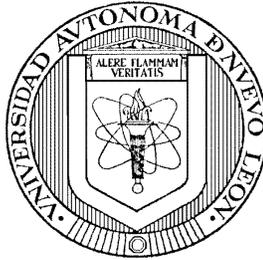


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



DISEÑO DE CONTROLADORES NO LINEALES
PARA UN HELICÓPTERO A ESCALA

POR

MC. OSCAR SALVADOR SALAS PEÑA

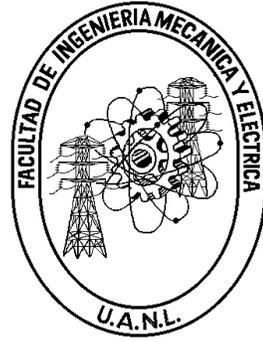
TESIS

EN OPCIÓN AL GRADO DE DOCTOR EN
INGENIERÍA ELÉCTRICA

CD. UNIVERSITARIA

NOVIEMBRE DE 2013

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



DISEÑO DE CONTROLADORES NO LINEALES
PARA UN HELICÓPTERO A ESCALA

POR

MC. OSCAR SALVADOR SALAS PEÑA

TESIS

EN OPCIÓN AL GRADO DE DOCTOR EN
INGENIERÍA ELÉCTRICA

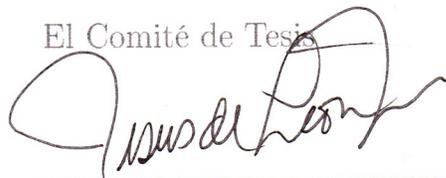
CD. UNIVERSITARIA

NOVIEMBRE DE 2013

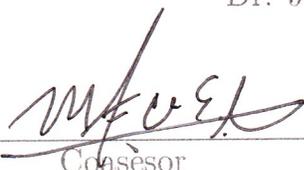
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis
"Diseño de controladores no lineales para un helicóptero a escala"
realizada por el alumno MC. Oscar Salvador Salas Peña, matrícula 1013475,
sea aceptada por su defensa como opción al grado de **Doctor** en Ingeniería Eléctrica.

El Comité de Tesis



Asesor
Dr. Jesús de León Morales



Coasesor
Dr. Miguel F. Escalante Gutiérrez



Coasesor
Dra. Griselda Quiroz Compeán

Coasesor
Dr. Hugo Rodríguez Cortés

Coasesor
Dr. Alejandro Enrique Dzul López

Vo. Bo.
Dr. Moisés Hinojosa Rivera
División de Estudios de Posgrado

Cd. Universitaria, a Noviembre de 2013

A mis padres.

Agradecimientos

A la vida!

Índice General

Agradecimientos	v
Índice General	vi
Índice de Figuras	viii
1 Introducción	1
1.1 Introducción	1
1.2 Motivación y contribución de esta Tesis	3
1.2.1 Motivación	3
1.2.2 Contribución	4
1.3 Objetivo de la Tesis	5
1.4 Organización de la Tesis	5
1.5 Planteamiento del problema	6
2 Modelos dinámicos	8
2.1 Helicóptero de 2-GDL	8
2.1.1 Descripción del sistema aerodinámico de dos rotores	10
2.1.2 Simplificación del modelo dinámico	12
2.2 Cuadrirotor	15
2.2.1 Modelado del cuadrirotor	16
2.2.2 Modelo dinámico de simulación del cuadrirotor	21
2.2.3 Modelo dinámico de control del cuadrirotor	22
2.3 Conclusiones	24

3	Algoritmo de control Super Twisting Adaptivo	25
3.1	Introducción	25
3.2	Controlador Super Twisting	26
3.3	Controlador Super Twisting Adaptivo	27
3.4	No linealidades en los accionadores de aeronaves	35
3.4.1	Resultados experimentales	37
3.5	Conclusiones	44
4	Observadores no lineales	46
4.1	Introducción	46
4.2	Observador No Lineal de Estado Extendido	47
4.3	Diferenciador por Modos Deslizantes de Alto Orden	49
4.4	Comparativo de los observadores	50
4.5	Conclusión	51
5	Esquemas de control y observación	53
5.1	Introducción	53
5.1.1	Control de posición angular basado en Super Twisting Adaptivo	53
5.1.2	Observador No Lineal de Estado Extendido	54
5.1.3	Diferenciador por Modos Deslizantes de Alto Orden	58
5.2	Conclusiones	61
6	Resultados experimentales y de simulación	62
6.1	Control del Helicóptero de 2-GDL	62
6.1.1	Control ASTA basado en Observador No Lineal Extendido.	64
6.1.2	Control ASTA basado en Diferenciador Robusto.	79
6.2	Control del Cuadrirotor	89
6.3	Conclusiones	93
7	Conclusiones	95
A	Definiciones Matemáticas	97

B	Plataforma experimental	99
B.1	Motores	100
B.2	Sensor de inercia	101
B.3	Brújula	102
B.4	Sistema de Posicionamiento Global (GPS)	102
B.5	Sensores de distancia	103
B.5.1	Sensor infrarrojo	103
B.5.2	Sensor ultrasonido	104
B.6	Transmisión de datos	105
C	Publicaciones	106
C.1	Congresos	106
C.2	Revistas	107
	Bibliografía	103

Índice de Figuras

1.1	Diversas configuraciones de helicópteros de acuerdo al número de hélices.	2
2.1	Sistema aerodinámico de dos rotores.	8
2.2	Plato cíclico de helicópteros convencionales.	9
2.3	Diagrama a bloques del modelo dinámico del sistema aerodinámico de dos rotores.	10
2.4	Relación voltaje de entrada/velocidad de los rotores de la plataforma experimental.	13
2.5	Ejemplo de cuadrirotor a escala.	15
2.6	Sentido de rotación de los rotores del cuadrirotor.	17
2.7	Ángulos del cuadrirotor: Cabeceo (izquierda), alabeo (centro) y guiñada (derecha).	17
2.8	Sistema de coordenadas inerciales del cuadrirotor.	18
3.1	Plataforma electromecánica experimental.	38
3.2	Diagrama del Modular Servo System [®]	39
3.3	Respuesta angular de la plataforma electromecánica experimental.	40
3.4	Señales de control de la plataforma electromecánica experimental: STA (superior), PID (centro), ASTA (inferior).	41
3.5	Respuesta angular de la plataforma electromecánica experimental con juego mecánico añadido.	42
3.6	Señales de control del sistema electromecánico experimental con juego mecánico añadido: STA (superior), PID (centro), ASTA (inferior).	43
3.7	Ganancias adaptivas del controlador ASTA de la plataforma electromecánica experimental: caso nominal (superior), experimento con juego mecánico añadido (inferior).	44
4.1	Comparación entre ganancia lineal y no-lineal del observador de estado extendido.	48

