaria:

$$|\varphi(t)\rangle = e^{iH_0^S t} |\varphi^S(t)\rangle \quad (2.3.51)$$

$$O(t) = e^{iH_0^S t} O^S e^{-iH_0^S t} \quad (2.3.52)$$

Las dos representaciones son iguales a $t=0$ y la parte libre del hamiltoniano coincide en ambas descripciones, $H_0 = H_0^S$.

La evolución del vector estado puede obtenerse al sustituir los operadores en las ecuaciones del hamiltoniano total (2.3.50):

$$i \frac{\partial |\varphi(t)\rangle}{\partial t} = H_I |\varphi(t)\rangle \quad (2.3.53)$$

La evolución de los operadores se puede encontrar derivando la ecuación (2.3.52) respecto del tiempo:

$$\frac{\partial O(t)}{\partial t} = i(H_0 O(t) - O(t) H_0) \quad (2.3.54)$$

En términos operadores de forma simplificada:

$$i \frac{\partial O(t)}{\partial t} = [O, H_0] \quad (2.3.55)$$

En la representación de interacción la evolución de los vectores estado coincide con la de Schrödinger reemplazando el hamiltoniano total por el de interacción. Igualmente los operadores coinciden con los de la representación de Heisenberg para un sistema de partículas libres, es decir con $H_I = 0$.

2.3.8 Operadores de creación y aniquilación

Los operadores de creación y aniquilación en la representación de interacción se escriben según la expresión (2.3.52):

$$\begin{aligned} a_{\vec{k}}(t) &= e^{iH_0^S t} a_{\vec{k}} e^{-iH_0^S t} \\ a_{\vec{k}}^\dagger(t) &= e^{iH_0^S t} a_{\vec{k}}^\dagger e^{-iH_0^S t} \end{aligned} \quad (2.3.56)$$

donde $a_{\vec{k}}$ y $a_{\vec{k}}^\dagger$ son los operadores correspondientes en la representación de Schrödinger o en la representación de interacción a $t=0$. Una expresión más compacta, partiendo de la ecuación de evolución (2.3.55) para $a_{\vec{k}}$:

$$i \frac{\partial a_{\vec{k}}(t)}{\partial t} = [a_{\vec{k}}(t), H_0] \quad (2.3.57)$$

La parte de H_0 que da contribución no nula al conmutador es la asociada a la energía de las partículas creadas por $a_{\vec{k}}^\dagger$, al ser sustituida en (2.3.57) nos da:

$$i \frac{\partial a_{\vec{k}}(t)}{\partial t} = \omega_k a_{\vec{k}}(t) \quad (2.3.58)$$

Resultando que:

$$\begin{aligned} a_{\vec{k}}(t) &= a_{\vec{k}}(0) e^{-i\omega_k t} \\ a_{\vec{k}}^\dagger(t) &= a_{\vec{k}}^\dagger(0) e^{i\omega_k t} \end{aligned} \quad (2.3.59)$$

donde la última resulta la adjunta de la anterior.

2.3.9 Operadores de campo mesónico

Los operadores de campo mesónico neutro se escriben fácilmente en la representación de interacción utilizando los resultados de la sección anterior:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left[a_{\vec{k}} e^{-ikx} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{ikx} \right] \quad (2.3.60)$$

con $k_0 = \omega_k$. El operador de campo en la representación de interacción tiene una expresión similar a la de Schrödinger; simplemente se sustituye el producto escalar de los vectores $\vec{k} \vec{x}$ por el de los cuadvectores kx .

es conveniente descomponer el operador de campo ϕ en las partes que contienen sólo operadores de aniquilación ($\phi^{(+)}$) y sólo de creación ($\phi^{(-)}$): $\phi = \phi^{(+)} + \phi^{(-)}$. Se llaman también partes de frecuencia positiva y negativa respectivamente del campo.

$$\phi^{(+)} |\varphi_0\rangle = 0 \quad (2.3.61)$$

con $|\varphi_0\rangle$ el estado de vacío $|0\rangle$ y $(\phi^{(+)})^\dagger = \phi^{(-)}$.

2.3.10 Relaciones de conmutación covariantes

Las relaciones de conmutación de los campos mesónicos derivadas a partir del formalismo canónico se refieren a tiempos iguales. Para cualquier tiempo utilizamos el desarrollo de los campos del apartado anterior. Calculamos, por tanto, $[\phi(x), \phi(x')]$ para dos puntos espacio-temporales arbitrarios x, x' :

$$[\phi(x), \phi(x')] = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2\omega_k} \left\{ e^{-ik(x-x')} - e^{ik(x-x')} \right\} \quad (2.3.62)$$

Pasando al límite $V \rightarrow \infty$

$$[\phi(x), \phi(x')] = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{\omega_k} \text{sen}(x-x') \quad (2.3.63)$$

Al definir las funciones $\Delta^{(\pm)}$ como:

$$\Delta^{(\pm)} = \pm \frac{-i}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{\omega_k} e^{\mp ikx} \quad (2.3.64)$$

$$\Delta(x) = \Delta^+(x) + \Delta^-(x) = \frac{-1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{\omega_k} \text{sen}(kx)$$

Por lo que el conmutador toma la forma:

$$[\phi(x), \phi(x')] = i\Delta(x-x') \quad (2.3.65)$$

La función Δ es real e impar en x . Además es un escalar ya que el campo ϕ lo es. La relación de conmutación de los campos mesónicos aparece escrita en la ecuación de forma covariante. La invariancia de Lorentz de la función Δ implica que:

$$[\phi(x), \phi(x')] = i\Delta(x-x') = 0 \quad \text{para} \quad (x-x')^2 < 0 \quad (2.3.66)$$

ya que $[\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t)] = i\Delta(x - x', 0) = 0$, como corresponde al conmutador con tiempos iguales. Los campos ϕ en puntos x, x' separados una distancia “espacial”, conmutan. Este resultado es una condición de causalidad y representa una de las conexiones más importantes entre la mecánica cuántica y la teoría de la relatividad. Implica que las medidas de campos hermitianos (ϕ) en dos puntos, x y x' , sólo pueden interferir entre sí si esos puntos están conectados por una señal que viaje a una velocidad igual o inferior a la de la luz; $|\vec{x} - \vec{x}'| \leq |t - t'| \quad ((x - x')^2 > 0)$.

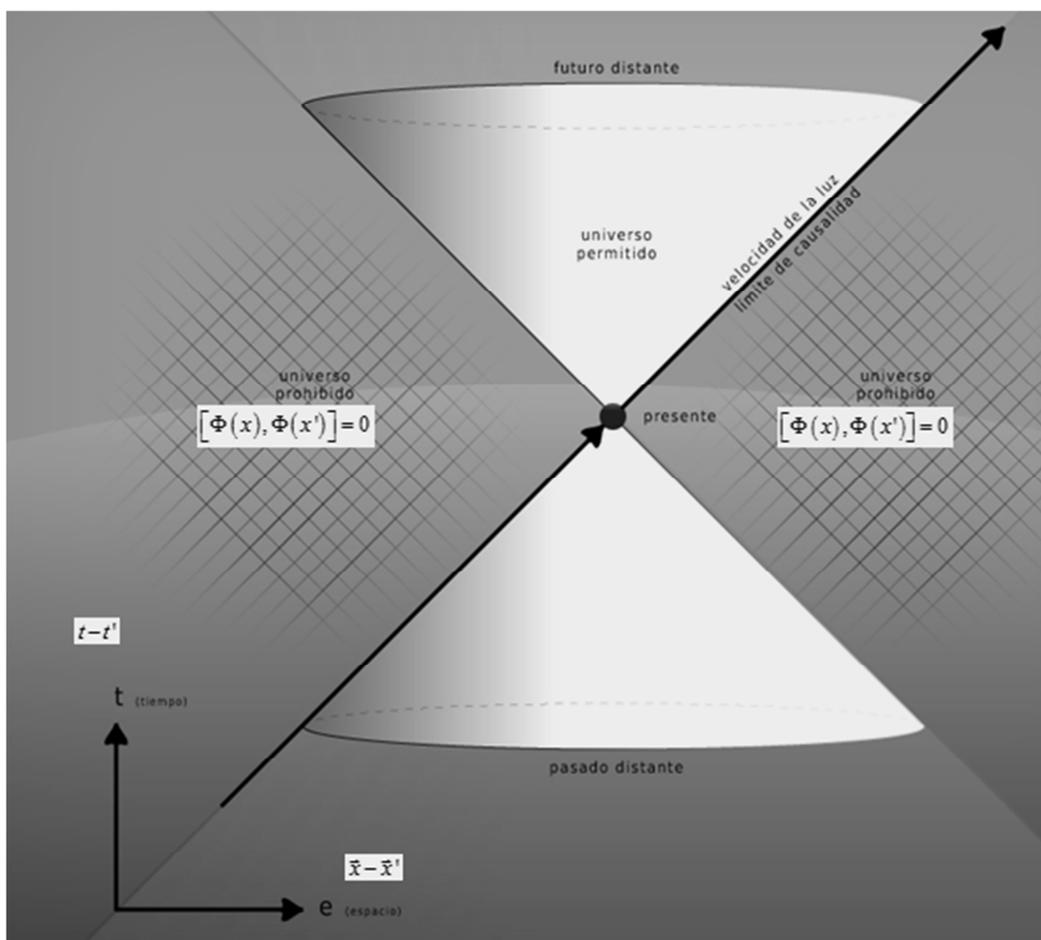


Figura 2.3-1 En la zona rayada el conmutador de los campos mesónicos es 0 y por tanto sus respectivas medidas no interfieren. Sólo en el cono de luz es posible una interferencia¹⁴.

¹⁴ Dibujo original de <http://simetriada.wordpress.com/2012/09/18/cono-de-luz/>

El propagador del campo mesónico

En el caso del campo mesónico neutro (con el uso de la contracción de los operadores), el propagador resulta:

$$\underbrace{\phi(x)\phi(x')} = \begin{cases} \langle 0 | \phi(x)\phi(x') | 0 \rangle = i\Delta^{(+)}(x-x') & \text{para } t > t' \\ \langle 0 | \phi(x')\phi(x) | 0 \rangle = -i\Delta^{(-)}(x'-x) & \text{para } t' > t \end{cases} \quad (2.3.67)$$

Debemos recordar que se llama contracción de dos operadores, ϕ_1 , ϕ_2 , al valor esperado en el vacío de su producto temporal de Wick.

$$\underbrace{\phi(x)\phi(x')} = \langle 0 | T(\phi(x)\phi(x')) | 0 \rangle \quad (2.3.68)$$

Definimos una nueva función Δ_F como:

$$\Delta_F(x) = \begin{cases} +\Delta^{(+)}(x) & \text{para } t > 0 \\ -\Delta^{(-)}(x) & \text{para } t < 0 \end{cases} \quad (2.3.69)$$

La representación integral de Δ_F sería:

$$\Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_F} d^4k \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2} \quad (2.3.70)$$

con C_F el camino de integración de Feynman de la Figura 2.3-2. Así, el propagador se escribe de forma compacta:

$$\underbrace{\phi(x)\phi(x')} = i\Delta_F(x-x') \quad (2.3.71)$$

Esta representación del propagador tiene la ventaja de poner de manifiesto su covariancia. En otras palabras, escribirlo en función de $\Delta^{(\pm)}$ depende de que t sea mayor o menor que t' y, por tanto, del sistema de referencia escogido. Sin embargo considerar ambos casos a la vez, $t \geq t'$, conduce a la expresión covariante $\Delta_F(x)$.

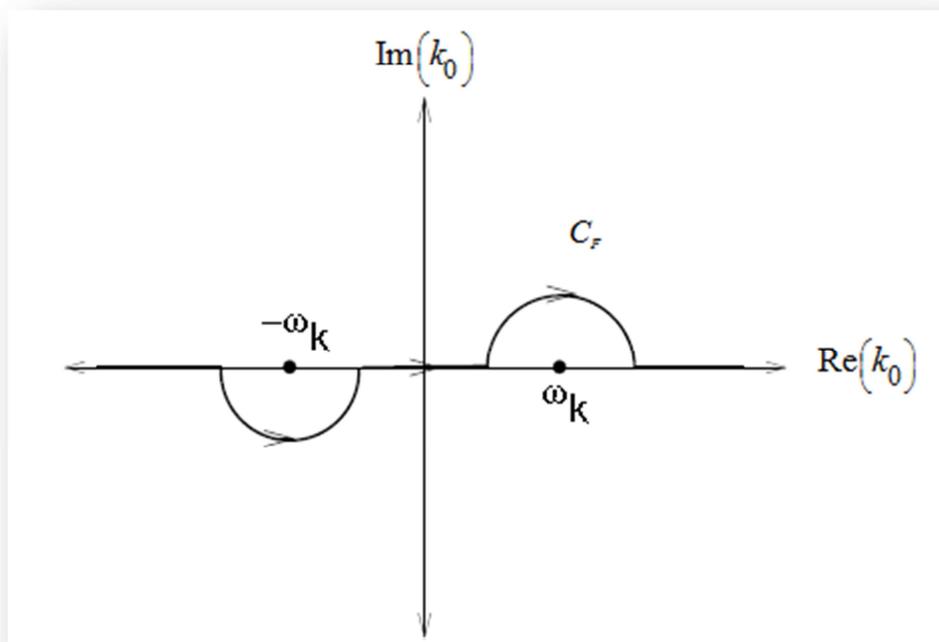


Figura 2.3-2 Camino de integración C_F en el plano complejo¹⁵ k_0

En el espacio de momentos la ecuación (2.3.70) toma su forma:

$$\Delta_F(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (2.3.72)$$

¹⁵ Dibujo original http://huespedes.cica.es/aliens/dfamnus/cursos/tcc/capitulo_6_p71.

2.4 Potencial de Yukawa

2.4.1 Hamiltoniano de Interacción

Consideremos la interacción de piones neutros con nucleones, suponiendo la siguiente densidad hamiltoniana:

$$\mathcal{H}_I(x) = g\rho(x)\phi(x) \quad (2.4.1)$$

que debe ser añadida a la de los campos (o partículas) libres. Esta expresión es análoga a la que representa la interacción electrodinámica. Para una densidad de corriente de carga eléctrica $e S_\mu$, interactuando con el campo electromagnético A_μ , ésta viene dada por:

$$\mathcal{H}_I(x) = e S_\mu(x)A^\mu(x) \quad (2.4.2)$$

En (2.4.1), g representa la intensidad de la interacción; $\rho(x)$, la densidad de las partículas “cargadas” (en este caso, los nucleones) y $\phi(x)$, el campo que lleva la interacción (en nuestro caso, los piones).

Dado que, hasta ahora, sólo hemos cuantizado el campo mesónico, vamos a tratar a los nucleones clásicamente y de forma simple (partículas puntuales de masa infinita). Con estas aproximaciones, su densidad puede escribirse:

$$\rho(x) = \sum_{n=1}^N \delta(\vec{x} - \vec{x}_n) \quad (2.4.3)$$

En este modelo tan simple los nucleones no pueden cambiar de estado; por ejemplo, en un proceso de colisión entre ellos no experimentarán retroceso. No tendrá sentido, por tanto, estudiar ese proceso en concreto, u otro similar, con la interacción propuesta.

Considerando el campo ϕ cuantizado, el hamiltoniano de interacción queda:

$$H_I = \frac{g}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left[a_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{x}_n} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i\vec{k}\vec{x}_n} \right] \quad (2.4.4)$$

Este hamiltoniano es lineal en operadores de absorción y creación de mesones y por lo tanto sólo puede alterar el estado de esas partículas. Los nucleones actúan solamente como fuentes o sumideros del campo mesónico. En un problema particular el número de nucleones, N , y sus posiciones $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \dots \vec{x}_N$ permanecen constantes. El estado del sistema viene definido exclusivamente por el de los mesones y éste se puede escribir como combinación lineal de estados con $n_{\vec{k}}$ mesones de momento \vec{k} definido: $|n_1 \dots n_{\vec{k}} \dots\rangle$. El estado de vacío será entonces el estado con los N nucleones presentes y ningún mesón: $|0\rangle$.

Los elementos de matriz del hamiltoniano (2.4.4) distintos de cero son:

$$\left. \begin{aligned} \langle \dots n_{\vec{k}} + 1 \dots | H_I | \dots n_{\vec{k}} \dots \rangle \\ \langle \dots n_{\vec{k}} \dots | H_I | \dots n_{\vec{k}} + 1 \dots \rangle^* \end{aligned} \right\} = \frac{g}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{n_{\vec{k}} + 1}{2\omega_k}} \sum_{n=1}^N e^{-i\vec{k}\vec{x}_n} \quad (2.4.5)$$

que cambian en una unidad el número de ocupación de un único estado \vec{k} , dejando los demás sin variación.

Para resolver el hamiltoniano propuesto usaremos teoría de perturbaciones independiente del tiempo, suponiendo que la intensidad g de la interacción es pequeña. Esta aproximación es grotesca ya que la constante de la interacción fuerte puede ser del orden de la unidad.

2.4.2 Potencial de Yukawa

Hemos consideramos el problema de la fuerza fuerte; es decir, calculamos el cambio de energía, ΔE , entre dos nucleones situados en los puntos \vec{x}_1 y \vec{x}_2 debido a la interacción H_I con los mesones.

El estado del sistema viene dado en primera aproximación por el estado de vacío $|0\rangle$, esto es, sin ningún mesón presente. La energía, en el mismo orden en teoría de perturbaciones, es el valor esperado del hamiltoniano libre, H_0 , en ese estado, que, en principio, corresponde a la suma de las energías de los dos nucleones libres. El exceso de energía debido a la presencia del término H_I en el hamiltoniano viene dado como:

$$\Delta E = \langle 0 | H_I | 0 \rangle + \sum_i \frac{\langle 0 | H_I | i \rangle \langle i | H_I | 0 \rangle}{-E_i} + \dots \quad (2.4.6)$$

donde $|i\rangle$ etiqueta a todos los autoestados de H_0 , en nuestro caso los $|n_1 \dots n_{\vec{k}} \dots\rangle$. E_i es la energía de ese estado i .

Los únicos elementos de matriz distintos de cero en nuestro caso (H_I de la ecuación (2.4.4)) son los dados por (2.4.5). De aquí $\langle 0 | H_I | 0 \rangle = 0$ y por tanto, en el orden más bajo en g :

$$\Delta E = \sum_k \frac{\langle 0 | H_I | \vec{k} \rangle \langle \vec{k} | H_I | 0 \rangle}{-\omega_k} \quad (2.4.7)$$

donde hemos llamado $|\vec{k}\rangle$ al estado con 1 mesón con momento \vec{k} . Utilizando (2.4.5)

$$\Delta E = \frac{-g^2}{V} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2\omega_k^2} \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 e^{i\vec{k}(\bar{x}_n - \bar{x}_m)} \quad (2.4.8)$$

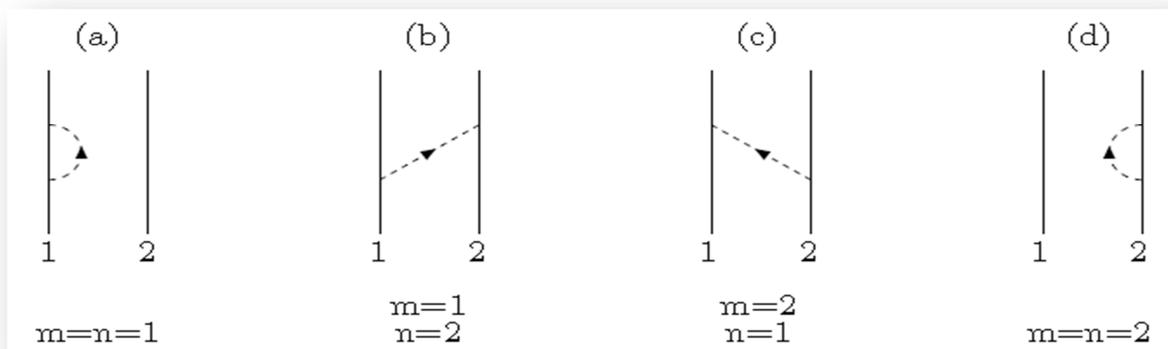


Figura 2.4-1 Primer orden de la interacción nucleón–nucleón¹⁶

Las sumas sobre m y n dan lugar a 4 términos ($m,n=1,2$) representados gráficamente en la Figura 2.4-1. Las líneas sólidas, etiquetadas con 1 y 2, indican los nucleones y las discontinuas, los mesones. El diagrama (a) representa la emisión y reabsorción del mesón en \bar{x}_1 (posición del nucleón 1); el (b), la emisión del mesón en \bar{x}_1 (nucleón 1) y absorción en \bar{x}_2 (nucleón 2), etc. Los diagramas (a) y (d) no están relacionados con la interacción de los dos nucleones entre sí (existirían igual si estuviéramos estudiando un sistema con un único nucleón); sin embargo, modifican las propiedades del nucleón libre mediante la interacción de éste con su propia nube de mesones. Representan los más simples de un

¹⁶ Dibujo original http://huespedes.cica.es/aliens/dfamnus/cursos/tcc/capítulo_7_p78.

conjunto infinito de procesos virtuales que convierten al nucleón “desnudo” (autoestado de H_0) en nucleón “físico” (autoestado de H total). Estos términos, llamados de autoenergía, dan una contribución ∞ , como se puede ver de la ecuación (2.4.8), $m=n$, en el orden más bajo en g . Haciendo tender $V \rightarrow \infty$, se tiene:

$$\frac{-g^2}{V} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\omega_k^2} \xrightarrow{V \rightarrow \infty} \frac{-g^2}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{m^2 + x^2} \quad (2.4.9)$$

($x = |\vec{k}|$), que diverge linealmente en el límite superior $x \rightarrow \infty$. Estas divergencias se pueden eliminar incorporándolas a las propiedades de la partícula física.