4.2	Comparación del desempeño del NESO y el diferenciador robusto: señal original $f(t)$ (superior), $\dot{f}(t)$ con $\alpha = 0.01$ (centro), $\dot{f}(t)$ con $\alpha = 0.3$ (inferior).	51
6.1	Plataforma experimental de dos rotores.	62
6.2	Masa añadida a la plataforma TRAS para el caso perturbado.	64
6.3	Respuesta angular del controlador ASTA basado en NESO aplicado a la plataforma TRAS (Caso Nominal).	65
6.4	Señal del control ASTA basado en NESO para el rotor principal de la plataforma TRAS (Caso Nominal).	66
6.5	Señal del control ASTA basado en NESO para el rotor secundario de la plataforma TRAS (Caso Nominal).	67
6.6	Velocidad del rotor principal de la plataforma TRAS, mediante la aplicación del controlador ASTA basado en NESO (Caso Nominal).	68
6.7	Velocidad del rotor secundario de la plataforma TRAS, mediante la aplicación del controlador ASTA basado en NESO (Caso Nominal).	69
6.8	Error de seguimiento de la plataforma TRAS para el controlador ASTA basado en NESO (Caso Nominal).	70
6.9	Ganancias del controlador ASTA basado en NESO aplicado a la plataforma TRAS (Caso Nominal).	71
6.10	Respuesta angular del controlador ASTA basado en NESO aplicado a la plataforma TRAS (Caso Perturbado).	72
6.11	Señal del control ASTA basado en NESO aplicado al rotor principal de la plataforma TRAS (Caso Perturbado).	73
6.12	Señal del control ASTA basado en NESO aplicado al rotor secundario de la plataforma TRAS (Caso Perturbado).	74
6.13	Velocidad del rotor principal de la plataforma TRAS, mediante la aplicación del controlador ASTA basado en NESO (Caso Perturbado).	75
6.14	Velocidad rotor secundario de la plataforma TRAS, mediante la aplicación del controlador ASTA basado en NESO (Caso Perturbado).	76
6.15	Error de seguimiento de la plataforma TRAS para la aplicación del controlador ASTA basado en NESO (Caso Perturbado).	77

6.16	Ganancias del controlador ASTA basado en NESO aplicado a la plataforma TRAS (Caso Perturbado).	78
6.17	Respuesta angular del controlador ASTA basado en diferenciador robusto aplicado a la plataforma TRAS (Caso Nominal).	80
6.18	Señales del controlador ASTA basado en diferenciador robusto, aplicadas a la plataforma TRAS (Caso Nominal).	81
6.19	Velocidad de los rotores de la plataforma TRAS, mediante la aplicación del controlador ASTA basado en diferenciador robusto (Caso Nominal).	82
6.20	Ganancias del controlador ASTA basado en diferenciador robusto, aplicado a la plataforma TRAS (Caso Nominal).	83
6.21	Error de seguimiento de la plataforma TRAS, mediante la aplicación del controlador ASTA basado en diferenciador robusto (Caso Nominal).	84
6.22	Respuesta angular del control ASTA basado en diferenciador robusto aplicado a la plataforma TRAS (Caso Perturbado).	85
6.23	Señales del control ASTA basado en diferenciador robusto aplicado a la plataforma TRAS (Caso Perturbado).	86
6.24	Velocidad de los rotores de la plataforma TRAS, mediante la aplicación del controlador ASTA basado en diferenciador robusto (Caso Perturbado).	87
6.25	Ganancias del controlador ASTA basado en diferenciador robusto, aplicado a la plataforma TRAS (Caso Perturbado).	88
6.26	Error de seguimiento de la plataforma TRAS, mediante la aplicación del controlador ASTA basado en diferenciador robusto (Caso Perturbado).	89
6.27	Respuesta en posición del cuadrirotor (caso nominal).	91
6.28	Respuesta angular del cuadrirotor (caso nominal).	91
6.29	Respuesta en posición del cuadrirotor bajo perturbación de viento.	92
6.30	Respuesta angular del cuadrirotor bajo perturbación de viento.	93
B.1	Cuadrirotor experimental fabricado.	100
B.2	Motores sin escobillas del cuadrirotor experimental.	101
B.3	Unidad de medición de inercia del cuadrirotor experimental.	101
B.4	Brujula electrónica del cuadrirotor experimental.	102
B.5	Módulos de recepción GPS del cuadrirotor experimental.	103

B.6	Sensor infrarrojo de distancia del cuadrirotor experimental.	104
B.7	Sensor ultrasónico de distancia del cuadrirotor experimental.	104
B.8	Módulos de comunicación XBEE del cuadrirotor experimental.	105

Capítulo 1

Introducción

1.1 Introducción

El helicóptero convencional es un sistema complejo que resulta de la suma de una cantidad enorme de tecnologías trabajando en conjunto. Se trata de una aeronave cuyo despegue, propulsión y navegación se encuentran en función de un rotor vertical y uno horizontal. En este par de rotores radica la mayor parte de las interconexiones entre las dinámicas del helicóptero.

Al igual que el resto de las aeronaves de dos rotores, el helicóptero convencional posee una gran interdependencia entre sus grados de libertad. Cabe destacar el efecto giroscópico sobre las dinámicas del movimiento horizontal, ya que dificulta al piloto realizar maniobras precisas debido a que se necesita compensar el acomplamiento existente, lo cual representaría una carga de trabajo adicional al piloto en caso de que se llevase a cabo de forma manual. Existen diversas configuraciones de helicópteros de acuerdo al número de hélices (Fig. 1.1), cuyo diseño considera la disminución en la medida de lo posible de los efectos giroscópicos y dinámicas acopladas.



Figura 1.1: Diversas configuraciones de helicópteros de acuerdo al número de hélices.

Por otro lado, debido a su menor costo y riesgo humano, las aeronaves a escala presentan ventajas sobre sus equivalentes a tamaño real en operaciones tales como:

- Seguridad (Vigilancia aérea, tráfico urbano).
- Protección ambiental (Monitoreo de la contaminación, zonas boscosas).
- Intervención en ambientes hostiles (Sitios radiactivos, zonas minadas).
- Mantenimiento de infraestructura (Líneas de alta tensión, tuberías).
- Producción filmica (Fotografía aérea).
- Monitoreo de riesgo ambiental (Actividad volcánica).

Además de los helicópteros a escala, también existe la posibilidad de miniauturizar aviones, dirigibles, autogiros e incluso aves que imitan en su vuelo a los seres vivos. Comparado con los demás modelos de aeronaves, el helicóptero resalta por reunir características de maniobrabilidad, mayor número de grados de libertad, capacidad de vuelo estacionario, vuelo a baja

velocidad, despegue vertical, mayor posibilidad de miniaturización y además la capacidad de desenvolverse en espacios reducidos (Tabla 1.1). Por lo cual resulta interesante el estudio del control de los helicópteros a escala.

<i>Factor</i>	<i>Avión</i>	<i>Helicóptero</i>	<i>Ave</i>	<i>Autogiro</i>	<i>Dirigible</i>
Consumo de potencia	2	1	1	2	3
Costo de control	2	1	1	2	3
Carga útil	3	2	2	2	1
Maniobrabilidad	2	3	3	2	1
Grados de libertad	1	3	3	2	1
Vuelo estacionario	1	3	2	1	3
Vuelo a baja velocidad	1	3	2	2	3
Vulnerabilidad	2	2	3	2	2
Despegue/Aterrizaje vertical	1	3	2	1	3
Resistencia	2	1	2	1	3
Miniaturización	2	3	3	2	1
Apto en espacios reducidos	1	3	2	1	2
Total	20	28	26	20	26

Tabla 1.1: Comparativo de las características de las aeronaves (1=Malo, 2=Regular, 3=Bueno).

En la siguiente sección se presenta la motivación para desarrollar el presente trabajo de tesis y las contribuciones de la misma.

1.2 Motivación y contribución de esta Tesis

1.2.1 Motivación

Un helicóptero en vuelo se enfrenta a diversas condiciones que dificultan su navegación, entre las cuales podemos encontrar tanto dinámicas propias inherentes en su diseño, así como condiciones externas no previsibles.

Dadas sus características, el control de helicópteros resulta ser un problema significativo debido a su comportamiento dinámico altamente no lineal y a que sus mediciones involucran un entorno ruidoso; además de complicadas dinámicas entre las que se incluyen: flujo de aire, dinámicas de estados acoplados y las dinámicas propias de la interacción de las hélices con el viento. En el presente trabajo se pretende superar los siguientes factores:

- Incluso a velocidades moderadas, el impacto de los efectos aerodinámicos resultantes de la variación en la velocidad del aire comienza a ser significativa.
- El empuje total se ve afectado por la velocidad del vehículo y el ángulo de ataque con respecto a una corriente de aire.
- Cuando se traslapan las corrientes de aire provenientes de rotores girando en direcciones contrarias, se genera un par capaz de alejar el vehículo de su horizontal.
- Finalmente se tiene la interferencia causada por los diferentes componentes del cuerpo del vehículo cerca de la estela del rotor, la cual causa comportamiento inestable y pobre desempeño.

1.2.2 Contribución

Se proveen esquemas de control que permiten superar dificultades en modelado, incertidumbre paramétrica y perturbaciones externas en helicópteros a escala. Mediante el uso de observadores de estado, se estiman las dinámicas desconocidas para su posterior compensación, mientras que el control de seguimiento se realiza mediante estrategias de control robusto basado en modos deslizantes. Su validación se lleva a cabo mediante simulaciones numéricas y pruebas experimentales.

1.3 Objetivo de la Tesis

El objetivo de la presente tesis es desarrollar esquemas de control para helicópteros a escala, que permitan superar las dificultades de modelado, incertidumbres parámétricas, y además rechazar perturbaciones externas.

1.4 Organización de la Tesis

El presente trabajo está organizado de la manera siguiente:

- En el Capítulo 2 se presenta el modelo matemático de un Helicóptero de 2 Grados de Libertad. Se ilustran diversos aspectos que se consideran para el diseño de las estrategias de observación y control. Además, se presenta el modelado matemático de un Cuadrirotor, características físicas y consideraciones para el diseño de las estrategias de control.
- El Capítulo 3 ilustra la metodología del Algoritmo de control Super Twisting. Posteriormente se aborda el enfoque Super Twisting Adaptivo y se exponen sus ventajas. A través de un ejemplo práctico se demuestra su factibilidad y desempeño.
- En el Capítulo 4 se abordan estrategias para el diseño de Observadores No Lineales. Se presentan Observadores de Estado Extendido y Observadores por Modos Deslizantes de Alto Orden.
- El Capítulo 5 se ilustran los esquemas de control propuesto, incluyendo el análisis en lazo cerrado del conjunto controlador-observador.
- En el Capítulo 6, mediante validación experimental y simulaciones numéricas, queda demostrada la factibilidad del esquema de control propuesto.

- Finalmente, en el Capítulo 7 se muestran diversas conclusiones del presente trabajo.

1.5 Planteamiento del problema

El modelado de los vehículos aéreos no tripulados implica un esfuerzo analítico considerable. La existencia de dinámicas externas no previsibles como ráfagas de viento, dinámicas propias de las hélices y parámetros que varían con el tiempo, generan una mayor complejidad en el modelo dinámico de la aeronave. Además, el desarrollo de una etapa previa de identificación del sistema no asegura la validez del modelo para los distintos regímenes de vuelo. Por lo tanto resulta necesario contar con estrategias alternativas de control que permitan relajar las restricciones en el modelado y que a su vez presenten ventajas con respecto a los métodos de control clásico.

Debido a su capacidad para estimar dinámicas no conocidas, los Observadores de Estado Extendido [18, 46, 20] representan un alternativa práctica para superar las dificultades en el modelado. Mediante este enfoque, incertidumbres paramétricas y dinámicas no modeladas del sistema son consideradas como una variable de estado adicional, incluyendo además a las perturbaciones externas dentro de la misma variable. Cabe destacar que las estimaciones se llevan a cabo en tiempo real usando únicamente las entradas y salidas del sistema. Posteriormente, la perturbación puede compensarse mediante su estimado, controlando así cada subsistema de manera independiente.

Entre los distintos tipos de aeronaves a escala, el helicóptero de 2-GDL (Grados de Libertad) presenta un reto significativo para su control. A diferencia de los helicópteros convencionales que poseen un mecanismo de plato cíclico, el ángulo de ataque fijo de sus hélices reduce de manera importante la complejidad desde el punto de vista mecánico, sin embargo genera un acomplamiento considerable entre sus grados de libertad. Al poseer ángulo de ataque fijo en sus

hélices, el control del helicóptero de 2-GDL se lleva a cabo mediante la variación de la velocidad de sus rotores, lo cual produce dinámicas acopladas y efectos giroscópicos más notorios que en el resto de las aeronaves. En el caso de los helicópteros convencionales, dichos acomplamientos se compensan mediante el rotor de cola, mientras que el plato cíclico simplifica en gran medida el control de la aeronave. En el caso de los cuadrirotos, helicópteros coaxiales y tándem, los rotores que giran en sentidos encontrados compensan los efectos giroscópicos. Por lo tanto, debido a su estructura intrínseca y además a la aparición de perturbaciones externas, el control del helicóptero de 2-GDL representa una tarea interesante sobre la cual se pueden evaluar esquemas de control para evaluar su desempeño.

El control de helicópteros de 2-GDL ha sido estudiado mediante diferentes enfoques que van desde control lineal robusto hasta control no lineal [36]. En [32], técnicas de linealización por retroalimentación han sido empleadas para controlar el ángulo de elevación, mientras el ángulo horizontal se mantiene constante para disminuir deliberadamente las dinámicas interconectadas. Un control no lineal de seguimiento desarrollado por [13] se basa en control predictivo generalizado, posee un amplio rango de operación, sin embargo no presenta garantía de estabilidad. Por otro lado, técnicas de control por modos deslizantes de segundo orden se implementaron en [1] con el fin de controlar los ángulos de cabeceo y guiñada, sin embargo, las referencias de seguimiento se mantuvieron constantes, reduciendo considerablemente el efecto de las dinámicas interconectadas. El enfoque basado en Super Twisting Adaptivo representa una alternativa interesante ante sistemas con incertidumbre, ya que no es necesario conocer sus cotas [41]. La información necesaria para implementar el controlador, al igual que las perturbaciones externas, se pueden estimar a través de observadores de estado, simplificando además la tarea de modelado.

Capítulo 2

Modelos dinámicos

2.1 Helicóptero de 2-GDL

La plataforma de dos rotores (Fig. 2.1) permite recrear el comportamiento de un helicóptero de 2-GDL. Consiste en un eje balanceado sobre una base fija de tal forma que puede rotar libremente en los planos vertical y horizontal. En los extremos del eje están colocados rotores (Rotor principal y rotor de cola) accionados mediante motores de corriente directa (CD). Además, unido al eje en el punto de pivote existe una varilla que sirve de contrapeso.

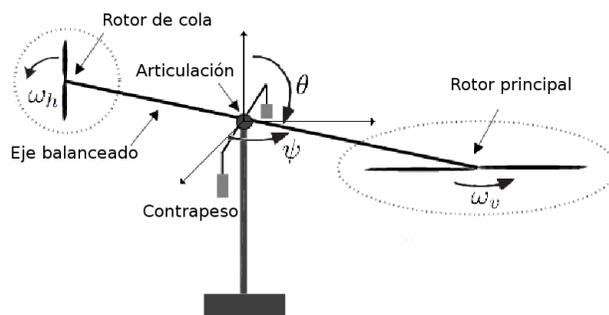


Figura 2.1: Sistema aerodinámico de dos rotores.

Contrario a los helicópteros de tamaño convencional que emplean un plato cíclico (Fig. 2.2),

desde un punto de vista mecánico, en los modelos a escala menor es más fácil contar con una hélice con ángulo de ataque fijo y ajustar la fuerza aerodinámica mediante la manipulación de la velocidad.

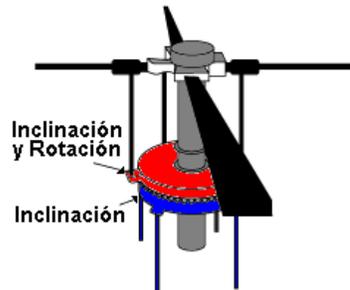


Figura 2.2: Plato cíclico de helicópteros convencionales.