La interacción de los dos nucleones, en el orden más bajo, vendría entonces representada por los diagramas con $m \neq n$: (b) y (c). De la ecuación (2.4.8), tomando de nuevo el límite $V \rightarrow \infty$, queda

$$\Delta E = \frac{-g^2}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{m^2 + \vec{k}^2} \left(e^{i\vec{k}\vec{x}} + e^{-i\vec{k}\vec{x}} \right) = \frac{-g^2 e^{-mr}}{4\pi r} \quad (2.4.10)$$

donde $r = |\vec{x}| = |\vec{x}_2 - \vec{x}_1|$. La ecuación (2.4.10) es el famoso potencial de Yukawa que representa la interacción entre dos nucleones separados una distancia r . Es completamente análogo al potencial de Coulomb, $1/r$, entre dos cargas eléctricas salvo en el término e^{-mr} , que hace que el alcance del potencial sea finito. Este es del orden de la longitud de onda Compton del mesón ($1/m$). Conociendo el alcance del potencial nuclear (del orden del tamaño del núcleo) se puede estimar la masa m de la partícula asociada. Yukawa, en 1935, dio un valor para esta masa de unas 200 veces la masa del electrón. La masa observada del pión en 1947, por Powell y colaboradores, fue ≈ 270 veces la masa del electrón.

2.5 *Campo de Dirac: Partículas de espín 1/2*

Hasta ahora hemos visto que el formalismo de cuantización canónica de los campos conduce a bosones. Las partículas que satisfacen el principio de exclusión de Pauli se llaman fermiones. Para obtener las características de los fermiones, es necesario que los operadores de creación y aniquilación verifiquen relaciones de anticonmutación en lugar de las de conmutación obtenidas para los campos mesónicos. Esta modificación fue propuesta en un principio por Jordan y Wigner en 1928.

En esta sección haremos una introducción al formalismo cuántico para las partículas de espín 1/2. En este caso se trata la ecuación de Dirac como una ecuación clásica. Entonces se introduce la densidad Lagrangiana de campo fermiónico de Dirac como aquella que conduce a la ecuación de Dirac y a partir de ella, y basándonos en las simetrías del sistema, se encuentran expresiones para las constantes de movimiento de éste.

2.5.1 **Campo fermiónico**

Las ecuaciones de Euler–Lagrange para la densidad Lagrangiana que se proponga deben coincidir formalmente con la ecuación de onda para una partícula relativista, en este caso fermiónica.

Proponemos la densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi \quad (2.5.1)$$

que conduce a la ecuación de Dirac. Esta expresión corresponde a la forma más sencilla de construir una función escalar de $\Psi(x)$ y sus derivadas. En (2.5.1), $\bar{\Psi}$ se define como

$$\bar{\Psi}(x) = \Psi^\dagger(x) \gamma^0 \quad (2.5.2)$$

donde los matrices 4x4 de Dirac están dadas por:

$$\gamma^0 = \beta \quad ; \quad \gamma^i = \beta \alpha_i, \quad i=1,2,3 \quad (2.5.3)$$

Las cuales obedecen las reglas de anticonmutación:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (2.5.4)$$

Y las condiciones de hermiticidad:

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \Rightarrow \begin{cases} \gamma^{0\dagger} = \gamma^0 \\ \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i \end{cases} \quad \text{con } i=1,2,3 \quad (2.5.5)$$

El campo Ψ consta de cuatro componentes ($\Psi_r, r=1,2,3,4$) que deben satisfacer las ecuaciones de campo asociadas con la densidad Lagrangiana (2.5.1):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}_r} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi}_r)} = 0 \quad \rightarrow \quad (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) = 0 \quad (2.5.6)$$

Coincidiendo formalmente con la ecuación de Dirac.

Una solución particular de la ecuación es:

$$\Psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} u_r(p) e^{-ipx} \quad (2.5.7)$$

Donde el espinor en el espacio de momentos está dado por $u_r(p)$. Solución de la ecuación

$$(\not{p} - m)u_r(p) = 0 \quad (2.5.8)$$

Usando la condición de normalización:

$$u_r^\dagger(p)u_r(p) = \frac{E_p}{m}; \quad E_p = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \quad (2.5.9)$$

se verifica $\int_V \Psi_p^\dagger(x)\Psi_p(x)d^3\vec{x} = 1$.

Los espinores verifican:

$$\left. \begin{aligned} (\not{p} - m)u_r(\vec{p}) &= 0 \\ \frac{\vec{\Sigma}\vec{p}}{|\vec{p}|}u_r(\vec{p}) &= (-1)^{r+1}u_r(\vec{p}) \\ (\not{p} + m)v_r(\vec{p}) &= 0 \\ \frac{\vec{\Sigma}\vec{p}}{|\vec{p}|}v_r(\vec{p}) &= (-1)^{r+1}v_r(\vec{p}) \end{aligned} \right\} r=1,2 \quad (2.5.10)$$

La expresión general del campo $\Psi(x)$ se escribe:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \sum_{r=1}^2 \left(c_r(\vec{p})u_r(\vec{p})e^{-ipx} + d_r^\dagger(\vec{p})v_r(\vec{p})e^{ipx} \right) \quad (2.5.11)$$

con E_p como el definido en (2.5.9).

2.5.2 Operador energía

El operador hamiltoniano o energía del sistema se puede definir a partir del tensor

τ_0^0 , usando la Lagrangiana descrita en (2.5.1):

$$\mathcal{H} = -\tau_0^0 = \Psi^\dagger \left[\alpha_j (-i\partial_j) + \beta m \right] \Psi \quad (2.5.12)$$

Por otro lado,

$$E = \int_V d^3\vec{x} \bar{\Psi} \left[-i\gamma^j \partial_j + m \right] \Psi \quad (2.5.13)$$

De manera alterna, la energía se puede obtener mediante la expresión de la densidad hamiltoniana (2.2.29), en cuyo caso debemos encontrar los campos conjugados asociados a $\bar{\Psi}_r$ y Ψ_r (2.2.26) usando la densidad Lagrangiana escrita como:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \left[\bar{\Psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \Psi) - (\partial_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi \right] - m \bar{\Psi} \Psi \quad (2.5.14)$$

La densidad Lagrangiana descrita en (2.5.14) nos conduce a la mismas ecuaciones de movimiento. Además, nos permite definir las variables conjugadas, π_Ψ y $\pi_{\bar{\Psi}}$, asociadas a Ψ y $\bar{\Psi}$ respectivamente.

$$\pi_{\Psi_r} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}_r} = \frac{i}{2} \Psi_r^\dagger ; \quad \pi_{\bar{\Psi}_r} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\Psi}}_r} = -\frac{i}{2} (\gamma^0 \Psi)_r = -\frac{i}{2} \bar{\Psi}_r^\dagger \quad (2.5.15)$$

De donde obtenemos

$$\mathcal{H} = -\frac{i}{2} \left[\bar{\Psi} \gamma^j (\partial_j \Psi) - (\partial_j \bar{\Psi}) \gamma^j \Psi \right] + m \bar{\Psi} \Psi \quad (2.5.16)$$

El operador energía sería:

$$E = \int_V d^3 \vec{x} \left\{ -\frac{i}{2} \left[\bar{\Psi} \gamma^j (\partial_j \Psi) - (\partial_j \bar{\Psi}) \gamma^j \Psi \right] + m \bar{\Psi} \Psi \right\} \quad (2.5.17)$$

Al sustituir la solución general del campo $\Psi(x)$ y su correspondiente $\bar{\Psi}(x)$ en cualquiera de las dos expresiones encontradas para la energía:

$$E = \sum_{\vec{p}} E_p \sum_{r=1,2} : c_r^\dagger(\vec{p}) c_r(\vec{p}) - d_r(\vec{p}) d_r^\dagger(\vec{p}) : \quad (2.5.18)$$

Donde se ha suprimido la energía del vacío mediante el uso del producto normal.

El producto u orden normal denotado por una acotación de dos puntos para los campos fermiónicos, consiste en poner siempre a la derecha los operadores de destrucción, es decir, como si conmutarán: $:a_1 a_1^\dagger a_2 a_3 a_2^\dagger := a_1^\dagger a_2^\dagger a_1 a_2 a_3$. Tiene la propiedad de que su valor esperado en el vacío es nulo.

Los operadores verifican la regla: $\{c_r(\vec{p}), c_s^\dagger(\vec{p}')\} = \{d_r(\vec{p}), d_s^\dagger(\vec{p}')\} = \delta_{rs} \delta_{\vec{p}, \vec{p}'}$,

Definiendo los operadores número de partículas tipo c y d respectivamente como:

$$N_r^c(\vec{p}) = \sum_{\vec{p}} c_r^\dagger(\vec{p}) c_r(\vec{p}) \quad y \quad N_r^d(\vec{p}) = \sum_{\vec{p}} d_r^\dagger(\vec{p}) d_r(\vec{p}) \quad (2.5.19)$$

Es posible encontrar la expresión de algunos observables en función de los operadores número, dándonos características de la partícula asociadas al campo fermiónico.

2.5.3 Momento lineal

El operador momento lineal del sistema se define mediante el tensor τ_j^0 junto con la densidad Lagrangiana (2.5.1):

$$P^j = -P_j = + \int d^3 \vec{x} \tau_j^0 \quad (2.5.20)$$

Con

$$\tau_j^0 = -i \Psi_r^\dagger \partial_j \Psi_r = -i \Psi^\dagger \partial_j \Psi \quad (2.5.21)$$

Usando los operadores número:

$$\vec{P} = \sum_{\vec{p}} \vec{p} \sum_{r=1,2} (N_r^c(\vec{p}) + N_r^d(\vec{p})) \quad (2.5.22)$$

2.5.4 Momento angular

La densidad Lagrangiana del campo fermiónico debe ser invariante bajo rotaciones y por tanto conservar el momento angular. En particular, una rotación de un ángulo θ alrededor del eje $\overline{0Z}$ que cambia las coordenadas

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu \quad (2.5.23)$$

Con Λ_ν^μ dado por:

$$\Lambda_\nu^\mu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5.24)$$

y los campos:

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x') = S_{rot} \Psi(x) \quad \text{con} \quad S_{rot}(\theta) = e^{i\theta \frac{\sigma^{12}}{2}} \quad (2.5.25)$$

(2.5.23) es una transformación de simetría asociada a la conservación de la componente 3 del momento angular. Se comprueba, aplicando el teorema de Noether, que el momento angular consta de una parte intrínseca y otra orbital. La parte intrínseca se encuentra relacionada con la matriz $\sigma^{12}/2$ de autovalores ± 1 .

$$J^3 = \int d^3\vec{x} \Psi^\dagger(x) \left[\vec{x} \wedge (-i\vec{\nabla}) \right]^3 \Psi(x) + \int d^3\vec{x} \Psi^\dagger(x) \left[\frac{\sigma^{12}}{2} \right] \Psi(x) \quad (2.5.26)$$

Donde se ha usado el producto exterior \wedge (Teoría Grassmann).

2.5.5 Carga

La densidad Lagrangiana (2.5.1) es invariante bajo una transformación gauge global de los campos $\Psi_r(x)$ y $\bar{\Psi}_r(x)$.

$$\begin{aligned}\Psi_r &\rightarrow \Psi'_r = e^{-iq}\Psi_r \\ \bar{\Psi}_r &\rightarrow \bar{\Psi}'_r = e^{iq}\bar{\Psi}_r\end{aligned}\quad (2.5.27)$$

con q constante. Le corresponde una densidad de corriente conservada j^μ :

$$j^\mu = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_r)} \delta \Psi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\Psi}_r)} \delta \bar{\Psi}_r \right] := q : \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \Psi(x) : \quad (2.5.28)$$

La constante de movimiento Q está dada por:

$$Q = \int d^3 \vec{x} : j^0 := d^3 \vec{x} : \Psi^\dagger(x) \Psi(x) : \quad (2.5.29)$$

Y desarrollando los campos en función de c_r, c_s^\dagger, d_r y d_r^\dagger :

$$Q = q \sum_{\vec{p}} \sum_{r=1,2} (N_r^c(\vec{p}) - N_r^d(\vec{p})) \quad (2.5.30)$$

2.5.6 Propagador del campo fermiónico

La definición del propagador del campo fermiónico es la contracción de los campos $\Psi(x)$ y $\bar{\Psi}(x)$.

$$\underbrace{\Psi_\beta(x)} \underbrace{\bar{\Psi}_\alpha(x')} = - \underbrace{\bar{\Psi}_\alpha(x')} \underbrace{\Psi_\beta(x)} = i S_{F \beta\alpha}(x-x') \quad (2.5.31)$$

donde:

$$S_{F \alpha\beta}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_F} d^4 p \frac{(\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2} e^{-i p x} \quad (2.5.32)$$

Definiendo:

$$(\not{p} - m)^{-1} = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (2.5.33)$$

La integral queda como:

$$S_{F \alpha\beta}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{e^{-i p x}}{(\not{p} + m)} \quad (2.5.34)$$

$i\epsilon$ con el sentido usual asignado a las integrales de Feynman.

2.6 Campo fotónico

2.6.1 Lagrangiana de la Electrodinámica Cuántica (QED)

Iniciamos con la Lagrangiana de una partícula libre:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m \right) \psi \quad (2.6.1)$$

La ecuación (2.6.1) describe el campo ψ de un electrón libre, γ^μ son las matrices de Dirac que satisfacen el anticonmutador

$$\{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} = 2g^{\mu\nu} \quad (2.6.2)$$

con $g^{\mu\nu}$ el tensor métrico. Imponemos la condición de invariancia de gauge, es decir queremos que la ecuación (2.6.2) sea invariante bajo una transformación local U(1) de manera que

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi' = e^{iq\alpha(x)}\psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = e^{-iq\alpha(x)}\bar{\psi} \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

donde $\alpha(x)$ es una función y q la carga asociada al quark, introducimos el campo vectorial del fotón $A_\mu(x)$ que se transforma bajo la transformación gauge como

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu - \partial_\mu \alpha(x) \quad (2.6.4)$$

la derivada covariante está definida como

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu \quad (2.6.5)$$

la nueva Lagrangiana tiene la forma

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi} \left(i\gamma^\mu D_\mu - m \right) \psi = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi \quad (2.6.6)$$

La ecuación (2.6.6) es invariante gauge y contiene la Lagrangiana libre más una interacción.

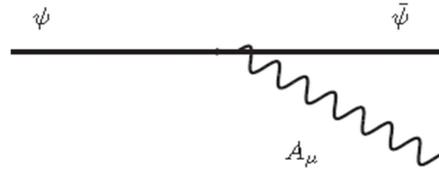


Figura 2.6-1 Diagrama de la interacción para la Electrodinámica Cuántica.

La Lagrangiana descrita en la ecuación (2.6.6) debe completarse, es necesario añadir un término que describa el campo electromagnético libre:

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi} \left(i\gamma^\mu D_\mu - m \right) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.6.7)$$

La invariancia gauge implica que la masa del fotón sea 0.

Con la definición del tensor antisimétrico:

$$F_{\mu\nu} \equiv \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \right) \quad (2.6.8)$$

El tensor $F^{\mu\nu}$ puede identificarse con el tensor del campo electromagnético:

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.6.9)$$

La densidad Lagrangiana libre se reduce a:

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.6.10)$$

2.6.2 Ecuaciones de campo

La evolución del campo A_μ viene dada por las ecuaciones de Euler-Lagrange derivadas de la densidad Lagrangiana libre:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu}(x) = 0 \quad (2.6.11)$$

Las que se obtienen de la forma de $F^{\mu\nu}$:

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu}(x) + \partial^\mu F^{\nu\lambda}(x) + \partial^\nu F^{\lambda\mu}(x) = 0 \quad (2.6.12)$$

Lo cual coincide con las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (2.6.13)$$

Al considerar la densidad Lagrangiana de interacción descrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I &= -q \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \Psi(x) A_\mu(x) = -j^\mu(x) A_\mu(x) \\ \partial_\nu F^{\mu\nu}(x) &= j^\mu \end{aligned} \quad (2.6.14)$$

Donde j^μ es la densidad de corriente de las partículas cargadas.

Imponiendo las condiciones gauge de Lorentz:

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (2.6.15)$$

Las ecuaciones de campo se reducen a:

$$\square A^\mu = 0 \quad (2.6.16)$$

La cual coincide con la ecuación de

-Gordon para campos A^μ de masa nula. La solución general para cada campo A^μ está dada por:

$$A^\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \sum_{m=0}^3 \left[\varepsilon_m^\mu(\vec{k}) a_m(\vec{k}) e^{-ikx} + \varepsilon_m^{\mu*}(\vec{k}) a_m^*(\vec{k}) e^{ikx} \right] \quad (2.6.17)$$

Con las definiciones $\omega_{\vec{k}} = |\vec{k}|$ y el uso de los cuadvectores de polarización los cuales describen los 4 grados de libertad para cada \vec{k} .

Los criterios para escoger los vectores de polarización son variados, dependiendo del tipo de polarización que se quiere estudiar (lineal, circular, elíptica, etc). Al elegir vectores reales que cumplen con las relaciones de ortonormalidad y cierre siguientes:

$$\varepsilon_m(\vec{k}) \varepsilon_n(\vec{k}) = -\zeta_m \delta_{mn} \quad (2.6.18)$$

$$\sum_{m=0}^3 \zeta_m \varepsilon_m^\mu(\vec{k}) \varepsilon_m^\nu(\vec{k}) = -g^{\mu\nu} \quad (2.6.19)$$

Podríamos usar cualquier combinación de vectores que cumplan con las condiciones descritas en (2.6.18) y (2.6.19) como por ejemplo podemos escoger:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^\mu(\vec{k}) &\equiv (1, 0, 0, 0) \\ \varepsilon_m^\mu(\vec{k}) &\equiv (0, \vec{\varepsilon}_m(\vec{k})), \quad m = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2.6.20)$$

Los vectores $\vec{\varepsilon}_1(\vec{k})$ y $\vec{\varepsilon}_2(\vec{k})$ son mutuamente ortogonales entre sí y verifican la condición:

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{\varepsilon}_m(\vec{k}) &= 0, & m = 1, 2 \\ \vec{\varepsilon}_m(\vec{k}) \cdot \vec{\varepsilon}_n(\vec{k}) &= \delta_{mn}, & m, n = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2.6.21)$$

El vector $\vec{\varepsilon}_3(\vec{k})$ es un vector unitario en la dirección de \vec{k} :

$$\vec{\varepsilon}_3(\vec{k}) = \frac{\vec{k}}{\omega_k} \quad (2.6.22)$$

Por tanto $\vec{\varepsilon}_1(\vec{k})$ y $\vec{\varepsilon}_2(\vec{k})$ son ortogonales a $\vec{\varepsilon}_3(\vec{k})$ de tal forma que $\vec{\varepsilon}_3(\vec{k}) = \vec{\varepsilon}_1(\vec{k}) \times \vec{\varepsilon}_2(\vec{k})$. $\vec{\varepsilon}_0(\vec{k})$ describe una polarización escalar o temporal. $\vec{\varepsilon}_m(\vec{k})$ describe polarizaciones transversales para valores de $m=1$ y $m=2$. $\vec{\varepsilon}_3(\vec{k})$ describe una polarización longitudinal.

2.6.3 Propagador del fotón

El propagador se define con la contracción definida para el operador asociado, en este caso, usando la definición de $\Delta_F(x)$ dada en (2.3.70):

$$\begin{aligned} A^\mu(x) A^\nu(x') &= i D_F^{\mu\nu}(x-x') \\ D_F^{\mu\nu}(x) &= -g^{\mu\nu} \lim_{m \rightarrow 0} \Delta_F(x) \end{aligned} \quad (2.6.23)$$

2.7 Matriz S

Las partículas pueden crearse, destruirse y colisionar, por lo que la densidad Lagrangiana del sistema debe contemplar la interacción entre los campos. Las ecuaciones de campo no lineales, acopladas para determinadas condiciones, se resuelven mediante teoría de perturbaciones. Se divide el hamiltoniano del sistema en una parte libre y el término de interacción que se trata como una permutación.

El desarrollo de la matriz S de Dyson contiene la información completa de todos los procesos de colisión y es usada para extraer la amplitud de transición en cualquier orden en teoría de perturbaciones.

2.7.1 Interacciones

Las densidades Lagrangianas se componen de una parte asociada a los campos libres y otra que contiene la interacción entre ellos.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I \quad (2.7.1)$$

El hamiltoniano del sistema se divide en una parte libre H_0 y otra de interacción H_I .

$$H = H_0 + H_I \quad (2.7.2)$$

Cuando la densidad Lagrangiana no depende de las derivadas temporales de los campos, los campos canónicos conjugados de los campos interactuantes coinciden con los de los campos libres.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\psi}_\alpha} \quad (2.7.3)$$

El cumplimiento de (2.7.3) implica que la densidad hamiltoniana de interacción \mathcal{H}_I coincide con la densidad Lagrangiana de interacción \mathcal{L}_I con el signo opuesto.