La plataforma experimental de doble rotor (Fig. 2.1) cuenta con rotores cuyas hélices tienen un ángulo de ataque fijo, de tal forma que el control del helicóptero se lleva a cabo mediante la variación en la velocidad de los rotores. Debido a la restricción en el ángulo de ataque, los voltajes que regulan la velocidad de los rotores son las únicas entradas de control, teniendo como resultado importantes dinámicas no lineales de acoplamiento. Adicionalmente, la plataforma de dos rotores (Fig. 2.1) tiende a ser un sistema de fase no mínima exhibiendo dinámica cero inestable [22, 9].

Además de ilustrar las dinámicas esenciales de un helicóptero convencional, el ángulo de ataque fijo de la plataforma añade un torque extra causado por la reacción de la fuerza necesaria para cambiar la velocidad de la hélice [35], inclusive incrementa notablemente los efectos giroscópicos. Cabe destacar que la perturbación causada por los efectos giroscópicos genera una dependencia del sistema con respecto a la frecuencia de rotación, por lo cual es común que en la medida de lo posible se evite su influencia; por ejemplo, en el diseño de los cuadrirotores se reduce en gran medida su influencia con el fin de simplificar el control [47], ya que el sentido de rotación de los rotores disminuye significativamente los efectos giroscópicos.

2.1.1 Descripción del sistema aerodinámico de dos rotores

El estado del sistema se describe mediante 4 variables de estado: ángulos de guiñada y cabeceo (ψ , θ , respectivamente) medidos a través de sensores de posición acoplados en el pivote, y sus correspondientes velocidades angulares ($\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$). Dos variables de estado adicional están dadas por la velocidad angular de los rotores (ω_h y ω_v , para el rotor de cola y el rotor principal, respectivamente), medidos mediante tacómetros acoplados a los motores de CD.

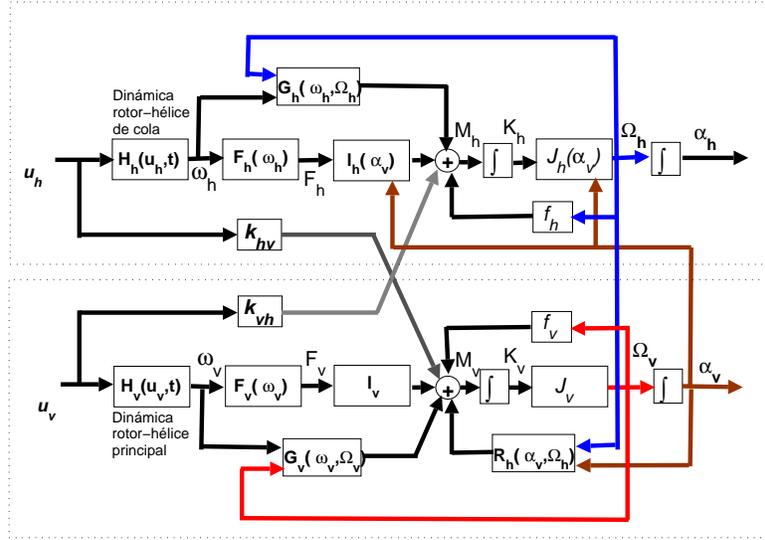


Figura 2.3: Diagrama a bloques del modelo dinámico del sistema aerodinámico de dos rotores.

Un modelo dinámico para un helicóptero de 2-GDL puede representarse mediante las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \Sigma_1 : \begin{cases} \ddot{\theta} &= \frac{1}{J_v} (l_m k_{Fv} \omega_v + k_{hv} u_h - R_v \theta - k_{fv} \dot{\theta}), \\ \dot{\omega}_v &= \frac{1}{I_v} (u_v - \frac{\omega_v}{k_{Hv}}), \end{cases} \\ \Sigma_2 : \begin{cases} \ddot{\psi} &= \frac{1}{J_h} \{ c_{\theta} l_t [k_{Fh} \omega_h + k_{vh} u_v] - k_{fh} \dot{\psi} - \theta s_{\theta} [k_{vh} u_v + l_t k_{Fh}] \}, \\ \dot{\omega}_h &= \frac{1}{I_h} (u_h - \frac{\omega_h}{k_{Hh}}), \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

donde el subíndice v hace referencia al rotor principal, mientras que el subíndice h concierne al

rotor de cola. $\mathbf{s}_{(\cdot)} = \sin(\cdot)$, $\mathbf{c}_{(\cdot)} = \cos(\cdot)$. u_h, u_v , denotan los voltajes de alimentación de los rotores. I_v, I_h , representan los momentos de inercia de los rotores. $k_{Hh}, k_{Hv}, k_{Fh}, k_{Fv}$ representan los coeficientes de velocidad y empuje de los rotores, se determinan mediante linealización a partir de las características estáticas de los rotores. k_{fh}, k_{fv} denotan los coeficientes de fricción en los ejes vertical y horizontal. k_{hv}, k_{vh} se refieren a los coeficientes de los momentos cruzados de los rotores. l_m, l_t corresponden a la longitud desde punto de pivote al rotor principal y al rotor de cola respectivamente. La ganancia R_v relaciona el coeficiente del par de reacción correspondiente a las fuerzas gravitatorias, se describe mediante la ecuación $R_v = k_1 \sin(\theta) - k_2 \cos(\theta)$, para constantes k_1, k_2 . El momento inercial alrededor del eje vertical, J_h , se denota mediante la siguiente ecuación $J_h = k_3 \cos^2(\theta) + k_4$, donde las constantes k_3, k_4 están determinadas por la masa y medidas geométricas de la plataforma física. Tomando en cuenta las dinámicas del sistema completo, el sistema es particionado en dos subsistemas como se describe a continuación: El primer subsistema, representado por $\Sigma_1(\theta, \dot{\theta}, \omega_v)$, consiste en la hélice principal que controla la rotación alrededor del eje horizontal. El segundo subsistema, $\Sigma_2(\psi, \dot{\psi}, \omega_h)$, consiste de la hélice menor que controla la rotación sobre el eje vertical. Para más detalles acerca de los parámetros se puede consultar [3].

El modelo en espacio de estado del sistema (2.1.1), se puede escribir de la forma siguiente

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{J_v} (l_m k_{Fv} x_3 + k_{hv} u_h - R_v x_1 - k_{fv} x_2), \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{I_v} (u_v - \frac{x_3}{k_{Hv}}), \end{cases} \quad (2.1.2)$$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{x}_4 = x_5, \\ \dot{x}_5 = \frac{1}{J_h} \{ \mathbf{c}_{x_1} l_t [k_{Fh} x_6 + k_{vh} u_v] - k_{fh} x_5 - x_1 \mathbf{s}_{x_1} [k_{vh} u_v + l_t k_{Fh}] \}, \\ \dot{x}_6 = \frac{1}{I_h} (u_h - \frac{x_6}{k_{Hh}}), \end{cases}$$

donde (x_1, x_4) , representan los ángulos cabeceo y guiñada, respectivamente. (x_2, x_5) , denotan las velocidades angulares. El índice v se refiere al rotor principal, mientras el subíndice h

concierno al rotor de cola. x_3 y x_6 , representan la velocidad angular de los rotores. u_h y u_v , denotan los voltajes de entrada.

2.1.2 Simplificación del modelo dinámico

Hipótesis A1. Los momentos de inercia de los rotores (μ_1, μ_2) , son despreciables con respecto a los momentos de inercia del helicóptero (J_v, J_h) [31]. *i.e.* $(\mu_1, \mu_2) \ll (J_v, J_h)$.

De acuerdo a **(A1)**, las dinámicas de los subsistemas (Σ_1, Σ_2) pueden representarse en dos escalas de tiempo [24], como se describe a continuación

- *Dinámica rápida:* Representa la dinámica del actuador, *i.e.* motores-hélices.
- *Dinámica lenta:* Corresponde a las dinámicas cabeceo y guiñada del helicóptero.