2.7.2 Matriz S

El estado del sistema $|\Phi(t)\rangle$, evoluciona en la representación de interacción según la ecuación:

$$i \frac{\partial |\Phi(t)\rangle}{\partial t} = H_I(t) |\Phi(t)\rangle \quad (2.7.4)$$

con

$$H_I(t) = e^{iH_0 t} H_I^S e^{-iH_0 t} \quad (2.7.5)$$

El superíndice S denota a la representación de Schrödinger. Para problemas de colisiones se especifica totalmente el estado inicial del sistema y se propone encontrar el estado final. La matriz de colisión S se define como:

$$\begin{aligned} |\Phi(+\infty)\rangle &= S |\Phi(-\infty)\rangle \\ |\Phi(t)\rangle &= |\Phi(-\infty)\rangle - i \int_{-\infty}^t dt_1 H_I(t_1) |\Phi(t_1)\rangle \end{aligned} \quad (2.7.6)$$

De donde S se puede escribir en términos de la densidad hamiltoniana o con el hamiltoniano de interacción, en ambos P es el producto cronológico de Dyson:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_n P \{ \mathcal{H}_I(x_1) \mathcal{H}_I(x_2) \cdots \mathcal{H}_I(x_n) \} \quad (2.7.7)$$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 t_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 t_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} d^4 t_n P \{ H_I(t_1) H_I(t_2) \cdots H_I(t_n) \} \quad (2.7.8)$$

Cuando las interacciones son independientes de las derivadas temporales de los campos se tiene que $\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}$.

2.7.3 Estados inicial y final

Con el uso de la hipótesis adiabática o encendido progresivo de la constante de acoplamiento es posible describir los estados inicial y final mediante partículas desnudas, autoestados de H_0 .

La hipótesis adiabática supone que las partículas están desnudas en $t \rightarrow -\infty$ y $t \rightarrow +\infty$. La constante de acoplamiento se considera 0 y va aumentando progresivamente hasta alcanzar su valor a $t = -T$. La constante mantiene su valor en el intervalo $(-T, T)$. La constante comienza a disminuir adiabáticamente hasta volver a anularse cuando $t \rightarrow +\infty$. La hipótesis se basa en el hecho de que el proceso de colisión no puede depender de la descripción que se haga del sistema mucho tiempo antes ($t \ll -\tau$) o mucho tiempo después ($t \gg +\tau$) de ésta. Donde $(-\tau, \tau)$ es un intervalo de tiempo mucho menor que $(-T, T)$.

En el orden más bajo en la constante de acoplamiento de H_I , en teoría de perturbaciones, la interacción sólo puede producir el choque. Para vestir a las partículas se necesita considerar órdenes más altos. Se puede tomar el límite $T \rightarrow \infty$ sin problemas de divergencias y trabajar desde el principio con la interacción total H_I , esto proporciona un buen resultado para constantes de acoplamiento pequeñas.

2.7.4 Unitariedad de la matriz S

La unitariedad de la matriz de colisión implica la conservación de la probabilidad. Esto juega el papel de la conservación de partículas que se requiere en mecánica cuántica no relativista y es más general ya que esta teoría permite la creación y destrucción de éstas.

2.8 Diagramas de Feynman

Son representaciones gráficas de la interacción entre las partículas elementales en un modelo de régimen perturbativo. Los diagramas contienen la representación de las partículas iniciales, las interacciones y las partículas finales.

El punto de partida para los diagramas es una Lagrangiana, los diagramas de Feynman representarán un desarrollo perturbativo de la teoría cuántica asociada a la Lagrangiana, en esencia es un desarrollo en serie de potencias de uno o más parámetros.

2.8.1 Líneas externas

Representan a las partículas que toman parte en la interacción. Hay que asignar una línea distinta a cada una de las partículas involucradas en el proceso.

2.8.2 Vértices

Representan la interacción de la densidad hamiltoniana. Los vértices marcan los puntos donde los propagadores se unen. Cada propagador tiene un orden de contratermino asociado a él.

2.8.3 Reglas de Feynman

Las reglas para crear diagramas de Feynman dependen del modelo con el que se esté trabajando. En general se pueden dar 6 pasos que todos los modelos siguen:

- 1) Seleccionar la topología a utilizar. La topología es un grupo de líneas (propagadores) conectados a un grupo de puntos (vértices).

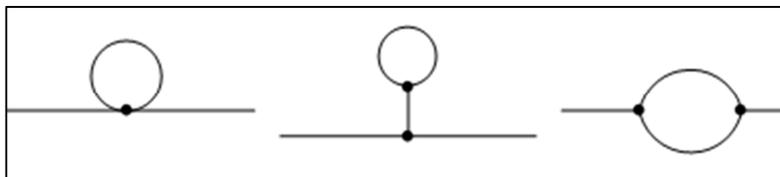


Figura 2.8-1 Topología con 1 lazo, 1 entrada y 1 salida.

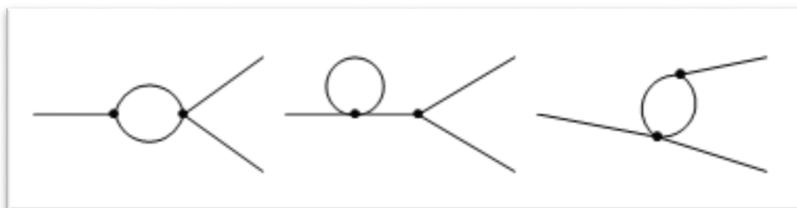


Figura 2.8-2 Topología con 1 lazo, 1 entrada y 2 salidas.

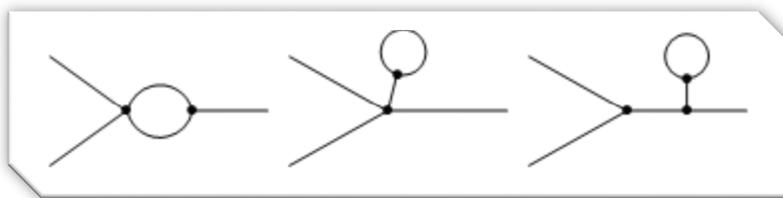


Figura 2.8-3 Topología con 1 lazo, 2 entrada y 1 salida.

- 2) Marcar los contratérminos. Para cálculos de lazos de orden superiores, es necesario hacer correcciones mediante la incorporación de los contratérminos. En algunos casos, es necesario hacer correcciones para lazos simples.

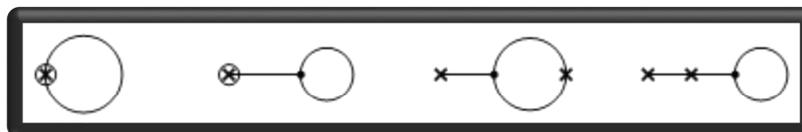


Figura 2.8-4 Topología con 1 lazo y contratérminos de orden 2.

- 3) Asignar una dirección a cada línea. Etiquetar cada línea con su campo correspondiente.

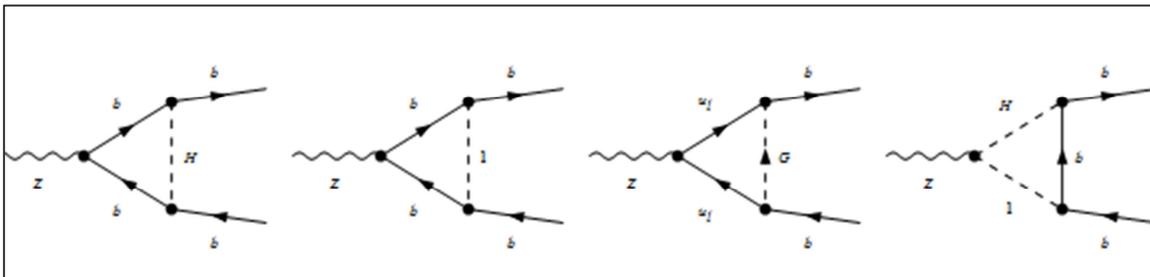


Figura 2.8-5 Topología con 1 lazo, 1 entrada de campo vectorial y 2 salidas de campos fermiónicos.

- 4) Cada línea adquiere un factor de i veces su propagador.

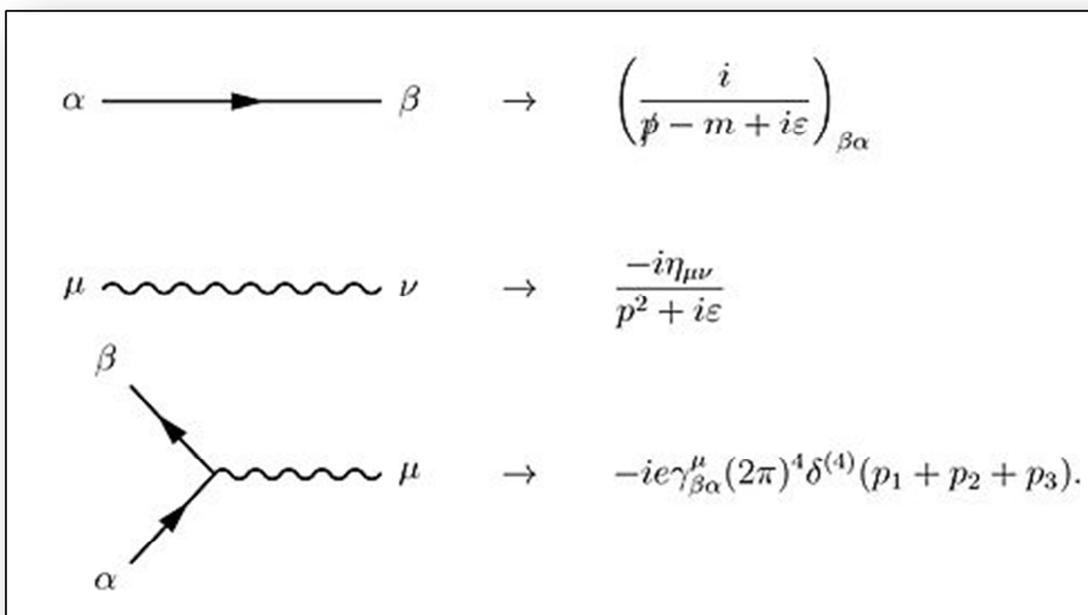


Figura 2.8-6 Ejemplos de propagadores asignados a las líneas de los diagramas de Feynman¹⁷.

¹⁷ Gráfica tomada de: http://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_electrodynamics.

- 5) A cada vértice se le asigna un factor que contiene la constante de acoplamiento.

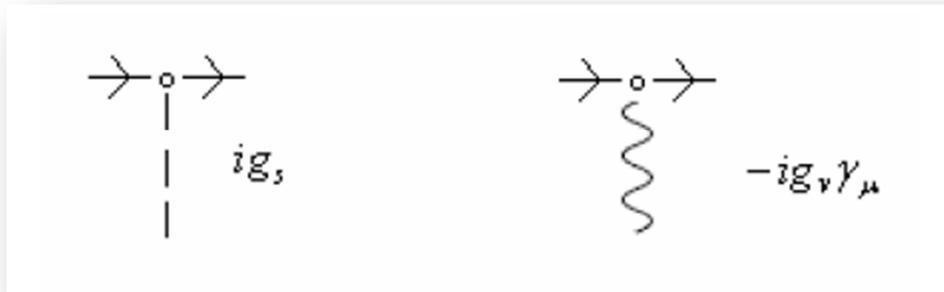


Figura 2.8-7 Ejemplos de constantes de acoplamiento asignadas a los vértices.

- 6) La expresión final del elemento de matriz asociado al diagrama se obtiene integrando respecto a los cuádrimomentos asociados a las líneas internas.

2.9 Conclusiones del capítulo

La plataforma teórica que unifica la Mecánica Cuántica y la Relatividad Especial es la Teoría Cuántica de Campos. Está caracterizada por valores finitos de la velocidad de la luz y la constante de Planck. Cambia los conceptos de partículas relativistas a campos relativistas.

Una teoría relativista cuántica totalmente coherente debe formularse para campos que pueden estar libres o interactuando con otros campos. La cuantización de los campos conduce a un formalismo que permite la posibilidad de cambiar el número de partículas, permitiendo la creación y aniquilación de las mismas.

CAPÍTULO III

PROPIEDADES DEL MESÓN SIGMA EN EL VACÍO

3.1 *Introducción*

En este capítulo calcularemos las propiedades físicas del mesón sigma cuando este se acopla a dos piones virtuales. La masa, ancho y constante de acoplamiento con los piones serán calculados mediante el uso del ancho crítico. Utilizaremos la definición de Breit-Wigner y la función espectral para comparar los resultados obtenidos para la masa y el ancho del mesón sigma con los valores reportados en los experimentos realizados por el Fermilab y el BES.

La distribución relativista de Breit-Wigner surge del propagador de una partícula inestable y es utilizada para la modelación de las resonancias en la física de altas energías. La definición de Breit-Wigner y la función espectral se utilizan para calcular la masa y el ancho de las resonancias tanto en modelos teóricos como experimentales.

En el caso de la resonancia del mesón sigma se ha reportado que el pico de la función espectral no coincide con la masa BW, que se define como la masa observable, es decir, el pico de la resonancia. Por otro lado, la anchura de la resonancia de Breit-Wigner no reproduce los valores proporcionados por el PDG.

En este capítulo demostraremos que al acotar apropiadamente las posibles soluciones de las propiedades del mesón sigma es posible obtener valores próximos a los reportados por los grupos experimentales.

3.2 Formalismo

Las resonancias son hadrones de corta vida que se desintegran por medio de la fuerza fuerte en otras partículas más ligeras y generalmente se las considera estados energéticos excitados de otras partículas.

En nuestro trabajo trataremos al mesón sigma como la resonancia de dos piones. Por lo que necesitamos un formalismo que describa las propiedades de una partícula inestable.

3.2.1 Partículas inestables

La vida media de una partícula (τ) está relacionada con el ancho de la partícula (Γ) mediante la ecuación:

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} \quad (3.2.1)$$

Cuando la vida media (Γ^{-1}) es menor a 10^{-12} segundos, el observar directamente este tipo de partículas mediante un experimento se vuelve altamente complicado. Es por eso que se mide la distribución en el centro de masas energéticas (s), esto debido a que aparecen como máximos en la sección eficaz en las colisiones de partículas.

El producto del decaimiento es proporcional al propagador:

$$|G(p)|^2 = \frac{|Z|^2}{(m^2 - s)^2 + m^2\Gamma^2} \quad (3.2.2)$$

En la ecuación anterior Z es una constante de renormalización.

Consideremos el proceso de decaimiento de dos cuerpos en partículas de masa m' . Como $-p^2 \approx m^2$, existe una pequeña variación en el vértice del decaimiento y la podemos aproximar mediante una constante g .

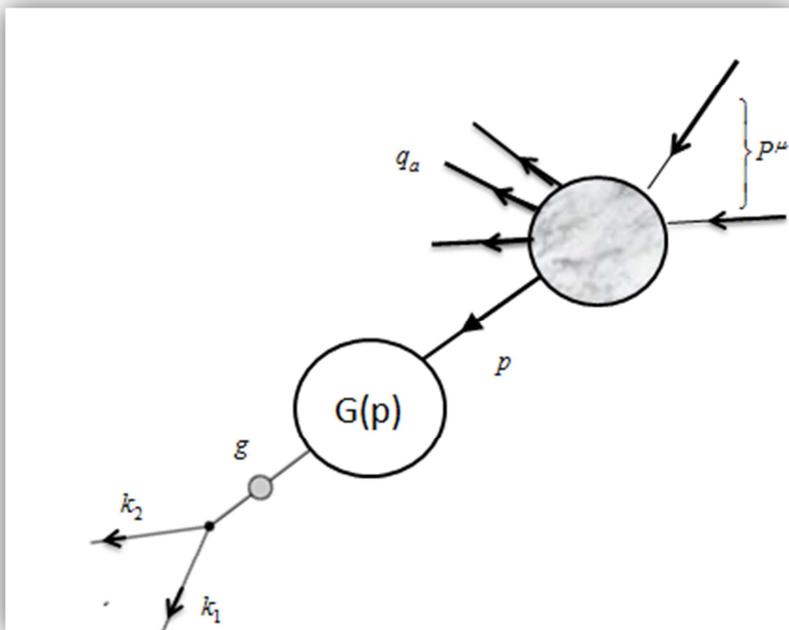


Figura 3.2-1 Partícula inestable que aparece como un estado de resonancia en la producción de dos partículas finales, en un proceso de dispersión inelástica. Las partículas detectadas tienen momento k_1 y k_2 , con $p = k_1 + k_2$. El momento de la partícula no observable se etiqueta con q_a , donde $a=1,2,\dots$. El cuadrimomento total inicial se denota con P^μ .

La sección transversal parcial con una partícula inestable intermedia está dada por:

$$d\sigma = \frac{1}{2} \int_{\Delta} \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_1^0} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_2^0} \int \frac{d^3q_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2q_1^0} \dots \quad (3.2.3)$$

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 + q_1 + \dots - P) |gG(p)\mathcal{M}|^2$$

Δ indica el rango de los momentos sobre los cuales los productos del decaimiento son detectados. La integral sobre el espacio de fase d^3q_1 son aquellas de las partículas que no son detectadas en el experimento. \mathcal{M} la amplitud de producción. Introducimos:

$$1 = \int_{\Delta} (d^4 p) \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p) \quad (3.2.4)$$

En cuyo caso Δ restringe el rango del momento final y por otro lado:

$$1 = \int ds \delta(p^2 + s) \quad (3.2.5)$$

Debido a que la distribución en s es un aumento marcado cuando $s = m^2$ con una corrección pequeña de orden de Γ/m la ecuación (3.2.3) toma la forma:

$$d\sigma = \int ds \int_{\Delta} (d^4 p) \delta(p^2 + s) \frac{g^2}{16\pi} \sqrt{1 - \frac{4(m')^2}{m^2}} \frac{1}{(s - m^2)^2 + m^2 \Gamma^2} \int \frac{(d^3 q_1)}{(2\pi)^3} \frac{1}{2q_1^0} \cdots \delta(p + q_1 \cdots - P) |Z\mathcal{M}|^2 \quad (3.2.6)$$

El factor

$$\frac{1}{p^2 + m^2 - im\Gamma} \quad (3.2.7)$$

se obtiene al hacer la aproximación de la función de autoenergía evaluando en $-p^2 = m^2$. El ancho total del decaimiento estaría dado por:

$$\Gamma = \frac{1}{2m} \frac{g^2}{16\pi} \sqrt{1 - \frac{4(m')^2}{m^2}} \quad (3.2.8)$$

En el límite $\Gamma \rightarrow 0$ y con $d\sigma = \Delta\sigma$:

$$\frac{d\sigma}{d\sqrt{s}} = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma/2}{(\sqrt{s} - m)^2 + \Gamma^2/4} \Delta\sigma_p \quad (3.2.9)$$

Esta es la distribución no-relativista de Breit-Wigner. El ancho total es el ancho medido a la mitad del valor máximo de la curva de distribución. Recordando que el valor máximo de la distribución corresponde a la masa de la resonancia.

3.2.2 Propagador de una partícula inestable

Un propagador es una función de Green que da la amplitud de probabilidad de que una partícula se desplace entre dos puntos en un tiempo dado. También es posible utilizar la función para encontrar la probabilidad de que la partícula se mueva con cierta energía y momento. La partícula que se desplaza puede ser real o virtual. El diagrama de Feynman es una representación de los propagadores de partículas virtuales entre nodos.

En la matriz S existen 3 canales, el canal s , t y u . Estos canales son debido a la necesidad de cumplir con la conservación del cuadrimomentum de las partículas iniciales y finales, así como la conservación de la carga. Supongamos un proceso donde intervienen 2 partículas iniciales y en el estado final se producen 2 partículas. Los tres procesos de dispersión serían:

1. $1+2 \rightarrow 3+4$

2. $1+\bar{3} \rightarrow \bar{2}+4$

3. $1+\bar{4} \rightarrow \bar{2}+3$

Cada número representa a la partícula y los números testados representan a las antipartículas. Los tres procesos se les conocen como canales de cruce. Para lograr la mayor simetría se consideran tres invariantes:

$$1. \quad s = (q_1 + q_2)^2 = (q_3 + q_4)^2$$

$$2. \quad t = (q_1 + q_3)^2 = (q_2 + q_4)^2$$

$$3. \quad u = (q_1 + q_4)^2 = (q_2 + q_3)^2$$

Los estados ligados tienen la relación:

$$\begin{aligned} s + t + u &= h \\ h &= m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

El canal fundamental es el invariante s (I) cuyo significado físico es que representa el cuadrado de la energía total de las partículas que chocan (1 y 2). El canal II y canal III tienen su análogo con los invariantes t y u respectivamente.

En el caso de las resonancias a nosotros nos interesa el canal s , el umbral que debe obedecer la solución del propagador debe de ser igual al obtenido en la ecuación (3.2.8), en caso contrario la partícula no es inestable y por tanto no es una resonancia.

La fórmula relativista de Breit-Wigner procede del propagador de una partícula inestable:

$$\Delta(q^2) \approx (q^2 - m^2 + im\Gamma)^{-1} \quad (3.2.11)$$

ecuación que coincide con el factor de corrección descrito por (3.2.7).

Según el formalismo de Breit –Wigner la masa de la resonancia se encontraría en la parte real del propagador inverso cuando este vale cero y por tanto $q^2 = m^2$.

3.2.3 Función dinámica T_r

La función dinámica T_r describe la resonancia r . Esta función es un objeto fenomenológico. Normalmente, la modelación de la resonancia es mediante la formulación de Breit-Wigner.

La función dinámica T_r se deriva del formalismo de la matriz S . En general, la amplitud para que un estado final f se acople a un estado inicial i está dado por:

$$S_{fi} = \langle f | S | i \rangle \quad (3.2.12)$$

El operador de dispersión S es unitario:

$$SS^\dagger = S^\dagger S = I \quad (3.2.13)$$

El operador Lorentzino \hat{T} es definido por la separación de la probabilidad de que $f = i$, lo que conduce a:

$$\begin{aligned} S &= I + 2iT \\ &= I + 2i\{\rho\}^{1/2} \hat{T} \{\rho\}^{1/2} \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

En este caso I es el operador identidad, ρ es la diagonal en el espacio de fase de la matriz y el canal de la matriz está denotado por i . En particular, si el canal i denota el estado de dos cuerpos ab , se tiene:

$$\rho_{ii} = \rho_i = \frac{2q_i}{m_{ab}} \theta[m_{ab} - (m_a + m_b)] \quad (3.2.15)$$

La masa invariante del sistema se encontraría dado por m_{ab} , el momentum de a en el marco de referencia de reposo es representado por q_i y $\theta[\dots]$ es la función escalón.

$$q_i = \frac{1}{2m_{ab}} \sqrt{\left(m_{ab}^2 - (m_a + m_b)^2\right)\left(m_{ab}^2 - (m_a - m_b)^2\right)} \quad (3.2.16)$$

En el canal fundamental, la unitariedad nos permite expresar S como:

$$S = e^{2i\delta} \quad (3.2.17)$$

El operador Lorentzino \hat{T} toma la forma:

$$\hat{T} = \frac{1}{\rho} e^{i\delta} \text{sen}(\delta) \quad (3.2.18)$$

La formulación de Breit-Wigner para una resonancia que decae en dos partículas (a y b) de espín 0 es:

$$T_r(m_{ab}) \propto \frac{1}{m_r^2 - m_{ab}^2 - im_r^2 \Gamma_{ab}(ab)} \quad (3.2.19)$$

El propagador inverso de una partícula inestable en términos de su autoenergía sería:

$$\Delta^{-1}(s) = \left(m_0^2 - \text{Re}\Pi(s) + i \text{Im}\Pi(s) - s\right) \quad (3.2.20)$$

Recordando que s es la distribución del centro de masas energéticas y representaría la masa de la resonancia, también se conoce como la parte real del polo del propagador. La masa desnuda de la resonancia está denotada como m_0 y $\Pi(s)$ es la autoenergía.

La definición del ancho y la masa de Breit –Wigner en términos de la autoenergía:

1. Masa: se define a través del cero de la parte real del propagador inverso. El

$$\text{valor de } \sqrt{s} = m \text{ cuando } (m_0^2 - \text{Re}\Pi(s) - s) = 0$$

2. Ancho: se define como $\Gamma = \frac{|\text{Im}\Pi(s = m^2)|}{m}$

3.2.4 Densidad de Breit-Wigner

Definiendo \mathcal{A}_{n0} como la amplitud para producir un estado $|n\rangle$ a partir del vacío:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{n0} &= -i\lambda \int d^4x \delta^{(4)}(x) \langle n | \phi(x) | 0 \rangle + O(\lambda^2) \\ &= -i\lambda \langle n | \phi(0) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

La densidad de probabilidad en el espacio de momentos está dada por la suma del cuadrado de las amplitudes:

$$\begin{aligned} \frac{d \text{Prob}}{d^4k} &\propto \sum_n \lambda^2 |\langle n | \phi(0) | 0 \rangle|^2 \delta^{(4)}(P_n - k) \\ &\propto \text{Re} D(k^2) \\ &\propto \frac{\mu\Gamma}{(k^2 - \mu^2)^2 + \mu^2\Gamma^2} \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

Donde μ es la masa de la resonancia y por tanto el pico de la densidad de probabilidad y al igual que antes Γ es el ancho de la resonancia y corresponde al ancho medido desde el valor medio del máximo de la densidad de probabilidad.

3.2.5 Tasa de decaimiento en el proceso $\phi \rightarrow \pi \pi$

Piones

Yukawa desarrolló una teoría en que el isospín era usado en el contexto de la teoría de campos. En la teoría del mesón el isospín es necesario para explicar la independencia de la carga en las fuerzas nucleares. Wigner introduce el isospín en la espectroscopia nuclear renombrándolo como spin isotópico. El isospín pasó de ser un objeto matemático útil, a un número cuántico con consecuencias de simetría. La observación experimental permitió reconocer al isospín como un número cuántico que se conserva en los procesos de interacción fuerte.

El pión es parte del grupo de hadrones llamado multipletes de isospín, en específico el pión es un triplete (π^+, π^0, π^-) . Cada partícula de este triplete posee la misma extrañeza, el mismo número bariónico y el mismo spin, y sólo tienen pequeñas diferencias entre las masas.

Proceso $\phi \rightarrow \pi \pi$

Calcularemos la tasa de decaimiento para el decaimiento de un mesón escalar en dos piones, utilizando las reglas de Feynman vistas en la sección 2.8. El proceso se encuentra descrito en la Figura 3.2-2, la figura muestra la estructura general del sistema de estudio [92].

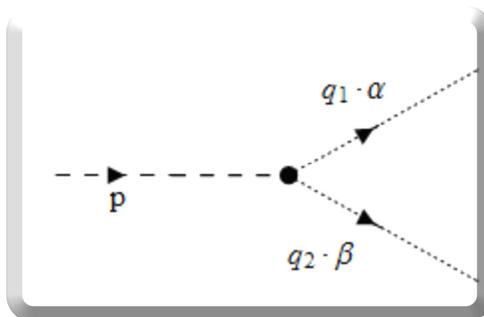


Figura 3.2-2 Ilustración para la amplitud de decaimiento para $\phi \rightarrow \pi\pi$

Utilizando los conceptos de las secciones anteriores, la matriz de dispersión tiene la forma:

$$S_{fi} = -\frac{(2\pi)^4}{\Omega^{3/2}} i\delta^{(4)}(p - q_1 - q_2) T_{fi} \quad (3.2.23)$$

$$T_{fi} = -\frac{g_\phi m_s \delta_{\alpha\beta}}{\sqrt{8\omega_p \omega_{q_1} \omega_{q_2}}}$$

La tasa de decaimiento sería entonces:

$$d\omega_{fi} = \frac{2\pi}{\Omega} |T_{fi}|^2 \delta(W_f - W_i) d\rho_f \quad (3.2.24)$$

1) En este marco de estudio:

- a. La masa del pión se designa con la letra griega μ .
- b. La masa de la resonancia se designa como m_s .
- c. La masa de las partículas se designa con la letra griega ω y su respectivo subíndice.
- d. La letra p se refiere al cuadrivector del campo escalar y la letra q se refiere al cuadrivector del campo de los piones con su correspondiente subíndice.

2) Relaciones matemáticas:

$$\begin{aligned}
 W_i &= m_s = 2\omega_q = 2\sqrt{q^2 + \mu^2} \\
 W_f &= 2\sqrt{q^2 + \mu^2} \\
 \frac{\partial W_f}{\partial q} &= \frac{2q}{\sqrt{q^2 + \mu^2}} = 2\frac{q}{\omega_q}
 \end{aligned} \tag{3.2.25}$$

3) La densidad del estado final para la partícula satisface las condiciones de periódicas de frontera en una caja de volumen Ω .

$$d\rho_f = \frac{\Omega d^3q}{(2\pi)^3} = \frac{\Omega q^2 d\Omega_q}{(2\pi)^3} \frac{\partial q}{\partial W_f} dW_f \tag{3.2.26}$$

4) Debido a que las partículas finales del proceso son idénticas, la integración sobre $\frac{1}{2}$ del total del ángulo sólido hace el conteo de todos los procesos. La integral sobre los ángulos sólidos es $\int d\Omega_q = 2\pi$.

5) Las sumas del isoespín están dadas por $\sum_{\alpha\beta} |\delta_{\alpha\beta}|^2 = 3$.

6) La combinación de los tres factores conlleva que $\omega_{fi} = (3g_\phi^2 / 32\pi)(q / \omega_q)m_s$.

7) La cinemática nos da:

$$\begin{aligned}
 m_s &= 2\omega_q = 2\sqrt{q^2 + \mu^2} \\
 q &= \sqrt{\left(\frac{m_s}{2}\right)^2 - \mu^2} = \frac{m_s}{2} \sqrt{1 - \frac{4\mu^2}{m_s^2}}
 \end{aligned} \tag{3.2.27}$$

8) El resultado final del decaimiento se encuentra dado por:

$$\omega_{fi} \equiv \Gamma = \frac{3g_\phi^2}{32\pi} m_s \sqrt{1 - \frac{4\mu^2}{m_s^2}} \tag{3.2.28}$$

3.2.6 Cuasi-partículas

La función espectral proviene del estudio de estados excitados inferiores de un sistema de muchos átomos. A estos estados se les conoce como cuasi-partículas. En el estudio de la fotoemisión mediante la espectroscopia, se encontró que la función espectral de una partícula simple está dada por:

$$S(k, E) = \frac{-\text{Im}\Sigma(k, E)}{\pi \left\{ \left[E - E_k^0 - \text{Re}\Sigma(k, E) \right]^2 + \left[\text{Im}\Sigma(k, E) \right]^2 \right\}} \quad (3.2.29)$$

Esta función se supone que es relativamente buena para la aproximación de la energía. Sin embargo, el pico de la función no garantiza el cero del propagador inverso. Otro problema que tiene esta función es que, en ciertos casos se vuelve difícil la interpretación debido a que no se producen picos bien definidos [90]-[91].

Los tipos de cuasi-partículas son:

1. Magnones: excitaciones coherentes de los espines de los electrones en un material.
2. Polarones: cuasi-partículas cargadas en movimiento rodeadas de iones en un material.
3. Fonones: modos vibratorios en una estructura cristalina.
4. Plasmones: conjunto de excitaciones coherentes de un plasma.
5. Excitones: superposición de un electrón y un hueco.
6. Polaritones: mezcla de un fotón y otra cuasi-partícula.

3.2.7 Propagador del campo escalar

El propagador escalar sin interacción está dado por la ecuación (2.3.72):

$$\Delta_F(k) = \Delta^0(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (3.2.30)$$

Este propagador es llamado también propagador libre o desnudo y se representa mediante una línea punteada.

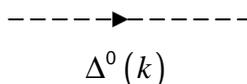


Figura 3.2-3 Representación del propagador libre

El estado fundamental de un sistema con partículas en interacción no se puede describir como un espacio vacío. En las teorías relativistas de cuánticas de campos existe el fenómeno de la fluctuación del vacío; en el vacío se crean y aniquilan pares virtuales de partícula-antipartícula de muy corta duración. Algunos de estos pares de partículas-antipartículas están cargados y actúan como un dipolo eléctrico. Estas fluctuaciones son, por tanto, también polarizables del mismo modo en que se polariza un medio dieléctrico. En la presencia de un campo eléctrico, estos pares de partícula-antipartícula se repositionan a sí mismos, contrarrestando parcialmente el campo antes mencionado, lo cual supone un efecto de apantallamiento parcial. A la reorientación de estos pares partícula-antipartícula se le conoce como polarización del vacío o autoenergía.

Para poder calcular la masa física del mesón debemos incluir algún tipo de interacción. La interacción nos permite obtener el propagador vestido el cual contiene el término de la autoenergía. El término de la autoenergía contiene toda la información acerca de las interacciones del mesón sigma con el vacío cuántico.

La ecuación de Dyson para el propagador vestido del mesón escalar es [49]:

$$\Delta(k) = \Delta^0(k) + \Delta^0(k)\Pi_s(k)\Delta(k) \quad (3.2.31)$$

Π_s representa la polarización o autoenergía del campo escalar y en un diagrama se representa como un lazo (Figura 3.2-4).

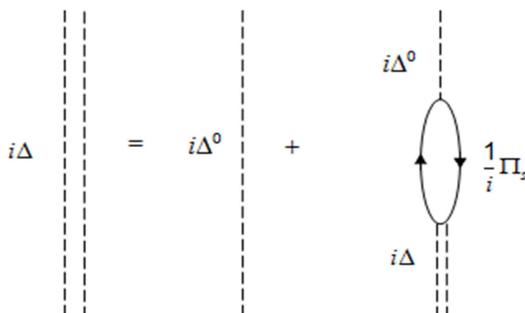


Figura 3.2-4 Ecuación de Dyson para el propagador del mesón escalar.

La solución para el propagador vestido o modificado del campo escalar es fácil de obtener a través de la ecuación (3.2.31) y tiene la expresión matemática [93]:

$$\Delta(k) = \frac{1}{\Delta_0^{-1}(k) - \Pi_s(k)} \quad (3.2.32)$$

donde

$$\Delta_0^{-1}(k^2) = k^2 - m^2 \quad (3.2.33)$$

m es la masa desnuda del mesón y la autoenergía $\Pi_s(k)$ necesita ser calculada.

3.3 Propagador del mesón sigma en el vacío

Nuestro primer objetivo es demostrar que el mesón sigma puede ser considerado como la resonancia de dos piones. Para modelar esta resonancia tenemos que especificar las condiciones de las partículas involucradas.

1. El mesón sigma es un mesón escalar.
2. El pión es un mesón con carga con espín 0.
3. El mesón sigma se acopla a dos piones virtuales en el vacío.
4. Si el mesón sigma puede tratarse como una resonancia, debe cumplir con valor del umbral del canal I (canal-s) de la matriz de dispersión dado por la ecuación (3.2.8) y (3.2.28).
5. La posible resonancia sigma, debe de cumplir con la relación (3.2.19) debido a que la resonancia decae en dos partículas de espín 0.
6. Debe existir un ensanchamiento en el umbral cuando el cuadrimomentum se acerca al valor de 2 veces la masa del pión.
7. El valor de la masa debe de cumplir con la definición de Breit-Wigner al ser evaluada en el marco de referencia cuando el mesón sigma se encuentra en reposo.
8. Si no se cumplen los requisitos para la resonancia entonces el mesón sigma podría ser tratado como una cuasi-partícula.

Suponemos que la resonancia sigma se acopla al sistema mesónico $\pi\pi$ en los canales de isoespín 0. Por lo que, la dispersión $\pi\pi$ en el canal de onda S ($l=0$) se encontraría dominado por el mesón sigma. La fase de dispersión en el canal S se encuentra relacionada con la parte real e imaginaria del propagador del mesón sigma:

$$\tan(\delta_0(k)) = \frac{\text{Im} \Delta_\sigma(k)}{\text{Re} \Delta_\sigma(k)} \quad (3.3.1)$$

donde Δ_σ está dado por la ecuación (3.2.20):

$$\Delta^{-1}(k) = (m_0^2 - \text{Re} \Pi(k^2) + i \text{Im} \Pi(k) - k^2) \quad (3.3.2)$$

3.3.1 Convenciones

Hasta este momento nos hemos referido a la teoría para mesones escalares generales, de aquí en adelante trabajaremos para el caso específico del mesón sigma, por lo que las notaciones cambiarán para señalar que nos referimos al caso específico del estudio de la tesis.

Tabla 1 Convención de notación para el mesón sigma en el vacío

Notación	Significado
Mesón- σ	Mesón sigma
σ	Campo del mesón sigma
$\vec{\pi}$	Campo del pión
$\sigma\pi\pi$	Interacción del mesón sigma con dos piones
$g_{\sigma\pi\pi}$	Constante de interacción del mesón sigma con dos piones
Γ_{σ}	Ancho del mesón sigma en el formalismo de Breit-Wigner
m_{σ}^0	Masa desnuda del mesón sigma
m_{σ}	Masa efectiva (física) del mesón sigma
m_{π}	Masa del pión
\mathcal{L}^{eff}	Lagrangiana efectiva de interacción
Σ	Autoenergía
Σ^R	Autoenergía regularizada
k	Cuadrimomentum $k^{\mu} = (k^0, \vec{k})$
q	Cuadrimomentum $q^{\mu} = (q^0, \vec{q})$
$\rho(k)$	Densidad de probabilidad del formalismo de Breit-Wigner
$S(k)$	Función espectral cuántica
MeV	Megaelectrovoltios o megaelectrón volts
GeV	Gigaelectrovoltios o gigaelectrón volts

3.3.2 Cálculo de la autoenergía para la interacción $\sigma\pi\pi$

Para calcular la autoenergía se debe especificar el contenido dinámico del modelo mediante una Lagrangiana efectiva de interacción. En el marco de la QHD, la Lagrangiana de interacción renormalizable más simple para la interacción entre el mesón sigma y los piones está dada por [92]:

$$L_{\sigma\pi\pi}^{eff} = \frac{1}{2} g_{\sigma\pi\pi} m_\phi \vec{\pi} \cdot \vec{\pi} \sigma \quad (3.3.3)$$

Hemos generalizado la Lagrangiana efectiva de interacción para poder hacer comparaciones con otros modelos. Dependiendo del modelo, la constante de acoplamiento $g_{\sigma\pi\pi}$ puede ser adimensional y real o puede tener unidades de MeV. En el caso en que la constante de acoplamiento sea adimensional, m_ϕ puede tomar el valor de la masa del mesón sigma (m_σ) o el valor de la masa de los piones (m_π). En los modelos en que la constante tiene unidades de MeV $m_\phi = 1$.

En la Lagrangiana efectiva de interacción, σ representa el campo del mesón- σ y los piones se encuentran representados en términos de sus componentes cartesianas $\vec{\pi} = \langle \pi_1, \pi_2, \pi_3 \rangle$.

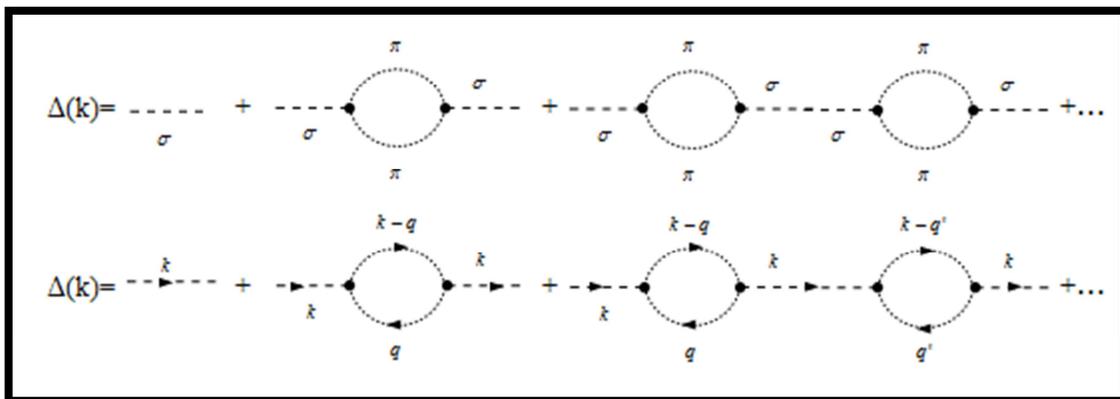


Figura 3.3-1 Propagador vestido del mesón- σ .

La autoenergía se encuentra representada en la Figura 3.3-1 como lazos y tiene una expresión analítica dada por:

$$-i\Sigma_{\sigma\pi\pi}(k) = \frac{3g_{\sigma\pi\pi}^2 m_\phi^2}{2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \cdot \frac{1}{q^2 - m_\pi^2 + i\epsilon} \cdot \frac{1}{(k-q)^2 - m_\pi^2 + i\epsilon} \quad (3.3.4)$$

El coeficiente $3/2$ para el lazo de los piones viene de los tres estados del isoespín y del factor de simetría de permutación. La masa del pión es considerada como $m_\pi = 140 \text{ MeV}$.