Con base en lo anterior, el modelo matemático del helicóptero de dos rotores puede ser representado mediante el siguiente sistema interconectado en forma singularmente perturbada

$$\dot{\chi}_{i1} = \chi_{i2}, \quad (2.1.3a)$$

$$\dot{\chi}_{i2} = \mathbf{f}_i(\chi_1, \chi_2) + \mathbf{h}_i(\chi_1)\zeta_i + \mathbf{g}_i(\chi_1)u_i, \quad (2.1.3b)$$

$$\mu_i \dot{\zeta}_i = \bar{\mathbf{h}}_i \zeta_i + u_i, \quad i = 1, 2, \quad (2.1.3c)$$

donde $\chi_i = (\chi_{i1}, \chi_{i2})^T$ representa el vector de estado del subsistema lento (2.1.3a-2.1.3b) tal que $\chi_1 = (\theta, \dot{\theta})^T$, $\chi_2 = (\psi, \dot{\psi})^T$, mientras que las dinámicas de la velocidad de los rotores $\zeta_1 = \omega_v$ y $\zeta_2 = \omega_h$ corresponden al subsistema rápido (2.1.3c). Las entradas del sistema denotadas por u_1 y u_2 , corresponden a los voltajes suministrados a los rotores principal y de cola respectivamente.

$$\mathbf{f}_1(\cdot) = -\frac{1}{J_v}[R_v \chi_{11} + k_{fv} \chi_{12}], \quad \mathbf{f}_2(\cdot) = -\frac{1}{J_h}[k_{fh} \chi_{22} + l_t k_{Fh} \sin(\chi_{11}) \chi_{11}], \quad \mathbf{h}_1(\cdot) = (l_m k_{Fv})/J_v, \quad \mathbf{h}_2(\cdot) =$$

$$\frac{1}{J_h} [l_t k_{Fh} \cos(\chi_{11})], \mathbf{g}_1(\cdot) = k_{hv} / J_v, \mathbf{g}_2(\cdot) = \frac{k_{vh}}{J_h} [\cos(\chi_{11}) - \sin(\chi_{11})\chi_{11}], \bar{\mathbf{h}}_1 = -1/k_{Hv}, \bar{\mathbf{h}}_2 = -1/k_{Hh}.$$

Considerando la magnitud del momento de inercia de los rotores, cuyos valores (Fig. 2.4) satisfacen experimentalmente $\mu_i \ll 1$, $i = 1, 2$; se pueden aplicar diferentes métodos para reducir el orden del modelo; por ejemplo, los basados en perturbaciones singulares.

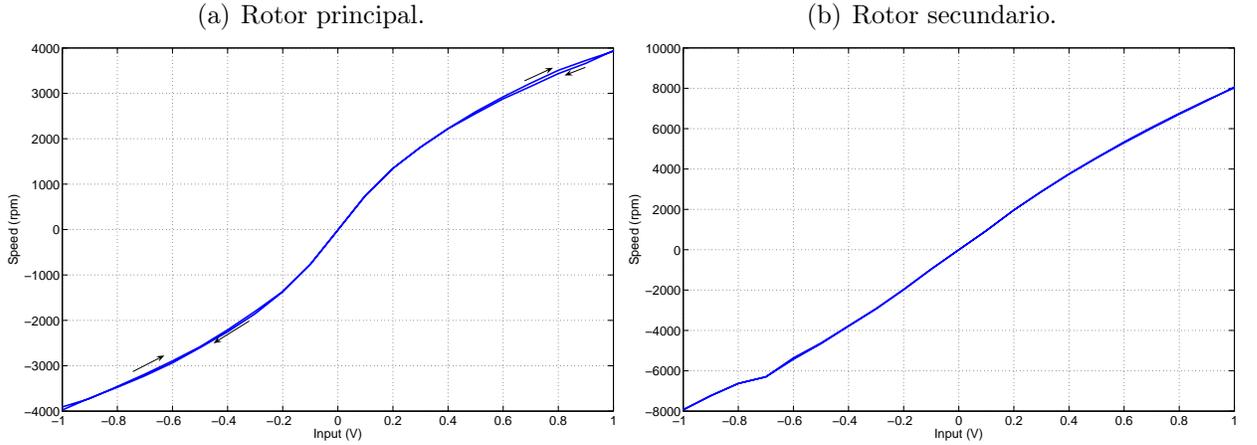


Figura 2.4: Relación voltaje de entrada/velocidad de los rotores de la plataforma experimental.

Hipótesis A2. El empuje generado se puede considerar como suave, teniendo como dinámicas dominantes los efectos aerodinámicos en vez de las fuerzas inerciales.

El método cuasi-estado-estacionario [40] representa un enfoque sencillo para reducir el orden del sistema. Mediante esta técnica, las velocidades de los rotores pueden considerarse como aproximadamente constantes, dando como resultado que solamente se consideren las dinámicas lentas (θ, ψ) del sistema completo (2.1.3). De esta forma, seleccionando $\mu_i = 0$ en el subsistema dinámico rápido, se tiene que $0 = \bar{\mathbf{h}}_i \zeta_i + u_i$, para $i = 1, 2$. Resolviendo la ecuación anterior para

ζ_i , y sustituyendo en (2.1.3b), se obtiene el *Sistema Lento*

$$\begin{cases} \dot{\chi}_{i1} &= \chi_{i2}, \\ \dot{\chi}_{i2} &= \mathbf{f}_i(\chi_1, \chi_2) + G_i(\chi_1)u_i + w_i(\chi_1, u_1, u_2), \quad i = 1, 2, \end{cases} \quad (2.1.4)$$

donde $G_1(\chi_1) = \frac{l_m k_{Fv} k_{Hv}}{J_v}$, $G_2(\chi_1) = l_t k_{Fh} k_{Hh}$, $w_1(\chi_1, u_1, u_2) = \frac{k_{hv}}{J_v} u_2$
 $w_2(\chi_1, u_1, u_2) = \frac{k_{vh}}{J_h} \{ \cos(\chi_{i1}) - \sin(\chi_{i1})\chi_{i1} \} u_1 + l_t k_{Fh} k_{Hh} (\cos(\chi_{i1})/J_h) u_2$.

Debido a variaciones en los parámetros e incertidumbres, resulta evidente que el modelo (2.1.4) es una aproximación del comportamiento del sistema completo. Aunque pueden encontrarse modelos más exactos en la literatura [39], su derivación requiere un esfuerzo considerable.

A partir de la hipótesis **A1**, los subsistemas (2.1.4), en la representación de espacio de estados pueden escribirse como

$$\Sigma_i : \begin{cases} \dot{\chi}_i &= \mathcal{F}_i(\chi_i) + \mathcal{G}_i u_i, \quad i = 1, 2. \end{cases} \quad (2.1.5)$$

donde $\mathcal{F}_i(\chi_i) = (\chi_{i2}, F_i(\chi_i))^T$ y $\mathcal{G}_i = (0, G_i)^T$, para $i = 1, 2$. Además, u_i representa el voltaje de entrada al rotor; $F_i(\chi_i) = \mathbf{f}_i(\chi_i) + w_i(\chi_i)$, engloba dinámicas no conocidas, incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas para cada subsistema, mientras que G_i se considera un vector constante.

Hipótesis A3. Los ángulos θ, ψ y las velocidades de los rotores ω_v, ω_h son las salidas medibles. Las velocidades angulares $\dot{\theta}, \dot{\psi}$, se consideran como no medibles, en tanto que los términos F_i , para $i = 1, 2$; son desconocidos.

Ahora bien, con el fin de implementar el control propuesto, los términos $F_i, i = 1, 2$; serán estimados mediante observadores de estado extendido.