Trabajando en el marco de referencia donde el mesón sigma se encuentra en reposo se tiene que el cuadrimomento tiene la forma:

$$k = k^\mu = (k_0, \vec{0}) \quad (3.3.5)$$

Al integrar la ecuación (3.3.4) respecto a q_0

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_0}{\left(q_0^2 - \vec{q}^2 - m_\pi^2\right) \left(k^2 - 2q_0 k + q_0^2 - \vec{q}^2 - m_\pi^2\right)} \quad (3.3.6)$$

Usando el teorema del residuo de Cauchy:

$$I_0 = \frac{2\pi i}{\sqrt{m_\pi^2 + \bar{q}^2} [4(m_\pi^2 + \bar{q}^2) - k^2]} \quad (3.3.7)$$

La ecuación (3.3.4) se convierte en:

$$\Sigma_{\sigma\pi\pi}(k) = -\frac{3}{16\pi^3} g_{\sigma\pi\pi}^2 m_\phi^2 \int_{\infty} \frac{d^3 q}{\sqrt{m_\pi^2 + \bar{q}^2} [4(m_\pi^2 + \bar{q}^2) - k^2]} \quad (3.3.8)$$

Asumiendo una integración n-dimensional con el límite $n \rightarrow 3$, entonces

$$d^n q \rightarrow q^{n-1} dq d\Omega_n \text{ y } \int_{\infty} dq \Omega = 4\pi.$$

$$\Sigma_{\sigma\pi\pi}(k) = -\frac{3}{4\pi^2} g_{\sigma\pi\pi}^2 m_\phi^2 \int_{\infty} \frac{|\bar{q}|^2 d|\bar{q}|}{\sqrt{m_\pi^2 + |\bar{q}|^2} [4(m_\pi^2 + |\bar{q}|^2) - k^2]} \quad (3.3.9)$$

La teoría de las funciones analíticas es utilizada para separar la ecuación (3.3.9) en su parte principal e imaginaria [94].

$$\int \frac{f(z)}{z - x_0} dz = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx + i\pi f(x_0) \quad (3.3.10)$$

La parte imaginaria de la ecuación (3.3.9) está dada por

$$\text{Im} \Sigma_{\sigma\pi\pi}^R(k) = -\frac{3}{32\pi} g_{\sigma\pi\pi}^2 m_\phi^2 \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{k^2}} \quad (3.3.11)$$

La parte imaginaria tiene el correcto comportamiento para el umbral del estado S de resonancia. Aquí $\text{Im} \Sigma_{\sigma\pi\pi}^R(k) = 0$ para $k^2 \leq 4m_\pi^2$.

La parte principal diverge y por tanto será regularizada mediante la relación de doble dispersión [95] y utilizando la parte imaginaria obtenida en la ecuación (3.3.11).

$$\Sigma^R(t) = \frac{t^2}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{\text{Im}\Sigma(t')}{t'^2(t'-t-i0)} dt' \quad (3.3.12)$$

Debemos notar que $\Sigma^R(t) = 0$ para $k^2 < 4m_\pi^2$. El resultado final para la parte principal de la autoenergía en términos de k está dada por la ecuación (3.3.13).

$$\text{Re}\Sigma_{\sigma\pi\pi}^R(k) = \frac{g_{\sigma\pi\pi}^2 m_\phi^2 \left[6m_\pi^2(k^2 - 4m_\pi^2) \text{Ln} \left| \frac{\sqrt{k^2(k^2 - 4m_\pi^2) + k^2}}{2m_\pi^2} - 1 \right| + (k^2 - 12m_\pi^2) \sqrt{k^2(k^2 - 4m_\pi^2)} \right]}{64\pi^2 \sqrt{k^2(k^2 - 4m_\pi^2)}} \quad (3.3.13)$$

El propagador del mesón sigma está dado por:

$$\Delta_\sigma(k) = \frac{1}{k^2 - m_\sigma^2 - \text{Re}\Sigma_{\sigma\pi\pi}^R(k) + \text{Re}\Sigma_{\sigma\pi\pi}^R(m_\sigma) - i \text{Im}\Sigma_{\sigma\pi\pi}^R(k)} \quad (3.3.14)$$

En donde se ha incluido el contratérmino de la regularización $\Sigma_{\sigma\pi\pi}^R(m_\sigma)$.

Como hemos llegado a los mismos resultados que el formalismo de Breit-Wigner para una resonancia, podemos utilizar las definiciones de dicho formalismo para encontrar la masa y el ancho de la resonancia. Nuestros cálculos nos permiten utilizar el propagador inverso para hacer el cálculo de los observables del mesón sigma.

3.4 Cálculo de los observables del mesón sigma

Para encontrar la constante de acoplamiento y la masa del mesón sigma podemos utilizar el propagador inverso para encontrar los ceros de la función. Iniciaremos con una exploración gráfica para reconocer los valores que satisfacen:

$$\text{Re} \left[k^2 - m_\sigma^2 - \text{Re} \Sigma_{\sigma\pi\pi}^R(k) + \text{Re} \Sigma_{\sigma\pi\pi}^R(m_\sigma) - i \text{Im} \Sigma_{\sigma\pi\pi}^R(k) \right] = 0 \quad (3.4.1)$$

Utilizamos la expresión más sencilla de la Lagrangiana que es cuando $m_\phi = 1$, esto implica que la constante de acoplamiento $g_{\sigma\pi\pi}$ tiene unidades de MeV.

Según el estudio de la dispersión comentada en el formalismo de la sección 3.2, debemos encontrar un ensanchamiento cuando la masa de la resonancia se acerca a la masa de 2 piones. Esto significaría que existe un valor crítico en $k^2 = 4m_\pi^2$ para una masa dada del mesón sigma m_σ . Al evaluar en el límite en la autoenergía se obtiene:

$$\Sigma_{\sigma\pi\pi}^R(2m_\pi) = -\frac{(g_{\sigma\pi\pi} m_\phi)^2}{8\pi^2} \quad (3.4.2)$$

Esto nos lleva a suponer que para este valor crítico debe existir un ancho crítico que debe obedecer la ecuación (3.4.1) cuando $k^2 = 4m_\pi^2$.

$$\begin{aligned} (2m_\pi)^2 - m_\sigma^2 - \text{Re} \Sigma_{\sigma\pi\pi}^R(2m_\pi) + \text{Re} \Sigma_{\sigma\pi\pi}^R(m_\sigma) &= 0 \\ \text{Re} \Sigma_{\sigma\pi\pi}^R(m_\sigma) &= m_\sigma^2 - (2m_\pi)^2 + \text{Re} \Sigma_{\sigma\pi\pi}^R(2m_\pi) \\ 1 &= \frac{m_\sigma^2 - (2m_\pi)^2 + \text{Re} \Sigma_{\sigma\pi\pi}^R(2m_\pi)}{\text{Re} \Sigma_{\sigma\pi\pi}^R(m_\sigma)} \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Entonces sería posible encontrar valores para la masa del mesón sigma y su constante de acoplamiento buscando las soluciones para:

$$1 = \frac{m_\sigma^2 - \left[k^2 - \Sigma_{\sigma\pi\pi}^R(k) \right]_{k=2m_\pi}}{\text{Re} \left[\Sigma_{\sigma\pi\pi}^R(m_\sigma) \right]} \quad (3.4.4)$$

ya que

$$\Sigma_{\sigma\pi\pi}^R(k) = \text{Re} \Sigma_{\sigma\pi\pi}^R(k) + i \text{Im} \Sigma_{\sigma\pi\pi}^R(k) \quad (3.4.5)$$

y cuando $k = 2m_\pi$

$$\text{Im} \Sigma_{\sigma\pi\pi}^R(2m_\pi) = -\frac{3}{32\pi} g_{\sigma\pi\pi}^2 m_\phi^2 \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{(2m_\pi)^2}} \quad (3.4.6)$$

$$\text{Im} \Sigma_{\sigma\pi\pi}^R(2m_\pi) = 0$$

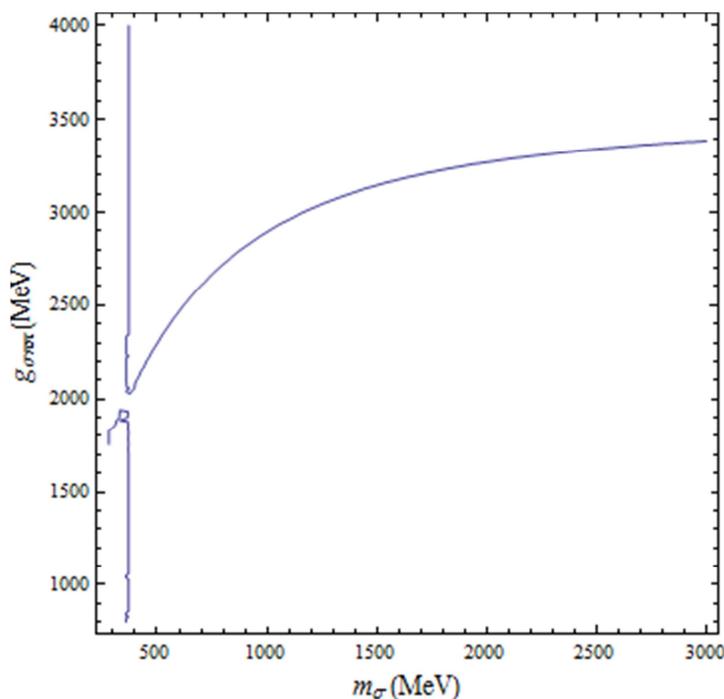


Figura 3.4-1 Gráfica de contorno con soluciones para la masa del mesón sigma y su contante de acoplamiento que satisfacen la ecuación (3.4.4).

La Figura 3.4-1 muestra una singularidad cuando la masa de sigma es igual a 358MeV.

Resolviendo para la constante de acoplamiento cuando $m_\sigma \rightarrow \infty$:

$$\lim_{m_\sigma \rightarrow \infty} \left[\frac{m_\sigma^2 - \left[k^2 - \Sigma_{\sigma\pi\pi}^R(k) \right]_{k=2m_\pi} - 1}{\text{Re} \left[\Sigma_{\sigma\pi\pi}^R(m_\sigma) \right]} \right] = 1$$

$$\frac{1254400\pi^2 (MeV)^2}{g_{\sigma\pi\pi}^2} = 1 \quad (3.4.7)$$

$$g_{\sigma\pi\pi} = 1120\pi \text{ MeV}$$

Entonces el valor máximo valor que puede adquirir la constante de acoplamiento entre el mesón sigma y los piones es de $g_{\sigma\pi\pi} \approx 3518.58 \text{ MeV}$.

Según el formalismo de Breit-Wigner esperamos que el ancho se incremente conforma la masa del mesón sea incrementada.

Utilizando la fórmula del ancho de Breit-Wigner y con $m_\phi = 1$ en la ecuación (3.3.11):

$$\Gamma_\sigma = \frac{-\text{Im} \Sigma_{\sigma\pi\pi}^R(m_\sigma)}{m_\sigma}$$

$$\Gamma_\sigma = \frac{3g_{\sigma\pi\pi}^2}{32\pi m_\sigma} \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{(m_\sigma)^2}} \quad (3.4.8)$$

Analizamos los resultados para el ancho utilizando los valores obtenidos para la masa y constante de acoplamiento del mesón- σ . El máximo valor del ancho se obtiene

cuando la masa de sigma vale 612 MeV y el valor del ancho es de aproximadamente 268.2 MeV.

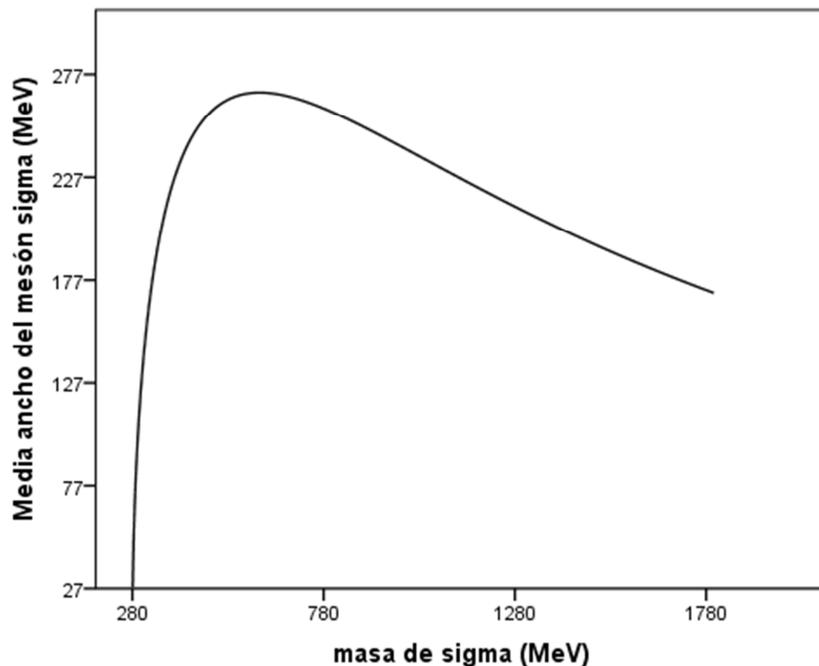


Figura 3.4-2 Gráfica del ancho de Breit-Wigner como función de la masa del mesón sigma.

La gráfica del ancho (Figura 3.4-2) muestra un decremento en el ancho después de cierto valor para la masa del mesón sigma. Aun cuando el valor máximo se da cuando la masa de sigma es de 612 MeV, decidimos incluir todos los valores que no sean significativamente distintos a este valor, por lo que nuestro estudio puede abarcar hasta valores para $m_{\sigma} \leq 619 \text{ MeV}$. La razón principal es que normalmente en física de partículas la masa y ancho del mesón se miden en unidades enteras.

Para crear una expresión matemática de la constante de acoplamiento en función de la masa del mesón sigma, hemos realizado una regresión curvilínea mediante el programa de análisis estadístico SPSS versión 19.

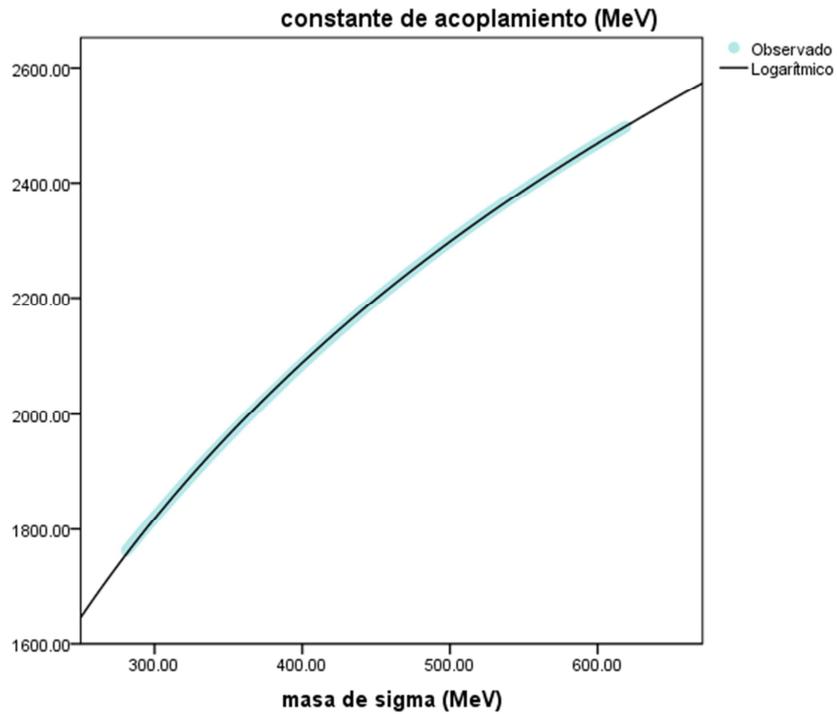


Figura 3.4-3 Gráfica de la estimación curvilínea de lo observado contra lo estimado.

La gráfica muestra en color verde los valores reales de la constante de acoplamiento según el valor de la masa de sigma, mientras que la estimación curvilínea se encuentra representada por una línea continua de color negro.

Tabla 2 Descripción del modelo

Nombre del modelo		MOD_5
Variable dependiente	1	constante de acoplamiento (MeV)
Ecuación	1	Logarítmica
Variable independiente		masa de sigma (MeV)
Constante		Incluidos
Variable cuyos valores etiquetan las observaciones en los gráficos		Sin especificar

La Tabla 2 muestra la generalidad del modelo, indica la existencia de una variable independiente (m_σ) y una variable dependiente ($g_{\sigma\pi\pi}$). También muestra que la ecuación resultante es logarítmica (Figura 3.4-3).

Tabla 3 Resumen del procesamiento de los casos

	N
Total de casos	339
Casos excluidos ^a	0
Casos pronosticados	0
Casos creados nuevos	0

a. Los casos con un valor perdido en cualquier variable se excluyen del análisis.

La Tabla 3 muestra un análisis de 339 casos totales. También muestra que ningún caso ha sido excluido del análisis.

Tabla 4 Resumen del modelo

R	R cuadrado	R cuadrado corregida	Error típico de la estimación
1.000	1.000	1.000	1.413

La variable independiente es masa de sigma (MeV).

El resumen del modelo muestra el valor R^2 , la cual indica un valor de 1. Una línea de tendencia es más confiable cuando su valor R^2 está establecido en 1 o cerca de 1. Este valor implica el porcentaje de ajuste de los datos. El error típico de la estimación es de 1.4 MeV, eso significa que existe una diferencia promedio de ± 2.8 MeV entre lo estimado y lo observado. El error no representa una diferencia estadísticamente significativa entre lo observado y el valor estimado (Figura 3.4-3).

Tabla 5 Coeficientes

	Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados	t	Sig.
	B	Error típico	Beta		
ln(masa de sigma (MeV))	938.490	.341	1.000	2754.624	.000
(Constante)	-3534.634	2.074		-1703.936	.000

La Tabla 5 muestra el modelo logarítmico de la estimación:

$$g_{\sigma\pi\pi} = (938.49 \text{ MeV}) \ln[m_{\sigma} \text{MeV}^{-1}] - 3534.634 \text{ MeV} \quad (3.4.9)$$

Para comparar nuestro resultado con otros estudios tomaremos los valores reportados y haremos los cálculos con la ecuación (3.4.9). Los valores obtenidos con nuestros resultados numéricos y el valor reportado por los otros autores se muestran en la Tabla 6.

Tabla 6 Tabla comparativa de la constante de acoplamiento

Reporte de otros autores			Nuestras estimaciones de $g_{\sigma\pi\pi}$ (MeV)	
Referencia	m_σ (MeV)	$g_{\sigma\pi\pi}$ (GeV)	Cálculo Numérico	Ecuación (3.4.9)
[44]	350	1.96	1961.42	1962.98
[80]	390	2.0	2062.72	2064.54
[88]	483	2.59	2265.56	2265.25

Definiremos al ancho crítico como:

$$\Gamma_\sigma^{crit} \equiv \frac{m_\sigma^2 - \left[k^2 - \Sigma_{\sigma\pi\pi}^R(k^2) \right]_{k^2=4m_\pi^2}}{\text{Re} \left[\Sigma_{\sigma\pi\pi}^R(m_\sigma^2) \right]} \cdot \Gamma_\sigma \quad (3.4.10)$$

Donde $\Gamma_\sigma = -\text{Im}\Sigma(m_\sigma)/m_\sigma$ es el ancho parcial [51] y $\Gamma_\sigma^{crit} \geq \Gamma_\sigma$. Cuando $\Gamma_\sigma^{crit} = \Gamma_\sigma$ los valores obtenidos con la función de densidad son los mismos de aquellos obtenidos a través del ancho parcial y la gráfica de la parte real del propagador inverso (masa de Breit-Wigner).

Tabla 7 Resultados numéricos para la constante de acoplamiento y el ancho crítico comparados con los valores experimentales. Utilizando $m_\phi = 1$ y las masas reportadas.

	m_σ y Γ_σ	Resultados numéricos
BES	$m_\sigma = 390_{-36}^{+60} \text{MeV}$ y $\Gamma_\sigma = 282_{-50}^{+77} \text{MeV}$	$g_{\sigma\pi\pi} = 2.06_{-0.09}^{+0.14} \text{GeV}$ y $\Gamma_\sigma = 226_{-26}^{+25} \text{MeV}$
E791	$m_\sigma = 483 \pm 31 \text{MeV}$ y $\Gamma_\sigma = 338 \pm 48 \text{MeV}$	$g_{\sigma\pi\pi} = 2.27_{-0.063}^{+0.059} \text{GeV}$ y $\Gamma_\sigma = 258_{-7}^{+5} \text{MeV}$
Dalitz	$m_\sigma = 478_{-23}^{+24} \pm 17 \text{MeV}$ y $\Gamma_\sigma = 324_{-40}^{+42} \pm 21 \text{MeV}$	$g_{\sigma\pi\pi} = 2.26_{-0.047}^{+0.046} \text{GeV}$ y $\Gamma_\sigma = 257_{-4}^{+5} \text{MeV}$

3.5 Validación de los resultados con el formalismo de BW

Para verificar la validez de lo que hemos hecho hasta este momento debemos comprobar que la solución gráfica corresponde a la solución analítica. Al graficar la parte real del propagador inverso debemos obtener que la masa de entrada para el mesón- σ debe corresponder al cero de la gráfica, esto significa que el eje horizontal cuando $\text{Re}[\Delta_\sigma^{-1}(k)] = 0$ debe ser cortado en el valor del mesón sigma.

Graficamos la función:

$$\text{Re}[\Delta_\sigma^{-1}(k)] = \text{Re}\left[k^2 - m_\sigma^2 - \text{Re}\Sigma_{\sigma\pi\pi}^R(k) + \text{Re}\Sigma_{\sigma\pi\pi}^R(m_\sigma) - i \text{Im}\Sigma_{\sigma\pi\pi}^R(k)\right] \quad (3.5.1)$$

Utilizando valores de entrada del mesón- σ de 400, 500 y 600 MeV. La constante de acoplamiento se ha calculado mediante la ecuación (3.4.9) para cada una de las masas.

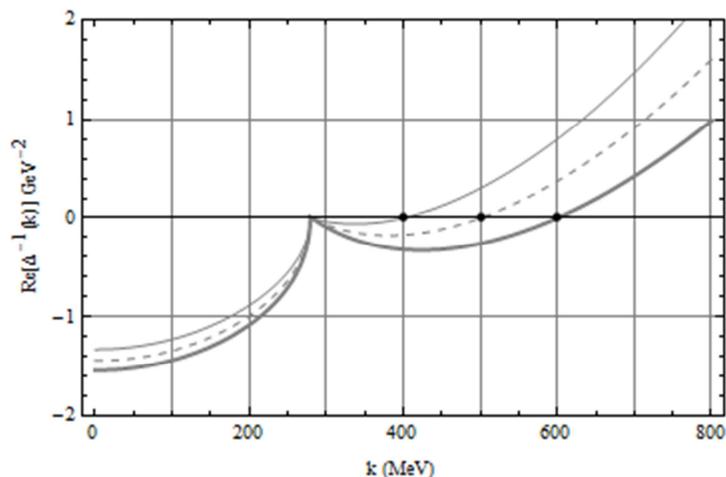


Figura 3.5-1 Gráfica de la parte real del propagador inverso para tres masas diferentes del mesón sigma. La línea continua ha sido graficada con una entrada de 400MeV para el mesón sigma, la línea punteada con 500MeV como masa de entrada y la línea remarcada con una entrada de 600MeV. Los puntos marcan el cero de la función para cada masa de entrada.

La gráfica, representada en la Figura 3.5-1, muestra que el cero de la función corresponde a la masa de entrada del mesón- σ . Esto nos indica que nuestro estudio cumple con los requisitos del formalismo de Breit-Wigner respecto a la definición de la masa de una resonancia.

Por otro lado, la gráfica muestra el ensanchamiento en el umbral cuando $k = 2m_{\pi}$, lo cual se encuentra en concordancia con lo que predice el estudio de la resonancia descrita en el formalismo de las partículas inestables.

Nuestros cálculos también se encuentran en acuerdo con la fase de dispersión dada en la ecuación (3.3.1), la gráfica de la fase de dispersión δ_0 corresponde a la Figura 3.5-2. El máximo de la función representa la masa de la resonancia. Se ha graficado para las tres masas antes utilizadas para graficar la parte real del propagador inverso.

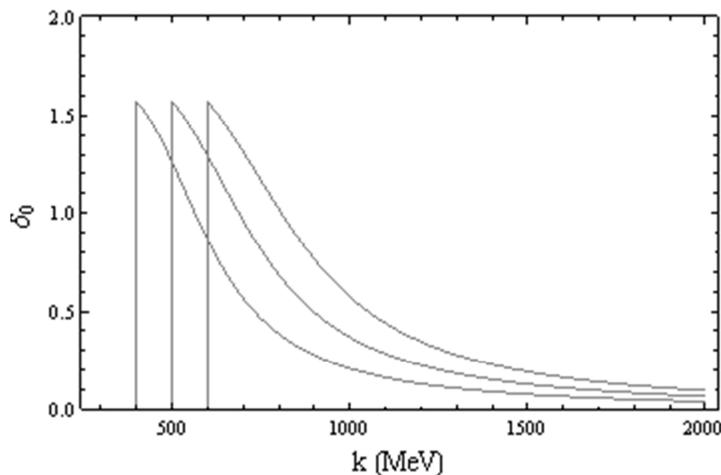


Figura 3.5-2 Diagrama de la fase de dispersión en función del propagador del mesón sigma.

Por último debemos de confirmar que nuestros cálculos están en coherencia con la función de densidad de Breit-Wigner. Según la ecuación (3.2.22):

$$\rho(k) \propto \frac{m_\sigma \Gamma_\sigma}{(k^2 - m_\sigma^2)^2 + m_\sigma^2 \Gamma^2} \quad (3.5.2)$$

Por otro lado de la ecuación (3.4.8) tenemos que:

$$m_\sigma \Gamma_\sigma = -\text{Im} \sum_{\sigma\pi\pi}^R(m_\sigma) \quad (3.5.3)$$

Podemos entonces escribir la relación de la función de densidad de Breit-Wigner como:

$$\rho(k) = \frac{-\phi \text{Im} \sum_{\sigma\pi\pi}^R(m_\sigma)}{\left([k^2 - m_\sigma^2]^2 + \left(-\text{Im} \sum_{\sigma\pi\pi}^R(m_\sigma) \right)^2 \right)} \quad (3.5.4)$$

Donde la constante de proporcionalidad es la constante de normalización ϕ .

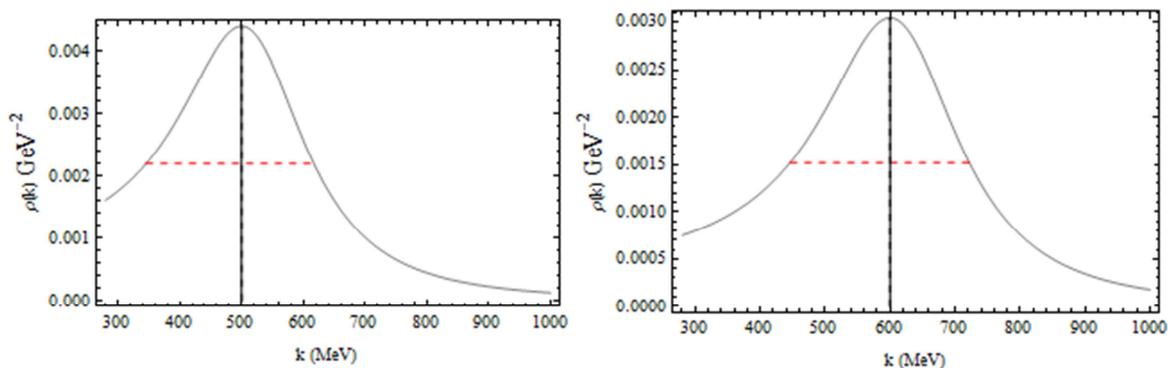


Figura 3.5-3 Gráfica de la función de probabilidad de Breit-Wigner. A la izquierda la resonancia de $m_\sigma = 500\text{MeV}$ y a la derecha la resonancia de $m_\sigma = 600\text{MeV}$. Los anchos medidos a la mitad del valor medio de la resonancia concuerdan con los resultados analíticos 261 MeV y 268MeV respectivamente.

En esta sección hemos demostrado que el mesón sigma cumple con todos y cada uno de los requisitos para poder ser considerado como una resonancia de dos piones. Nuestros cálculos concuerdan con los requisitos impuestos en el formalismo de las partículas inestables y han satisfecho las definiciones dadas por dicho formalismo.

Este es el resultado más importante de la investigación, debido a que ha mostrado que existe una manera analítica de poder acotar los valores posibles de la masa del mesón sigma. De la misma forma hemos encontrado una expresión matemática para obtener la constante de acoplamiento entre el mesón sigma y los piones de tal forma que cumpla con los requisitos de una resonancia.

3.6 Formalismo de la cuasi-partícula

En la sección 3.2.6 vimos que el tratamiento de las cuasi-partículas es mediante la función espectral la cual puede ser expresada en términos de la autoenergía de la forma:

$$S(k) = \frac{-\phi_s \text{Im}\Sigma(k^2)}{\left[k^2 - m_\sigma^2 - \text{Re}\Sigma_{\sigma\pi}^R(k^2) + \text{Re}\Sigma_{\sigma\pi}^R(m_\sigma^2) \right]^2 + \left[\text{Im}\Sigma(k^2) \right]^2} \quad (3.6.1)$$

Donde ϕ_s es la constante que renormaliza la función, el ancho es tomado a la mitad de la función espectral y la masa es definida como el pico de la función.

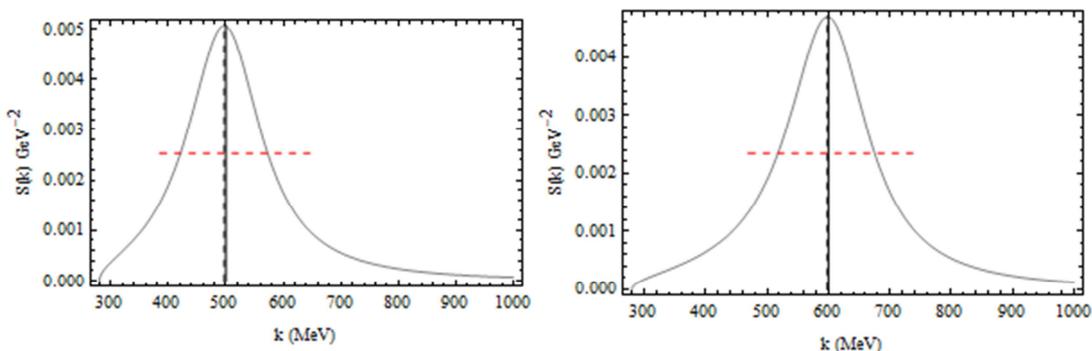


Figura 3.6-1 Gráfica de la función espectral. A la izquierda la resonancia de $m_\sigma = 500\text{MeV}$ y a la derecha la resonancia de $m_\sigma = 600\text{MeV}$. Los anchos medidos a la mitad del valor medio de la resonancia son menores que los de Breit-Wigner, 151 MeV y 157 MeV respectivamente.

Tabla 8 Resultados numéricos utilizando $m_\phi = 1$.

m_σ	$g_{\sigma\pi\pi}$	m_σ^{peak}	Γ_σ	Γ
500	2297.71	497	261	151
600	2468.82	598	268	157

En la Tabla 8 hemos calculado las propiedades del mesón sigma. La primera masa (m_σ) es la masa de Breit-Wigner que ha sido calculada mediante la relación $\Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma^{\text{crit}}$. Las soluciones obtenidas con la función espectral son m_σ^{peak} y Γ obtenidas al usar la masa de Breit-Wigner como masa de entrada. Mientras que la función espectral muestra diferencias entre la masa de entrada y el ancho de Breit-Wigner, la función de densidad se encuentra en concordancia con ellos. La diferencia entre las masas no son significativas pero el ancho es mucho menor al ser calculado con la función espectral.

CAPÍTULO IV

PROPIEDADES DEL MESÓN SIGMA EN EL MEDIO NUCLEAR

4.1 Introducción

En este capítulo estudiaremos las modificaciones que sufren la masa y el ancho del mesón sigma cuando se encuentra en la materia nuclear. Usando el modelo de Walecka calcularemos la masa y ancho del mesón sigma utilizando las definiciones de la masa y ancho tanto de Breit-Wigner como de la función espectral.

Estudiaremos las modificaciones de las propiedades del mesón sigma cuando este se acopla a los nucleones a través de una interacción tipo Yukawa. La interacción del mesón sigma con nucleones incluye interacciones con el mar de Fermi produciendo estados partícula-hoyo y el acoplamiento con el mar de Dirac produciendo estados virtuales nucleón-antinucleón. También se tomará en cuenta el efecto de la mezcla omega-sigma.

La autoenergía del mesón sigma es calculada en el orden de un lazo y el propagador mediante la aproximación RPA (Random Phase Approximation). La sumatoria es realizada utilizando la ecuación de Dyson.

Mostraremos que aun cuando la función espectral muestra dos picos, al ser comparada con los resultados de la masa de Breit-Wigner uno de los picos no representa una masa física y por tanto sólo una solución para la masa del mesón sigma es correcta.

Este capítulo es una aplicación de los resultados obtenidos en el capítulo 3. Existen varios estudios de las modificaciones del mesón sigma en el medio nuclear mediante el modelo de Walecka. El valor de nuestro estudio es el uso del formalismo de Breit-Wigner y el ancho crítico para obtener los valores de la masa y el ancho del mesón sigma en el medio nuclear.

El formalismo del modelo de Walecka puede ser consultado en su totalidad en el libro de John Dirk Walecka a través de sus 50 capítulos [92], aquí daremos la vista general del modelo y las propiedades que se utilizaron para los cálculos numéricos que hemos realizado. La sección del formalismo es un resumen del libro en las partes que se involucran en el estudio de la tesis.

4.2 Formalismo

4.2.1 Modelo de Walecka

Como hemos comentado reiteradamente en la introducción de la tesis, el modelo de Walecka es una teoría de la QHD que estudia las propiedades del mesón sigma cuando este interactúa con los nucleones y otros mesones en el medio nuclear.

El modelo de Walecka (QHD-I) se creó con el objetivo de construir una teoría cuántica relativista de campos capaz de describir la materia nuclear de una manera simplificada. Se basa en la hipótesis de que los mesones escalares y los mesones vectoriales dan las mayores contribuciones a la interacción entre nucleones (nucleón-nucleón). El creador del modelo fue Dirk Walecka, quien en su primera Lagrangiana deja fuera otras posibles contribuciones como la interacción entre los piones y el mesón sigma. El modelo tiene una Lagrangiana efectiva de interacción que contiene de 3 campos de partículas interactuando entre sí. Este modelo tiene la ventaja de ser una teoría cuántica relativista renormalizable para la materia nuclear que supone que está compuesta de nucleones que interactúan mediante el intercambio de mesones escalares y mesones vectoriales. Este modelo ha sido ampliamente utilizado para calcular las modificaciones que sufren algunas propiedades de los nucleones y de los mesones escalares en el medio nuclear.

Los tres campos involucrados junto con los parámetros relacionados con el modelo de Walecka son:

Campo Bariónico (ψ): los bariones son las partículas principales que describe e interactúan con los nucleones dentro de la materia nuclear. Normalmente se describen

como campos de dos estados de isoespín. Cuando en los fenómenos estudiados la distinción entre los protones y los neutrones no es necesaria, es posible considerar a los bariones como un campo de partículas única. El modelo asume que ambos estados de isoespín tienen una masa M .

Campo vectorial (V^μ): Los mesones vectoriales asociados al mesón omega (ω), son partículas de intercambio entre los bariones que describe la fuerza fuerte de repulsión entre los nucleones. Los mesones vectoriales tienen una masa m_v , interactúan mediante el término de la Lagrangiana dado por $g_v \bar{\psi} \gamma_\mu V^\mu \psi$. La constante de acoplamiento con los bariones se encuentra representada como g_v .

Campo escalar ϕ : Los mesones escalares sigma, son partículas de intercambio entre los bariones y describe la fuerza fuerte de atracción entre los nucleones. La masa de los mesones escalares está dada por m_s . Los mesones escalares interactúan con los bariones mediante el término de la Lagrangiana que contiene el término $g_s \bar{\psi} \phi \psi$. La constante de acoplamiento del mesón escalar y los bariones está designada por g_s .

Cuando $g_v^2 > g_s^2$ el potencial es repulsivo a distancias cortas debido a la contribución del mesón vectorial. Por otro lado, el potencial es atractivo a grandes distancias como una consecuencia del intercambio escalar cuando $m_v > m_s$. Estas descripciones son consistentes con las propiedades observadas en la interacción nucleón-nucleón. Esta descripción no toma en cuenta la contribución de los piones, los cuales son la

principal componente en la interacción nucleón-nucleón. La razón de esto es debido a que su contribución a las propiedades del volumen nuclear en promedio son cero.

La Lagrangiana de interacción del modelo está descrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \bar{\psi} \left[\gamma_{\mu} \left(i\partial^{\mu} - g_v V^{\mu} \right) - (M - g_s \phi) \right] \psi + \frac{1}{2} \left(\partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - m_s^2 \phi^2 \right) \\ - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_v^2 V_{\mu} V^{\mu} + \delta \mathcal{L} \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

La descripción de cada uno de los elementos ha sido ya descrita, sólo nos falta describir el término que representa al tensor del campo vectorial $F^{\mu\nu} = \partial^{\mu} V^{\nu} - \partial^{\nu} V^{\mu}$ y el término $\delta \mathcal{L}$ que contiene los contratérminos finitos necesarios para mantener la simetría en regularización dimensional.

El potencial efectivo se transforma en un potencial instantáneo, en el caso límite de bariones pesados y estáticos, y se puede escribir como la suma de dos potenciales de Yukawa el cual ya discutimos en la sección 2.4:

$$V_{eff}(r) = \frac{g_v^2 e^{-m_v r}}{4\pi r} - \frac{g_s^2 e^{-m_s r}}{4\pi r} \quad (4.2.2)$$

4.2.2 Las ecuaciones de movimiento del modelo de Walecka

Las ecuaciones de movimiento para el modelo de Walecka se obtienen mediante el principio variacional. Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange (2.2.4) en la densidad Lagrangiana (4.2.1) y tomando $(V_{\mu}, \phi, \bar{\psi})$, como las coordenadas, obtenemos las siguientes ecuaciones de movimiento para los campos:

Recordando la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^i} = 0 \quad (4.2.3)$$

Para $\varphi^i = \phi$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = 0 \quad (4.2.4)$$

$$\begin{aligned} (\bar{\psi} g_s \psi - m_s^2 \phi) - (\phi^\alpha \phi_{,\alpha}) &= 0 \\ (\bar{\psi} g_s \psi - m_s^2 \phi) - \square \phi &= 0 \\ \bar{\psi} g_s \psi - (m_s^2 + \square) \phi &= 0 \\ g_s \bar{\psi} \psi &= (m_s^2 + \square) \phi \end{aligned}$$

Para $\varphi^i = V^\mu$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V^\alpha} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_{\alpha,\beta}} = 0 \quad (4.2.5)$$

$$\begin{aligned} [-g_v \bar{\psi} \gamma_\alpha \psi + m_v^2 V_\alpha] - \partial_\beta \frac{\partial}{\partial V_{\alpha,\beta}} \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) &= 0 \\ [-g_v \bar{\psi} \gamma_\alpha \psi + m_v^2 V_\alpha] + \frac{1}{2} \partial_\beta \left[\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial V_{\alpha,\beta}} (F^{\mu\nu}) \right] &= 0 \\ [-g_v \bar{\psi} \gamma_\alpha \psi + m_v^2 V_\alpha] + \frac{1}{2} \partial_\beta \left[(F^{\mu\nu}) \frac{\partial}{\partial V_{\alpha,\beta}} (V_{v,\mu} - V_{\mu,v}) \right] &= 0 \\ [-g_v \bar{\psi} \gamma_\alpha \psi + m_v^2 V_\alpha] + \frac{1}{2} \partial_\beta \left[(F^{\mu\nu}) [\delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu}] \right] &= 0 \\ [-g_v \bar{\psi} \gamma_\alpha \psi + m_v^2 V_\alpha] + \frac{1}{2} \partial_\beta \left[(F^{\beta\alpha} - F^{\alpha\beta}) \right] &= 0 \\ [-g_v \bar{\psi} \gamma_\alpha \psi + m_v^2 V_\alpha] + \partial_\beta F^{\alpha\beta} &= 0 \\ [\partial_\beta F^{\beta\alpha} + m_v^2 V^\alpha] &= g_v \bar{\psi} \gamma_\alpha \psi \end{aligned}$$

Para $\phi^i = \bar{\psi}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (4.2.6)$$

$$\begin{aligned} [\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_v V^\mu) - (M - g_s \phi)] \psi - 0 &= 0 \\ [\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_v V^\mu) - (M - g_s \phi)] \psi &= 0 \end{aligned}$$

Para $\phi^i = \psi$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (4.2.7)$$

$$\bar{\psi} [i\gamma^\mu \bar{\partial}^\mu + g_v \gamma^\mu V_\mu + (M - g_s \phi)] = 0$$

La primera ecuación es la ecuación de Klein-Gordon para el campo escalar con la densidad escalar bariónica $\bar{\psi}\psi$ como fuente. La segunda es la ecuación de Maxwell con la corriente bariónica $B_\mu = i\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ como fuente. La tercera ecuación es la ecuación de Dirac para el campo bariónico, en esta ecuación se encuentran presentes los campos de los mesones V^μ y ϕ .

Las ecuaciones de movimiento forman un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales no lineales acopladas, estas no pueden resolverse analíticamente. No podemos usar teoría de perturbaciones para aproximar la solución de este conjunto de ecuaciones debido a que en todas las interacciones fuertes, se espera que las constantes de acoplamiento g_s y g_v sean mayores que la unidad. El método más simple para aproximar

la solución es el de aproximación de campo medio (MFT), el cual consiste en reemplazar los operadores de campo para los mesones por sus valores de expectación en el estado base.

Reduciendo los operadores del campo mesónico a campos clásicos constantes. Este método de aproximación se interpreta físicamente como el proceso en que los mesones producen un campo promedio estático donde se mueven los nucleones.

4.2.3 Teoría del campo medio MFT

Se supone que los bariones se mueven en un campo escalar medio de valor $\phi_0 \equiv \langle \phi \rangle$ y en un campo vectorial $\langle \vec{V} \rangle = 0$ donde $V_0 \equiv \langle V^0 \rangle = V^\mu \partial^{\mu 0}$.