Una vez establecidas las condiciones de operación del sistema, podemos establecer los objetivos de control y observación.

Objetivo de Control. Diseñar un controlador capaz de realizar el seguimiento de una referencia angular deseada (θ_d, ψ_d) , a pesar de las incertidumbres en el modelado y las dinámicas de acomplamiento.

Objetivo de Observación. Considerando que las únicas mediciones disponibles son las posiciones angulares, el objetivo de observación es reconstruir la velocidad angular y los términos de incertidumbre incluyendo las perturbaciones externas.

2.2 Cuadrirotor

Como su nombre lo indica, el cuadrirotor (Fig.2.5) posee 4 rotores y carece del mecanismo de plato cíclico presente en los helicópteros convencionales. Además, la hélice de los rotores carece de mecanismos de inclinación, por lo cual el control de la aeronave se realiza mediante la variación de la velocidad de los rotores.



Figura 2.5: Ejemplo de cuadrirotor a escala.

Las principales características que distinguen al cuadrirotor de los otros tipos de helicópteros son las siguientes:

- ✓ Existe una simplificación en los acoplamientos mecánicos de los rotores; al no contar con el mecanismo de plato cíclico, el control de la aeronave recae en el control de la velocidad de cada uno de los rotores.
- ✓ El conjunto de los cuatro rotores es menor en diámetro con respecto al rotor principal de un helicóptero convencional, lo cual representa menor exposición en caso de accidente.
- ✓ Posee una mayor capacidad de carga.
- ✓ Con respecto a un helicóptero convencional, los rotores almacenan menor energía cinética durante el vuelo, disminuyendo el riesgo ante colisiones.
- ✓ Popular como plataforma de pruebas, ya que es más sencilla su reparación en caso de ser necesario.

Por otro lado, los cuadrirotos presentan los siguientes inconvenientes:

- ⊖ Mayor consumo de energía que un helicóptero convencional de talla similar.
- ⊖ El peso se incrementa.
- ⊖ Aunque se empleen motores similares, no se garantiza que tengan la misma respuesta.

2.2.1 Modelado del cuadrirotor

El conjunto de actuadores presentes sobre el cuadrirotor ejercen una fuerza en la dirección señalada en la Figura 2.6. Además, dado que los motores delantero y trasero giran en sentido

contrario a los motores laterales, los efectos giroscópicos y los pares aerodinámicos generados por los mismos rotores tienden a cancelarse en vuelo estático. El empuje total del cuadrirotor es el resultante de la suma de los empujes individuales de cada rotor.

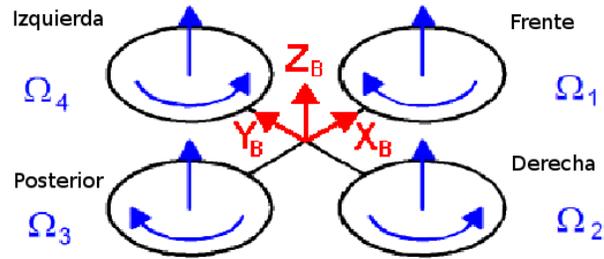


Figura 2.6: Sentido de rotación de los rotores del cuadrirotor.

El ángulo de cabeceo (θ) del cuadrirotor es controlado a través de la diferencia de velocidades entre el rotor delantero y el rotor trasero (Fig. 2.7). El movimiento de alabeo (ϕ) se obtiene de manera similar al cabeceo, en este caso, mediante el incremento/reducción de la velocidad de los rotores laterales. El movimiento de guiñada (ψ) es el resultante de la diferencia de velocidad entre el conjunto de rotores delantero/trasero y el conjunto de los rotores laterales. En el caso ideal, los desplazamientos angulares deben llevarse a cabo manteniendo el empuje total constante.

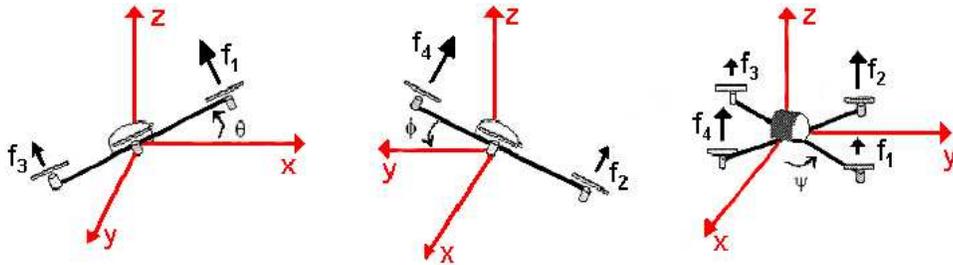


Figura 2.7: Ángulos del cuadrirotor: Cabeceo (izquierda), alabeo (centro) y guiñada (derecha).

Ahora bien, considérese un marco inercial O_E , definido por los ejes (x_E, y_E, z_E) ; y el eje de coordenadas O_B , que se encuentra fijo al centro de masa del cuadrirotor. El sistema de coordenadas O_E, O_B se puede apreciar en la figura 2.8. En posición vertical coinciden los ejes z_B y z_E . Los rotores 1 y 2 coinciden con la parte positiva y negativa del eje x_B respectivamente. Mientras que los rotores 3 y 4 coinciden con la parte positiva y negativa del eje y_B

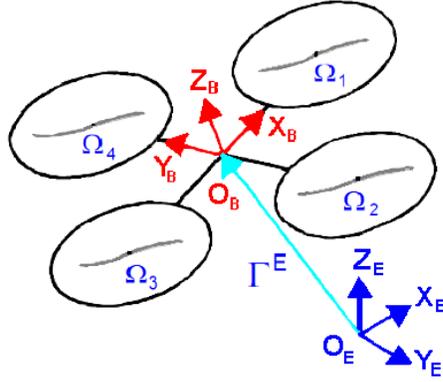


Figura 2.8: Sistema de coordenadas inerciales del cuadrirotor.

Considerando la parametrización de los ángulos de Euler, la matriz de rotación que permite pasar del sistema de coordenadas B al E , está definida como

$$R(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \sin \phi + \sin \psi \sin \phi \\ \sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \phi \cos \psi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}$$

Fuerzas y Momentos Aerodinámicos

Las fuerzas aerodinámicas y momentos se pueden derivar mediante la combinación del momento y la teoría de elementos de las hélices [26]. En las ecuaciones siguientes, σ denota la relación de la longitud de la cuerda de la hélice, a se refiere a la pendiente de elevación, μ la razón de avance, λ el flujo de aire, v la velocidad inducida, ρ la densidad del aire, R_{rad} el radio del rotor,

l la distancia del eje de la hélice al centro de gravedad, θ_0 la incidencia del ángulo de cabeceo, θ_{tw} el giro del ángulo de cabeceo, \bar{C}_d el coeficiente de arrastre proporcional al 70% del radio. La fuerza de empuje T de las hélices, es la resultante de las fuerzas verticales que actúan sobre todos los elementos de las hélices.

$$\begin{aligned} T &= C_T \rho A (\Omega R_{rad})^2 \\ \frac{C_T}{\sigma a} &= \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right)\theta_0 - (1 + \mu^2)\frac{\omega_{tw}}{8} - \frac{1}{4}\lambda \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

La fuerza central H es la resultante de las fuerzas horizontales que actúan sobre todos los elementos de la hélice.

$$\begin{aligned} H &= C_H \rho A (\Omega R_{rad})^2 \\ \frac{C_T}{\sigma a} &= \frac{1}{4a}\mu\bar{C}_d + \frac{1}{4}\lambda\mu\left(\theta_0 - \frac{\omega_{tw}}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

El momento de arraste Q es causado por las fuerzas aerodinámicas que actúan sobre los elementos de las hélices. Determina la potencia requerida para girar el rotor.