Introduciendo la hipótesis $\phi = \phi_0 \equiv \langle \phi \rangle$ y $V^\mu \equiv V^0 \partial^{\mu 0}$ y sustituyendo en las ecuaciones de movimiento de la sección anterior se obtiene:

$$\begin{aligned}
 m_s^2 \phi_0 &= g_s \bar{\psi} \psi \\
 \phi_0 &= \frac{g_s \bar{\psi} \psi}{m_s^2} \\
 m_V^2 V^0 &= g_V \bar{\psi} \gamma^0 \psi \\
 V^0 &= \frac{g_V \bar{\psi} \gamma^0 \psi}{m_V^2} \\
 V^0 &= \frac{g_V}{m_V^2} \rho_B \\
 [i\gamma_\mu \partial^\mu - g_V \gamma^0 V^0 - (M - g_s \phi_0)] \psi &= 0
 \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Proponemos como solución de (4.2.8) una expresión del tipo de ondas planas

$\psi(\vec{x}, t) = \psi(k, s) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - iEt}$. Sustituyendo:

$$\partial^0 \psi = \psi(k, s) (-iE) e^{-ikx} \quad (4.2.9)$$

$$\partial^l \psi = \psi(k, s) (ik^l) e^{-ikx} \quad (4.2.10)$$

Sustituimos en la ecuación (4.2.8):

$$\left[i\gamma_0(-iE) + i\gamma_l(ik^l) - g_v \gamma^0 V^0 - (M - g_s \phi_0) \right] \psi(k, s) e^{-ikx} = 0 \quad (4.2.11)$$

Queremos comparar la ecuación (4.2.11) con la ecuación de Dirac para una partícula

libre. $(i\gamma_\mu \partial^\mu - M) \psi(\vec{x}, t) = 0$

Si sustituimos $\psi(\vec{x}, t) = \psi(k, s) e^{-ikx}$

$$\left[i\gamma_0(-iE) + i\gamma_l(ik^l) - M \right] \psi(k, s) e^{-ikx} = 0$$

$$\left[i\gamma_0(-iE) + i\gamma_l(ik^l) - M \right] \psi(k, s) = 0 \quad (4.2.12)$$

De la ecuación (4.2.11)

$$\left[i\gamma_0(-iE) - g_v \gamma^0 V^0 + i\gamma_l(ik^l) - (M - g_s \phi_0) \right] \psi(k, s) = 0 \quad (4.2.13)$$

$$\left[\gamma_0(E - g_v V^0) - \gamma_l k^l - (M - g_s \phi_0) \right] \psi(k, s) = 0$$

En el medio nuclear la masa de los bariones cambia, siendo $M - g_s \phi_0 \equiv M^*$ en vez

de M. Por otra parte la energía de la partícula es también modificada $E - g_v V^0 \equiv E^*$.

La densidad Lagrangiana en la aproximación del campo promedio (MFT) queda:

$$\mathcal{L}_{MFT} = \bar{\psi} \left[i\gamma_\mu \partial^\mu - g_v \gamma^0 V_0 - (M - g_s \phi_0) \right] \psi - \frac{1}{2} m_s^2 \phi_0^2 + \frac{1}{2} m_v^2 V_0^2 \quad (4.2.14)$$

4.2.4 Propagador para el estado fundamental de un sistema de bariones.

Sea $|\psi_0\rangle$ el estado fundamental del sistema de bariones. $|n_1(k_1), n_2(k_2), n_3(k_3) \dots n_N(k_{N_s})\rangle$

El operador $\psi(\vec{x}, t)$ para el campo bariónico se escribe como

$$\psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, s} \left[a_{\vec{k}, s} u(\vec{k}, s) e^{-ikx} + b_{\vec{k}, s}^\dagger v(\vec{k}, s) e^{ikx} \right] \quad (4.2.15)$$

$$\bar{\psi}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, s} \left[b_{\vec{k}, s} \bar{v}(\vec{k}, s) e^{-ikx} + a_{\vec{k}, s}^\dagger \bar{u}(\vec{k}, s) e^{ikx} \right] \quad (4.2.16)$$

El propagador de Bariones es:

$$\begin{aligned} iG_{\alpha\beta}^0(x'-x) &\equiv \langle \psi_0 | T \{ \psi_\alpha(x') \bar{\psi}_\beta(x) \} | \psi_0 \rangle \\ &= \theta(t'-t) \langle \psi_0 | \psi_\alpha(x') \bar{\psi}_\beta(x) | \psi_0 \rangle - \theta(t-t') \langle \psi_0 | \bar{\psi}_\beta(x) \psi_\alpha(x') | \psi_0 \rangle \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

Al desarrollar y simplificar se obtiene

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}^0(x'-x) &= \theta(t'-t) \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \left[\left(\frac{\not{k} + M}{2E(\vec{k})} \right)_{\alpha\beta} e^{-ik(x'-x)} \right] \theta(|\vec{k}| - k_f) \\ &\quad - \theta(t-t') \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \left\{ \left[\frac{\not{k} - M}{2E(\vec{k})} \right]_{\alpha\beta} e^{-ik(x-x')} + \left[\frac{\not{k} + M}{2E(\vec{k})} \right]_{\alpha\beta} e^{-ik(x'-x)} \theta(k_f - |\vec{k}|) \right\} \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

Tomamos la transformada de Fourier de $iG_{\alpha\beta}^0(q) \equiv \int e^{iqy} iG_{\alpha\beta}^0(y) d^4y$ y donde $y \equiv x' - x$.

$$G_{\alpha\beta}^0(q) = \underbrace{\frac{i\pi}{E(\vec{q})} (\not{q} + M)_{\alpha\beta} \theta(k_f - |\vec{q}|) \delta(q_0 - E(\vec{q}))}_{G_D^0(q)} + \underbrace{\frac{(\not{q} + M)_{\alpha\beta}}{q^2 - M^2 + i\epsilon'}}_{G_F^0(q)} \quad (4.2.19)$$

Donde $G_D^0(q)$ es la parte dependiente de la densidad y $G_F^0(q)$ es el propagador de Fermi.

Por lo que el propagador del barión puede ser escrito como $G(q) = G_D(q) + G_F(q)$.

4.3 Propagador del mesón sigma en el medio nuclear

Utilizaremos el mismo formalismo explicado en la sección 3.3 sólo que agregaremos las interacciones respectivas a la Lagrangiana del modelo de Walecka.

4.3.1 Mesones en el medio nuclear

Consideramos el propagador del mesón escalar σ en el medio nuclear, el cual esquemáticamente está dado por la Figura 4.3-1:

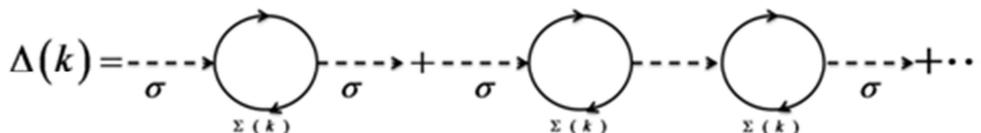


Figura 4.3-1 Diagrama del propagador vestido del mesón sigma.

Donde $\Sigma(q)$ es la autoenergía. La aproximación en cadena está dada por:

$$\Delta(k) = \Delta^0(k) + \Delta^0(k)\Sigma(k)\{\Delta^0(k) + \Delta^0(k)\Sigma_s(k)\Delta^0(k) + \dots\} \quad (4.3.1)$$

Ecuación de Dyson que ya hemos utilizado está dado por:

$$\begin{aligned} \Delta(k) &= \Delta^0(k) + \Delta^0(k)\Sigma(k)\Delta(k) \\ \Delta(k) &= \frac{1}{\Delta_0^{-1}(k) - \Sigma(k)} = \frac{1}{k^2 - (m_\sigma^0)^2 - \Sigma(k)} \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

En este caso la autoenergía estaría dada por la interacción del mesón sigma con los nucleones, la mezcla del mesón sigma y el mesón omega y por último consideramos la interacción entre el mesón sigma y los piones.

$$\Sigma(k) = \Sigma_{\sigma\pi}(k) + \Sigma_{\sigma N}(k) + \Sigma_{\mu}^m(k) \quad (4.3.3)$$

4.3.2 Interacción con los nucleones

$$\begin{aligned} -i\Sigma_{\sigma N}(k) &= (ig_s)(-1) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [iG_{\beta\alpha}(q)](ig_s)[iG_{\alpha\beta}(q+k)] \\ &= (ig_s)(-1)[i](ig_s)[i] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} G_{\beta\alpha}(q)G_{\alpha\beta}(q+k) \\ &= (-1)(ig_s)^2 [i]^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} G_{\beta\alpha}(q)G_{\alpha\beta}(q+k) \\ &= -(g_s)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} G_{\beta\alpha}(q)G_{\alpha\beta}(q+k) \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

4.3.3 Mezcla sigma omega

$$i\Sigma_{\mu}^m(k) = ig_s g_v \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} Tr[G(q)\gamma_{\mu}G(q+k)] \quad (4.3.5)$$

El efecto de la mezcla escalar-vectorial entre el mesón sigma y el mesón omega es un efecto puro del medio, que ocurre cuando el mesón omega longitudinal produce una partícula- hoyo que decae en un σ o viceversa. $G(q) = G_F(q) + G_D(q)$ es el propagador completo del nucleón [33] dado por:

$$G(q) = (\gamma_\mu q^{*\mu} + M^*) \left[\frac{1}{q^{*2} - M^{*2} + i\epsilon} + \frac{i\pi}{E^*(q)} \delta(q_0 - E^*(q)) \Theta(k_F - |\vec{q}|) \right] \quad (4.3.6)$$

donde, $q^{*\mu} \equiv (q^0 - g_\nu V^0, \vec{q})$, $E^*(q) \equiv \sqrt{\vec{q}^2 + M^{*2}}$, k_F es el momentum de Fermi, y M^* es la masa efectiva del nucleón.

El propagador completo estaría dado por:

$$\Delta(k^2) = \frac{1}{k^2 - m_\sigma^2 - \text{Re}\Sigma^R(k^2) - i\text{Im}\Sigma^R(k^2)} \quad (4.3.7)$$

con:

$$\text{Re}\Sigma^R(k) = \text{Re}[\Sigma_{\sigma\pi\pi}^R(k) + \Sigma_{\sigma N}^R(k) + \Sigma_\mu^{Rm}(k)] \quad (4.3.8)$$

$$\text{Im}\Sigma(k) = \text{Im}\Sigma_{\sigma\pi\pi}(k) \quad (4.3.9)$$

4.4 Resultados

La Figura 4.4-1 muestra la función espectral y la parte real del propagador inverso para el mesón sigma a dos veces la densidad de la materia nuclear. En la figura 4.3-2 se ha graficado a una vez la densidad normal de la materia nuclear. La masa del nucleón se ha fijado a su valor físico de $M = 939\text{MeV}$. La masa efectiva del nucleón M^* es la apropiada para el valor de la densidad de saturación de la materia nuclear. La relación entre la masa del nucleón y su masa efectiva es tomada $M^* / M = 0.730$, la constante de acoplamiento entre σ -N $g_s^2 = 54.289$ y para el acoplamiento entre ω -N es $g_v^2 = 102.770$ [38].

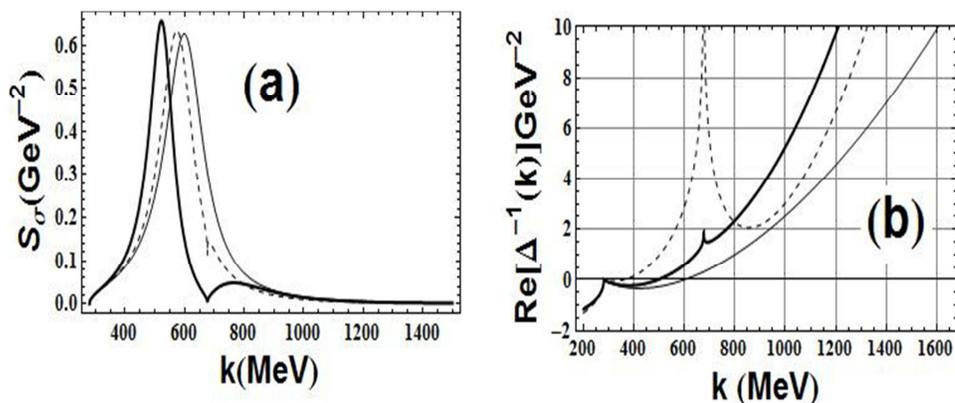


Figura 4.4-1 Gráficas a dos veces la densidad de la materia nuclear con una masa de entrada de $m_\sigma = 600\text{MeV}$ (a) Función espectral y (b) Parte real del propagador inverso. La curva sólida representa el mesón sigma en el vacío, la curva remarcada representa la masa del mesón Sigma en la materia nuclear sin tomar en cuenta el efecto de la mezcla omega -sigma y la curva punteada representa la masa de Sigma en el medio nuclear considerando el efecto de la mezcla.

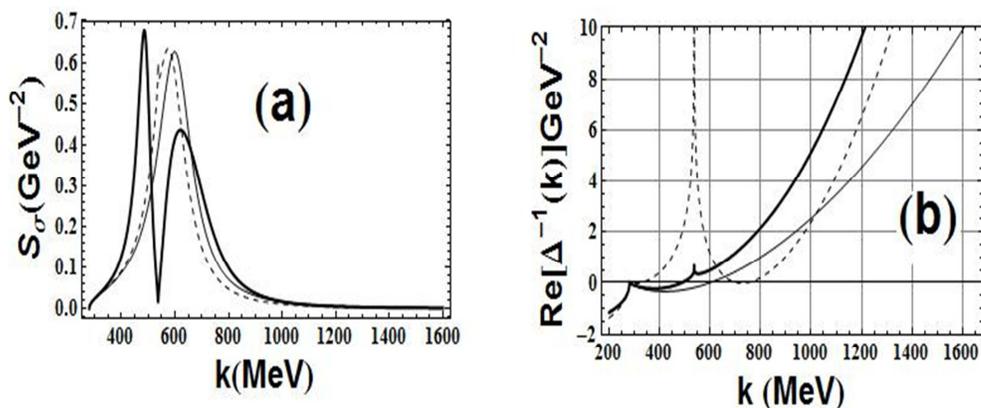


Figura 4.4-2 Gráficas a una vez la densidad de la materia nuclear con una masa de entrada de $m_\sigma = 600\text{MeV}$ (a) Función espectral y (b) Parte real del propagador inverso. La curva sólida representa el mesón sigma en el vacío, la curva remarcada representa la masa del mesón Sigma en la materia nuclear sin tomar en cuenta el efecto de la mezcla omega -sigma y la curva punteada representa la masa de Sigma en el medio nuclear considerando el efecto de la mezcla.

Como se puede observar a las figuras anteriores en el inciso (a), la función espectral presenta dos picos los cuales ya habían sido reportados por Saito *et al* [85]. Por otro lado, las figuras muestran en el inciso (b) el segundo pico no es un cero de la parte real del propagador inverso por lo tanto no deben de ser consideradas una solución física para la masa.

Definiendo la masa de σ como el cero de la parte real del propagador inverso y el ancho crítico dado por la ecuación (3.4.10) en el medio se obtiene que $\Gamma_{\sigma}^{crit} < \Gamma_{\sigma}$.

En las tablas 9 y 10 únicamente se ha calculado la masa y ancho crítico de Breit-Wigner para estudiar la contribución del efecto de la mezcla sigma-omega en la masa y ancho del mesón sigma.

Tabla 9. Masas y anchos críticos con valores de entrada $m_{\sigma} = 600MeV, 500MeV$ and $350MeV$ a dos veces la densidad normal de la materia nuclear.

	MeV					
	m_{σ}	Γ_{σ}^{crit}	m_{σ}	Γ_{σ}^{crit}	m_{σ}	Γ_{σ}^{crit}
En el vacío	600	267	500	260	350	197
Sin el efecto de la mezcla	495	259	427	256	310	197
Con el efecto de la mezcla	359	239	317	248	280	195

Para $m_{\sigma} \leq 400MeV$ el efecto de la mezcla sigma-omega produce un desplazamiento de la masa hacia $m_{\sigma} \approx 2m_{\pi}$.

Tabla 10. Masas y anchos críticos con valores de entrada $m_{\sigma} = 600MeV, 500MeV$ and $350MeV$ a una vez la densidad normal de la materia nuclear.

	MeV					
	m_{σ}	Γ_{σ}	m_{σ}	Γ_{σ}	m_{σ}	Γ_{σ}
En el vacío	600	267	500	260	350	197
Sin el efecto de la mezcla	487	260	426	256	311	197
Con el efecto de la mezcla	324	254	294	235	280	194

CONCLUSIONES

En el capítulo tres hemos podido calcular la masa, el ancho y la constante de acoplamiento del mesón sigma en el vacío cuando este se acopla a 2 piones virtuales. Una contribución de este estudio es que no fue necesario fijar ningún valor *a priori* y se ha demostrado que es posible obtener todos los valores plausibles utilizando la condición de que el ancho parcial debe ser igual al ancho crítico. Hemos comparado nuestros resultados con los valores obtenidos tanto en experimentos como con otros modelos teóricos, obteniendo valores muy cercanos y en algunos casos han concordado de manera exacta. Según nuestros cálculos la masa del mesón Sigma debe ser menor a 620MeV lo cual concuerda con los experimentos realizados por el Fermilab y la colaboración del BES.

En el capítulo cuatro se ha calculado el desplazamiento de la masa y el ancho del mesón sigma en la materia nuclear, sin tomar en cuenta el efecto de la mezcla del mesón sigma y el mesón omega, así como tomando en cuenta este efecto. Hemos utilizado la definición de masa tanto de la función espectral como de la parte real del propagador inverso concluyendo que la parte real del propagador inverso nos entrega valores que concuerdan con otros estudios que han reportado una disminución de la masa de sigma cercano a dos veces la masa de pion [96]-[97].

El corrimiento de la masa del mesón sigma es cercano a dos veces la masa del pion cuando el mesón sigma en el vacío tiene una masa menor o igual a 400 MeV. Este resultado ha sido ligado a la restauración parcial de la simetría quiral por algunos autores [54]. Por último hemos encontrado que no hay mucha diferencia en el corrimiento de la masa del mesón sigma a una vez y dos veces la densidad de la materia nuclear normal.

BIBLIOGRAFIA

- [1] V Chandra, R Kumar and V Ravishankar *Indian J. Phys.* **84** 1789 (2010)
- [2] V Chetluru and O Barannikova *Indian J. Phys.* **84** 1807 (2010)
- [3] S Blinnikov, A Tolstov, E Sorokina and A Dolgov *High Energy Dens Phys.* **9** 17 (2013)
- [4] Ross E. Falcon et al *High Energy Dens Phys.* **9** 82 (2013)
- [5] N L Saini, H Yang, S K Saxena and A Bansil *J Phys Chem Solids* **67** 1913 (2006)
- [6] A P Mishra, R K Mohapatra, P S Saumia and A M Srivastava *Indian J Phys* **85** 909 (2011)
- [7] G Vujanovic, C Gale and J Ruppert *Indian J Phys* **85** 1021(2011)
- [8] P K Panda and B P Das *Indian J Phys* **84** 817 (2010)
- [9] A Sharma *Indian J Phys* **84** 391 (2010)
- [10] B B Deo and L Maharana *Indian J Phys* **84** 847 (2010)
- [11] R Grajcarek for the ALICE Collaboration “Measurement of heavy-flavor production in Pb-Pb collisions at the LHC with ALICE” [arXiv:1209.1925v1](https://arxiv.org/abs/1209.1925v1) [nucl-ex] (2012)
- [12] W Przygoda et al *Acta Phy Pol* **B37** 139 (2006)
- [13] <http://www-hades.gsi.de>
- [14] J G Messchendorp [PANDA Collaboration] *In the Proceedings of 11th International Conference on Meson-Nucleon Physics and the Structure of the Nucleon (MENU 2007)*, Julich, Germany, 10-14 Sep 2007 123 (2007)
- [15] <http://j-parc.jp/index-e.html>
- [16] <http://www.phenix.bnl.gov/>
- [17] M Naglisa *Eur Phys J.* **C61** 835 (2009)
- [18] S Mitra, S Ghosh, and S Sarkar *Phys Rev* **C85** 064917 (2012)
- [19] M Nanova, for the CBELSA/TAPS Collaboration “In-medium Properties of the η' -Meson from Photonuclear Reactions” [arXiv:1209.1026v1](https://arxiv.org/abs/1209.1026v1) [nucl-ex] (2012)
- [20] A Lavagno *PoS(EPS-HEP2011)* **478** “Hadron production in hot and dense nuclear matter” [arXiv:1202.3238v1](https://arxiv.org/abs/1202.3238v1) [nucl-th] (2012)
- [21] K Antipin et al for the CBM collaboration *Indian J Phys* **84** 1663 (2010)
- [22] H M Fried, T Grandou, Y-M Sheu *Annals of Physics* **327** 2666 (2012)
- [23] W Melnitchouk *Indian J Phys.* **83** 617 (2009)
- [24] A Bhasin et al for the ALICE collaboration *Indian J Phys* **84** 1739 (2010)
- [25] A Szczurek *Indian J Phys* **85** 1009 (2011)
- [26] Y Nambu and G Jona-Lasinio *Phys Rev* **122** 345 (1961)
- [27] Y Nambu and G Jona-Lasinio *Phys Rev* **124** 246 (1961).
- [28] E Quack, P Zhuang, Y Kalinovsky, S P Klevansky, and J Hüfner *Phys Lett* **B348** 1 (1995)
- [29] Shijun Mao and Pengfei Zhuang “Meson Scattering in a Pion Superfluid” [arXiv:1202.3490v2](https://arxiv.org/abs/1202.3490v2) [hep-ph] (2012)
- [30] R A Serway and J W Jewett. “Física: Texto basado en cálculo.” 3Ed México Thomson p. 527(2003)
- [31] T. Schafer y E. V. Schuryak, *Rev. Mod. Phys.* **70** 323 (1998).
- [32] B D Serot *Rep Prog Phys.* **55** 1855 (1992)
- [33] B D Serot and J D Walecka *Adv Nucl Phys* **16** 1 (1986)