$$\begin{aligned} Q &= C_Q \rho A (\Omega R_{rad})^2 R_{rad} \\ \frac{C_Q}{\sigma a} &= \left(\frac{1}{8a}(1 + \mu^2)\bar{C}_d + \lambda\left(\frac{1}{6}\theta_0 - \frac{1}{8}\theta_{tw} - \frac{1}{4}\lambda\right)\right) \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

El momento de alabeo R_m es la integral del empuje de la hélice para cada sección a un radio determinado (difiere del momento de alabeo general)

$$\begin{aligned} R_m &= C_{R_m} \rho A (\Omega R_{rad})^2 R_{rad} \\ \frac{C_{R_m}}{\sigma a} &= -\mu\left(\frac{1}{6}\theta_0 + \frac{1}{8}\theta_{tw} - \frac{1}{8}\lambda\right) \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

El efecto de tierra está relacionado con la reducción del flujo de aire inducido. La caracterización de dicho efecto permite mejorar el despegue autónomo y el aterrizaje del cuadrirotor. El efecto de tierra (IGE) puede expresarse mediante la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} T_{IGE} &= C_T^{IGE} \rho A (\Omega R_{rad})^2 \\ \frac{C_T^{IGE}}{\sigma a} &= \frac{C_T^{IGE}}{\sigma a} + \frac{\delta v_i}{4\Omega R_{rad}} \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Momentos Generalizados y Fuerzas

Los movimientos del cuadrirotor son causados por diversas fuerzas y momentos provenientes de distintas fuentes. Para el presente modelo se considerarán los siguientes:

Cabeceo

Efecto giroscópico del cuerpo.	$\dot{\phi}\dot{\psi}(I_{zz} - I_{xx})$
Momento central debido al vuelo hacia adelante.	$h(\sum_{i=1}^4 H_{xi})$
Efecto giroscópico de la hélice.	$J_r\dot{\phi}\Omega_r$
Momento de alabeo debido al desplazamiento lateral.	$(-1)^{i+1} \sum_{i=1}^4 R_{myi}$
Efecto causado por los actuadores del cabeceo.	$l(T_1 - T_3)$

Alabeo

Efecto giroscópico del cuerpo.	$\dot{\theta}\dot{\psi}(I_{yy} - I_{zz})$
Momento de alabeo debido al vuelo hacia adelante.	$(-1)^{i+1} \sum_{i=1}^4 R_{mxi}$
Efecto giroscópico de la hélice.	$J_r\dot{\theta}\Omega_r$
Momento central debido al desplazamiento lateral.	$h(\sum_{i=1}^4 H_{yi})$
Efecto causado por los actuadores del cabeceo.	$l(T_2 - T_4)$

Guiñada

Efecto giroscópico del cuerpo.	$\dot{\theta}\dot{\phi}(I_{xx} - I_{yy})$
--------------------------------	---

Momento central desbalanceado en vuelo hacia adelante.	$l(H_{x2} - H_{x4})$
Contrapar inercial.	$J_r \dot{\Omega}_r$
Momento central desbalanceado en vuelo lateral.	$l(-H_{y1} + H_{y3})$
Contrapar desbalanceado.	$(-1)^i (\sum_{i=1}^4 Q_i)$

Dinámica de los rotores

Con el fin de tener un modelado más realista del cuadrirotor, se puede añadir la dinámica de los motores, dado que $\frac{\Omega_i}{U_i}$ no es en realidad una constante (Ω_i , U_i son la velocidad y el voltaje de alimentación del i -ésimo motor, respectivamente). De esta forma, podemos considerar que la dinámica del motor es de primer orden tal como se describe en la siguiente función de transferencia

$$\frac{\omega_i}{U_i} = \frac{K}{1 + s\tau}.$$

Dado que al diseñar la ley de control, no se tomará en cuenta el retardo que implica la dinámica de los motores, la robustez de la ley de control es un factor importante.

2.2.2 Modelo dinámico de simulación del cuadrirotor

Reagrupando términos, y de acuerdo a las dinámicas definidas en la secciones anteriores, se obtiene el siguiente modelo dinámico del sistema [11]:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{xx}\ddot{\phi} = \dot{\theta}\dot{\psi}(I_{yy} - I_{zz}) + J_r\dot{\theta}\Omega_r + l(-T_2 + T_4) - h(\sum_{i=1}^4 H_{yi}) + (-1)^{i+1} \sum_{i=1}^4 R_{mxi} \\ I_{yy}\ddot{\theta} = \dot{\phi}\dot{\psi}(I_{zz} - I_{xx}) + J_r\dot{\phi}\Omega_r + l(T_1 - T_3) + h(\sum_{i=1}^4 H_{xi}) + (-1)^{i+1} \sum_{i=1}^4 R_{myi} \\ I_{zz}\ddot{\psi} = \dot{\theta}\dot{\phi}(I_{xx} - I_{yy}) + J_r\Omega_r + (-1)^i \sum_{i=1}^4 Q_i + l(H_{x2} - H_{x4}) + l(-H_{y1} + H_{y3}) \\ m\ddot{z} = mg - (c_\psi c_\phi) \sum_{i=1}^4 T_i \\ m\ddot{x} = (s_\psi s_\phi + c_\psi s_\theta c_\phi) \sum_{i=1}^4 T_i - \sum_{i=1}^4 H_{xi} - \frac{1}{2}C_x A_c \rho \dot{x} |\dot{x}| \\ m\ddot{y} = (-c_\psi s_\phi + s_\psi s_\theta c_\phi) \sum_{i=1}^4 T_i - \sum_{i=1}^4 H_{yi} - \frac{1}{2}C_y A_c \rho \dot{y} |\dot{y}| \end{array} \right. \quad (2.2.6)$$

donde $s_{(\cdot)} = \sin(\cdot)$, $c_{(\cdot)} = \cos(\cdot)$.

El modelo 2.2.6 es válido para cualquier régimen de vuelo, pero es demasiado complicado para diseñar una ley de control. Sin embargo, sobre éste modelo se debe validar el desempeño del esquema de control.

2.2.3 Modelo dinámico de control del cuadrirotor

Para el diseño de la ley de control, se recomienda basarse en un modelo simplificado del sistema para reducir la complejidad del controlador. Con base en lo anterior, el modelo sobre el cual se va a diseñar la ley de control es el que se obtiene al considerar los coeficientes de empuje y arrastre como constantes, además, los términos concernientes al momento central y los momentos de alabeo se consideran despreciables. El sistema dinámico resultante de dichas simplificaciones,

puede escribirse en la forma de espacio de estado como

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \\ \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4x_6a_1 + x_4a_2\Omega_r + b_1U_2 \\ x_4 \\ x_2x_6a_3 + x_2a_4\Omega_r + b_2U_3 \\ x_6 \\ x_4x_2a_5 + b_3U_4 \\ x_8 \\ g - c_\phi c_\theta \frac{1}{m}U_1 \\ x_{10} \\ u_x \frac{1}{m}U_1 \\ x_{12} \\ u_y \frac{1}{m}U_1 \end{bmatrix}, \quad (2.2.7)$$

donde $X = [\phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}, z, \dot{z}, x, \dot{x}, y, \dot{y}]^T$, $U = [U_1, U_2, U_3, U_4]^T$, $u_x = (c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi)$, $u_y = (c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi)$, $a_1 = (I_{yy} - I_{zz})/I_{xx}$, $a_2 = J_r/I_{xx}$, $a_3 = (I_{zz} - I_{xx})/I_{yy}$, $a_4 = J_r/I_{yy}$, $a_5 = (I_{xx} - I_{yy})/I_{zz}$, $b_1 = l/I_{xx}$, $b_2 = l/I_{yy}$, $b_3 = 1/I_{zz}$,

$$\begin{cases} U_1 = b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \\ U_2 = b(-\Omega_2^2 + \Omega_4^2) \\ U_3 = b(\Omega_1^2 - \Omega_3^2) \\ U_4 = d(-\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \end{cases}$$

2.3 Conclusiones

En el presente capítulo se abordaron los modelos matemáticos sobre los cuales se desarrollará la presente investigación. Se identificaron los diferentes parámetros que intervienen en los modelos del helicóptero de 2-GDL y del cuadrirotor. Además, se establecieron las diversas fuerzas que actúan sobre los sistemas. Con base en la estructura del modelo dinámico, se procedió a su simplificación mediante estrategias basadas en consideraciones físicas. En el siguiente capítulo se abordará el diseño de estrategias de control basadas en modos deslizantes de segundo orden para los helicópteros a escala.