- [34] B D Serot and J D Walecka *Int J Mod Phys* **E6** 515 (1997)
- [35] R J Furnstahl, H B Tang and B D Serot *Phys Rev* **C52**, 1368 (1995)
- [36] B D Serot and J D Walecka *Phys Lett* **B87** 172 (1979)
- [37] A Faessler, A J Buchmann, and M I Krivoruchenko *Phys Rev* **C56** 1576 (1997)
- [38] H C Jean, J Piekarewicz and A G Williams *Phys Rev* **C34** 1981 (1994)
- [39] J Rozynek *Acta Phy Pol B Proceedings Supplement* **5** 375 (2012)
- [40] F S Navarra, D A Fogaça and L G Ferreira-Filho *Indian J Phys* **85** 793 (2011)
- [41] S A Chin *Ann Phys* **108** 301 (1977)
- [42] N Wu “*BES R measurements and J/ψ decays*” [arXiv:hep-ex/0104050v1](https://arxiv.org/abs/hep-ex/0104050v1) (2001)
- [43] E M Aitala, et al *Phys Rev Lett* **86** 770 (2001)
- [44] A Faessler, T Gutsche, M A Ivanov, V E Lyubovitskij and P Wang *Phys Rev* **D68** 014011 (2003)
- [45] L Roca and E Oset *Nucl Phys* **A723** 129 (2003)
- [46] N A Tornqvist “*Summary talk at the conference on the sigma resonance*” [arXiv:hep-ph/0008135v3](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0008135v3) (2000)
- [47] M Ishida *Prog Theor Phys Suppl* **149** 190 (2003)
- [48] N A Tornqvist in *Proc of Possible Existence of sigma meson and its implication to hadron physics* (Sigma Meson 2000) YITP Kyoto June 2000 Kyoto 102 No 5 (2001) KEK-proceedings 2000-4 (2001)
- [49] J R Morones-Ibarra and A Santos-Guevara *Acta Phy Pol* **B38** 2555 (2007)
- [50] M Gell-Mann and M Levy, *Nuovo Cim* **16** 705 (1960)
- [51] A V Friesen Y L Kalinovsky and V D Toneev *Particles and Nuclei Letters* **9** 1 (2012)
- [52] T Kunihiro *ProgTheorPhysSuppl* **168** 156 (2007)
- [53] C S Lim “*Implications of sigma models in the standard model and beyond*” [arXiv:hep-ph/0010109v1](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0010109v1) (2000)
- [54] T Kunihiro “*The sigma meson and chiral restoration in nuclear medium*” [arXiv:nucl-th/0103056v1](https://arxiv.org/abs/nucl-th/0103056v1) (2001)
- [55] Ennio Cavalli and Federico Maggioni “*Se nascevo gabbiano... era peggio: (mezzo mondo visto da un bambino)*” 1ª Ed. Feltrinelli Milano p.117 (2001)
- [56] Francisco Javier Torrent Rodrigo “*El Legado Hermético de la Antigüedad*” Madrid Bubok Publishing p.122 (2008)
- [57] Carlos Goñi Zubieta “*Historia de la filosofía I: Filosofía antigua*” Madrid Palabra p.66 (2002).
- [58] J. Eduardo Martínez Márquez “*Química I*” Mexico, D.F Thomson p.46 (2006).
- [59] Helge Kragh, José Alberto Pérez Díez, Daniel Duque Campayo, Ana Granados Sanandrés and Manuel Sangüesa Lazcano “*Generaciones cuánticas: una historia de la física en el siglo XX*” Tres Cantos (Madrid): Akal (2007)
- [60] Robert Oerter and Martín Manrique Mansour “*La teoría de casi todo / The Theory of Almost Everything El modelo estandar, triunfo no reconocido de la física moderna*” México Fondo De Cultura Economica p.p.285-288 (2008)
- [61] Jennifer Ouellette and Alan Chodos “*Cuerpos Negros: Relatos De Los Anales De La Física*” Bogotá Grupo Editorial Norma p.412 (2007)
- [62] Xuan Thuan Trinh and Josep Sarret Grau “*La melodía secreta... : y el hombre creó el universo*” Ediciones de Intervención Cultural p. 136 (1988)
- [63] A Scotti and D Y Wong *Phys Rev* **138** B145 (1965)
- [64] D Loebbaka, S Oneda and J C Pati *Phys Rev* **144** 1280 (1966)

- [65] E Lomon *Phys Rev* **D14** 2402 (1976)
- [66] N N Achasov and G N Shestakov *Phys Lett PRL* **99** 0720001 (2007)
- [67] K Tezuka *Phys Rev* **C80** 014301 (2009)
- [68] J Meng, C Ji-Sheng and L Jia-Rong *Commun. Theor. Phys.* **40** 735 (2003)
- [69] M Albaladejo and J A Oller *Phys. Rev. D* **86** 034003 (2012)
- [70] Masayasu Harada, Hironori Hoshino, and Yong-Liang Ma *Phys Rev* **D85** 114027 (2012)
- [71] D Parganlija, P Kovács, Gy. Wolf, F Giacosa, and D H Rischke *Phys Rev D* **87** 014011 (2013)
- [72] N N Biswas et al., *Phys Rev Lett* **47**, 1378 (1981)
- [73] GAMS Collaboration, D Alde et al. *Phys Lett B* **397** 350 (1997)
- [74] WA102 Collaboration, D Barberis et al., *Phys Lett B* **453** 316 (1999)
- [75] CLEO Collaboration, D M Asner et al. *Phys Rev D* **61** 012002 (2000)
- [76] Levich, Benjamin G. “*Curso de física teórica: Mecánica cuántica*” 3Ed Barcelona: Reverté p. 593 (1976)
- [77] W E Burcham “*Física nuclear*”. Barcelona Editorial Reverte p.579 (1974)
- [78] <http://www.fnal.gov/>
- [79] <http://www.ihep.ac.cn/english/E-Bepc/index.htm>
- [80] W Huo, X Zhang and T Huang *Phys Rev* **D65** 097505 (2002)
- [81] P A M Dirac *Proc. Roy. Soc.* **A114** 243 (1927)
- [82] V Koch *Int J Mod Phys* **E6** 203 (1997)
- [83] G Wolf, B Friman and M Soyeur *Nucl Phys* **A640** 129 (1998)
- [84] J R Morones-Ibarra and A Santos-Guevara *Parmana-J Phys* **68** 925 (2007)
- [85] K Saito, K Tsushima, A Thomas, and A Williams *Phys Lett* **B433** 243 (1998)
- [86] T Hatsuda and T Kunihiro *Nucl Phys* **A670** 186 (2000)
- [87] A Gokalp, A Kucukarslan and O Yilmaz *Phys Rev* **D67** 073008 (2003)
- [88] C Dib and R Rosenfeld *Phys Rev* **D63** 117501 (2001)
- [89] A Ferrer Soria “*Física nuclear y de partículas*” 2Ed Universidad de Valencia p428 (2006)
- [90] J R Schrieffer “*Handbook of High-Temperature Superconductivity: Theory and Experiment.*” New York Springer Internet resource pp 89-90 (2007)
- [91] Bennemann, Karl-Heinz, and J B Ketterson “*Superconductivity in Nanostructures, High-Tc and Novel Superconductors, Organic Superconductors: With 26 Tables.*” Berlin [u.a.]: Springer pp. 230-240 (2004)
- [92] J D Walecka “*Theoretical Nuclear and Subnuclear Physics.*” Singapore World Scientific pp. 169-177 (2004)
- [93] R. D. Mattuck “*Guide to Feynman Diagrams in the Many-Body Problem*” (Dover Publications Inc. New York 1992) p.181
- [94] Philippe Dennery André Krzywicki “*Mathematics for physicists*” Mineola N.Y. : Dover Publications 1996 p 64
- [95] V. B. Berestetskii L. D. Landau E. M. Lifshitz L P Pitaevskii J. B. Sykes J. S. Bell “*Quantumelectrodynamics*” Amsterdam : Elsevier Butterworth-Heinemann 1982 p.496
- [96] J A Oller, E Oset, J R Peláez, *Phys Rev D* **60** 074001 (1999)
- [97] T Hatsuda, T Kunihiro, H Shimizu, *Phys Rev Lett* **82** 2840 (1999)

GLOSARIO

A

aproximación holográfica

Los modelos holográficos aplicados a QCD van en dos direcciones uso de teoría de cuerdas (Top/Down) y formalismo gravitatorio (Bottom/Up) 25

átomo

Unidad de materia más pequeña de un elemento químico que mantiene su identidad o sus propiedades, y que no es posible dividir mediante procesos químicos. 10

autoenergía

105

B

bariones

Familia de partículas subatómicas formadas por tres quarks. Los más representativos, por formar el núcleo del átomo, son el neutrón y el protón 14

bosón

Es uno de los dos tipos básicos de partículas elementales de la naturaleza (el otro tipo son los fermiones). La denominación bosón fue dada en honor al físico indio Satyendra Nath Bose. Se caracterizan por

(1) Tener un espín entero (0,1,2,...). **(2)** No cumplen el principio de exclusión de Pauli y siguen la estadística de Bose-Einstein. Esto hace que presenten un fenómeno llamado condensación de Bose-Einstein (el desarrollo de máseres y láseres fue posible puesto que los fotones de la luz son bosones). **(3)** La función de onda cuántica que describe sistemas de bosones es simétrica respecto al intercambio de partículas. 14

bosones de Nambu-Goldstone

Bosones que aparecen en modelos de teoría cuántica de campos con ruptura espontánea de simetría. 19

C

cálculo perturbativo

Conjunto de esquemas aproximados para describir sistemas cuánticos complicados en términos de otros más sencillos. Se empieza con un sistema simple y gradualmente se va activando hamiltonianos "perturbativos", que representan pequeñas alteraciones al sistema. 2

campo

Un campo representa la distribución espacial de una magnitud física que muestra cierta variación en una región del espacio. 37

D

densidad

Masa por unidad de volumen. 1

E

ecuación de estado

Uno de los principales objetivos de la Física Nuclear es la caracterización de la llamada ecuación de estado de la materia nuclear. Dicha ecuación permitiría describir el comportamiento de la materia nuclear en diferentes condiciones de densidad y temperatura por lo que su conocimiento es fundamental para describir tanto la formación del universo tras el big-bang como la evolución de los cuerpos estelares. 2

espín

También llamado spin o momento angular intrínseco se refiere a una propiedad física de las partículas subatómicas, por la cual toda partícula elemental tiene un momento angular intrínseco de valor fijo. Se trata de una propiedad intrínseca de la partícula como lo es la masa o la carga eléctrica. 14

F

fermión

Llamado así en honor al célebre científico italiano Enrico Fermi, es uno de los dos tipos básicos de partículas que existen en la naturaleza (el otro tipo son los bosones). Los fermiones se caracterizan por tener espín semi-entero ($1/2, 3/2, \dots$). En el modelo estándar existen dos tipos de fermiones fundamentales, los quarks y los leptones. En el modelo estándar de física de partículas los fermiones se consideran los constituyentes básicos de la materia, que interactúan entre ellos vía bosones de gauge. 14

física atómica

Campo de la física que estudia las propiedades y el comportamiento de los átomos. 1

física de partículas

Rama de la física que estudia los componentes elementales de la materia y las interacciones entre ellos. 10

física hadrónica

Parte de la física de partículas que estudia a los hadrones. 1

física nuclear

Rama de la física que estudia las propiedades y el comportamiento de los núcleos atómicos. 1

fluctuación cuántica

Cambio temporal en la cantidad de energía en un punto espacio-temporal. 22

fuerza débil

14

fuerza fuerte

14

G

gluón

Bosón portador de la interacción nuclear fuerte, una de las cuatro fuerzas fundamentales. No posee masa ni carga eléctrica, pero sí carga de color, por lo que además de transmitir la interacción fuerte también la sufre. 3

H

hadrón

Partícula subatómica formada por quarks que permanecen unidos debido a la interacción nuclear fuerte entre ellos. Antes de la postulación del modelo de quarks se definía a los hadrones como aquellas partículas que eran sensibles a la interacción fuerte. 2

I

interacción fuerte

Es una de las cuatro interacciones fundamentales que el modelo estándar de la física de partículas establece para explicar las fuerzas entre las partículas conocidas. Esta fuerza es la responsable de mantener unidos a los nucleones (protones y neutrones) que coexisten en el núcleo atómico, venciendo a la repulsión electromagnética entre los protones que poseen carga eléctrica del mismo signo (positiva) y haciendo que los neutrones, que no tienen carga eléctrica, permanezcan unidos entre sí y también a los protones. 13

iones pesados

Átomos con más de dos protones a los que les faltan o sobran electrones y por lo tanto están cargados eléctricamente. 1

isoespín

Número cuántico relacionado a la interacción fuerte y aplicado a las interacciones del neutrón y el protón. 2

L

leptones

Los leptones forman parte de una familia de partículas elementales conocida como la familia de los fermiones, al igual que los quarks. Un leptón es un fermión fundamental sin carga hadrónica o de color. Existen seis leptones y sus correspondientes antipartículas 14

LHC del CERN (Large Hadron Collider)

Acelerador y colisionador de partículas ubicado en la Organización Europea para la Investigación Nuclear (**CERN**, sigla que corresponde a su antiguo nombre en francés *Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire*), cerca de Ginebra, en la frontera franco-suiza. Fue diseñado para colisionar haces de hadrones, más exactamente de protones, de hasta 7 TeV de energía, siendo su propósito principal examinar la validez y límites del Modelo Estándar, el cual es actualmente el marco teórico de la física de partículas, del que se conoce su ruptura a niveles de energía altos. 2

M

materia en condiciones extremas

Materia que existe en forma de quarks desconfiados. Conocida como plasma de quarks-gluones. Esto ocurre a temperaturas mayores a 100,000 veces la temperatura del centro del Sol o mayores a 6 veces la densidad normal de la materia nuclear. En QCD se ha calculado $T > 200\text{MeV}$. Todavía no hay consenso sobre los valores críticos. 1

materia nuclear

Materia formada por neutrones y protones. 2

mecanismo de Nambu-Goldstone

Mecanismo que describe una ruptura espontánea de simetría gauge global. Si la lagrangiana es invariante bajo una cierta simetría pero el estado del vacío no entonces se dice que el sistema tiene una 19

mesones

Partículas que responden a la interacción nuclear fuerte, esto es, son hadrones con un espín entero. En la teoría estándar los mesones están formados por un quark y un antiquark. Los piones son ejemplos de mesones, su presencia ha sido usada para explicar cómo permanecen unidos neutrones y protones en el núcleo atómico. Los mesones se comportan como bosones. Su número bariónico satisface $B = 0$. 14

mesones exóticos

Son mesones que se encuentran fuera de la clasificación según el modelo de quarks. Estos incluyen glueballs (bolas de pegamento), mesones híbridos y tetraquarks. 2

mesones ligeros

Mesones con spin 0. 2

modelo de Walecka (QHD-I)

4

modelo sigma

16

N

NJL (Nambu Jona-Lasinio)

3

P

PDG (Particle Data Group)

Es una colaboración internacional de físicos de partículas que recogen y analizan los resultados relacionados con las propiedades de las partículas y las interacciones fundamentales. 6

piones

Los piones tienen espín cero, y están compuestos por la primera generación de quarks. Un quark 13

presión

Fuerza ejercida por unidad de área. 1

principio de exclusión de Pauli

Principio cuántico enunciado por Wolfgang Ernst Pauli en 1925. Establece que no puede haber dos fermiones con todos sus números cuánticos idénticos (esto es, en el mismo estado cuántico de partícula individual) en el mismo sistema cuántico ligado. 14

principio variacional

El principio variacional establece que para cualquier función, el valor esperado de un operador es mayor o igual al menor autovalor del operador. 39

propagación

Se llama propagación al conjunto de fenómenos físicos que conducen a las ondas del transmisor al receptor. 2
propagador 96

Q

QCD (Cromodinámica Cuántica)	2
QHD (Hadrodinámica Cuántica)	4
quark	
Junto con los leptones, son los constituyentes fundamentales de la materia. Varias especies de quarks se combinan de manera específica para formar partículas tales como protones y neutrones. Hay seis tipos distintos de quarks up, down, charm, strange, top y bottom.	2
Quark-Gluon Plasma	
Fase de la cromodinámica cuántica (QCD) que existe cuando la temperatura y/o la densidad son muy altas. Este estado se compone de quarks y gluones (casi) libres que son los componentes básicos de la materia. Se cree que existió durante los primeros 20 a 30 microsegundos después de que el universo naciera en la Gran Explosión.	2
quiralidad	
Fenómeno que describe el comportamiento de las partículas en un sistema de referencia dextrógiro, también llamado de mano-derecha, o uno levógiro o de mano-izquierda.	2

S

simetría quiral	
La simetría quiral es una simetría global, que se rompe espontáneamente (de modo parcial). La simetría también se rompe de forma explícita por las masas de los quarks, por lo que los piones tienen masa. La invarianza bajo paridad de un fermion de Dirac se llama simetría quiral.	2

T

temperatura	1
teoría quiral de perturbaciones unitarias	
La teoría quiral unitaria (UChPT) permite extender la teoría quiral de perturbaciones (ChPT) a energías más altas usando técnicas que satisfacen la unitaridad exacta en canales acoplados y encajan con los resultados de ChPT a bajas energías.	24

ANEXO

Mecánica Cuántica relativista

La mecánica cuántica relativista es la unión de la mecánica cuántica y la teoría de la relatividad. Es decir, la mecánica cuántica relativista es simplemente la mecánica cuántica de objetos relativistas.

Espacio de Hilbert

Los estados físicos de un sistema cuántico están caracterizados por vectores $|\psi\rangle$ en un espacio vectorial complejo con producto escalar, este espacio llamado espacio de Hilbert es el que se maneja en la mecánica cuántica relativista.

Notación de Dirac

Los estados físicos se representarán por letras del alfabeto griego y los números con el alfabeto latino. Una función ψ se expresará como $|\psi\rangle$, que denominaremos ket. Dado que estas funciones en general serán complejas, definiremos la función complejo conjugada ψ^* como $\langle\psi|$, que denominaremos bra.

Producto interno

La definición del producto interno:

$$\langle\phi|\psi\rangle = \int_V \phi^*(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)dV \quad (4.3.10)$$

donde la integral está evaluada en un determinado volumen espacial, y hemos expresado las funciones con la dependencia en el espacio y el tiempo.

Propiedades del producto interno:

1. $\langle \phi | \psi \rangle^* = \langle \psi | \phi \rangle$
2. $\langle a\phi | \psi \rangle = a^* \langle \phi | \psi \rangle$
3. $\langle \phi | a\psi \rangle = a \langle \phi | \psi \rangle$
4. $\langle \phi | \psi_1 + \psi_2 \rangle = \langle \phi | \psi_1 \rangle + \langle \phi | \psi_2 \rangle$
5. $\langle \psi | \psi \rangle \geq 0$ donde $\langle \psi | \psi \rangle = 0 \Leftrightarrow \psi = 0$

Conceptos:

1. Un estado, o función de onda, está normalizado si: $\langle \psi | \psi \rangle = 1$
2. Dos estados, o funciones de onda, son ortogonales si: $\langle \phi | \psi \rangle = 0$
3. Un conjunto de funciones $\{\psi_i\}$, forma un conjunto ortonormal si cumplen: $\langle \psi_i | \psi_j \rangle = \delta_{ij}$

Operadores y propiedades

Un operador es un objeto matemático que actuando sobre una función nos da otra función. El operador cuántico es el operador matemático que representa a un observable (magnitud física) en el formalismo de la mecánica cuántica.

Los operadores se expresan con letras en mayúsculas (alfabeto latino) con acento circunflejo. Son lineales y hermitianos (hermíticos).

La actuación de un operador sobre una función da como resultado otra función. Supongamos un estado definido por la función f sobre el que actúa un operador \hat{A} :

$$\hat{A}f = g$$

Donde g es una nueva función.

Propiedades:

1. $(\hat{A} \pm \hat{B})f = \hat{A}f \pm \hat{B}f$
2. $\hat{A}(\hat{B}\hat{C}) = (\hat{A}\hat{B})\hat{C} = \hat{A}\hat{B}\hat{C}$
3. $\hat{A}^2 f = \hat{A}\hat{A}f$

Regla matemática que establece si dos operadores conmutan o no:

$$[\hat{A}, \hat{B}]f = \hat{A}(\hat{B}f) - \hat{B}(\hat{A}f)$$

Propiedades:

1. $[A, A] = 0$ Todo conmutador conmuta consigo mismo.
2. $[A, B] = -[B, A]$
3. $[A, F(A)] = 0$ Cualquier operador conmuta con cualquier función de dicho operador.
4. $[A, B+C] = [A, B] + [A, C]$
5. $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$
6. $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$

Un operador hermítico (también llamado hermitiano) definido sobre un espacio de Hilbert es un operador lineal que, sobre un cierto dominio, coincide con su propio operador adjunto $\langle \psi | \hat{A} | \phi \rangle = \langle \phi | \hat{A} | \psi \rangle^*$. Una propiedad importante de estos operadores es que sus autovalores son siempre números reales.