Capítulo 3

Algoritmo de control Super Twisting Adaptivo

3.1 Introducción

El control por modos deslizantes ha sido empleado en diversas aplicaciones que van desde el control de máquinas eléctricas [44, 38, 43], hasta el control de biorreactores [14, 25]. En el caso de plantas no lineales, permite lograr un seguimiento preciso y además resulta insensible ante perturbaciones y variación en los parámetros de la planta.

Un controlador basado en modos deslizantes es el Algoritmo de Control Super Twisting (STA) [28], el cual genera una señal de control continua y representa uno de los mejores controladores por modos deslizantes de segundo orden. Debido a sus propiedades de convergencia en tiempo finito en presencia de perturbaciones suaves, ha sido ampliamente utilizado [23, 15, 45]. Sin embargo, el controlador STA necesita conocer la cota de las incertidumbres y perturbaciones presentes en el sistema, las cuales no son siempre medibles o fáciles de estimar. Al sobreestimar la cota de la perturbación, la ganancia del controlador es mayor de la necesaria. Por otro lado, el Algoritmo de Control Super Twisting Adaptivo (ASTA) [41] representa una alternativa

para tratar las incertidumbres, ya que no se necesita conocer sus cotas. En la siguiente sección se presenta una breve introducción al Algoritmo de Control Super Twisting. Posteriormente se aborda el diseño de una ley de control basada en Algoritmo de Control Super Twisting Adaptivo.

3.2 Controlador Super Twisting

Considérese el sistema no lineal con incertidumbres

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)u, \quad (3.2.1)$$

donde $x \in \mathfrak{R}^n$ representa el vector de estado, $u \in \mathfrak{R}$ la entrada de control, $f(x, t) \in \mathfrak{R}^n$ es una función continua.

El algoritmo de control super twisting (ver [28]) está definido como

$$\begin{aligned} u &= -K_1|s|^{1/2}sign(s) + v + \Lambda_1, \\ \dot{v} &= -K_2sign(s) + \Lambda_2, \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

donde u representa la señal de control, K_1, K_2 son las ganancias del controlador, s representa la superficie deslizante y $\Lambda_i, i = 1, 2$; son términos de perturbación.

El controlador STA es robusto ante perturbaciones globalmente acotadas [29, 30] que satisfacen

$$\Lambda_1 = 0, \quad |\Lambda_2| \leq L,$$

para cualquier constante positiva L , cuando las ganancias K_1, K_2 son seleccionadas de manera apropiada. Sin embargo, el valor adecuado de las ganancias depende del valor de L , para garantizar estabilidad robusta en tiempo finito [34]. En caso de desconocer el valor exacto

de L , lo cual es común en aplicaciones reales, la selección de un valor arbitrariamente grande conlleva a una ganancia del controlador mayor de la necesaria.

3.3 Controlador Super Twisting Adaptivo

De acuerdo a la metodología de control Super Twisting Adaptivo, las ganancias del controlador se adaptan con el fin de atenuar el fenómeno de chattering y rechazar las perturbaciones del sistema, además, no se requiere conocer las cotas de las incertidumbres y perturbaciones presentes en el sistema. La principal ventaja de este algoritmo es que combina la reducción del fenómeno de chattering y la robustez de los modos deslizantes de alto orden. De esta forma, el controlador diseñado garantiza la convergencia en tiempo finito y la robustez del sistema bajo incertidumbre.

Bajo el enfoque del Algoritmo de Control Super Twisting Adaptivo, las ganancias K_1 y K_2 de la ecuación 3.2.2 son seleccionadas de tal forma que están en función de la dinámica de la superficie deslizante como se describe a continuación

$$K_1 = K_1(t, s, \dot{s}) \quad , \quad K_2 = K_2(t, s, \dot{s}). \quad (3.3.1)$$

Entonces, con el objetivo de diseñar un control super twisting adaptivo para el sistema (3.2.1), se definirán las siguiente hipótesis:

Hipótesis B1. La variable deslizante $s = s(x, t) \in \mathfrak{R}$ se diseña de tal forma que las dinámicas compensadas del sistema (3.2.1) se alcanzan en la superficie deslizante $s = s(x, t) = 0$.

Hipótesis B2. El grado relativo del sistema (3.2.1) es igual a 1 y las dinámicas internas

son estables.

Entonces, la dinámica de la variable deslizante s esta dada por

$$\dot{s} = a(x, t) + b(x, t)u. \quad (3.3.2)$$

donde $a(x, t) = \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x}f(x, t)$, $b(x, t) = \frac{\partial s}{\partial x}g(x)$.

Hipótesis B3. La función $b(x, t) \in \Re$ es desconocida y diferente a cero $\forall x$ y $t \in [0, \infty)$. Además, $b(x, t) = b_0(x, t) + \Delta b(x, t)$, donde $b_0(x, t)$ corresponde a la parte nominal de $b(x, t)$ el cual es conocido, y además δ_1 representa una constante positiva tal que $\Delta b(x, t)$ satisface

$$\left| \frac{\Delta b(x, t)}{b_0(x, t)} \right| \leq \gamma_1.$$

Hipótesis B4. Existen constantes positivas desconocidas δ_1, δ_2 tal que la función $a(x, t)$ y su derivada son acotadas

$$|a(x, t)| \leq \delta_1 |s|^{1/2}, |\dot{a}(x, t)| \leq \delta_2. \quad (3.3.3)$$

El objetivo del enfoque ASTA es diseñar un control continuo sin sobreestimar la ganancia, para llevar la variable deslizante s y su derivada \dot{s} a cero en tiempo finito, bajo perturbaciones aditivas y multiplicativas γ_1, δ_1 y δ_2 cuyas cotas son desconocidas.

Entonces, el sistema (3.3.2) en lazo cerrado con el control (3.2.2)-(3.3.1) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \dot{s} &= a(x, t) - K_1 b(x, t) |s|^{1/2} \text{sign}(s) + b(x, t)v, \\ \dot{v} &= -K_2 \text{sign}(s), \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Adicionalmente, considerando el siguiente cambio de coordenadas

$$\varsigma = (\varsigma_1, \varsigma_2)^T = (|s|^{1/2} \text{sign}(s), b(x, t)v + a(x, t))^T, \quad (3.3.5)$$

El sistema (3.3.2) puede escribir como

$$\dot{\varsigma} = \tilde{A}(\varsigma_1)\varsigma + \tilde{g}(\varsigma_1)\varrho(x, t), \quad (3.3.6)$$

donde

$$\tilde{A}(\varsigma_1) = \frac{1}{2|\varsigma_1|} \begin{pmatrix} -2b(x, t)K_1 & 1 \\ -2b(x, t)K_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{g}(\varsigma_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

dados $\bar{\varrho}(x, t) = \dot{b}(x, t)v + \dot{a}(x, t) = 2\varrho(x, t)\frac{\varsigma_1}{|\varsigma_1|}$.

Para probar la estabilidad en lazo cerrado del sistema se presenta la siguiente hipótesis

Hipótesis B5. $\dot{b}(x, t)v$ esta acotada pero no se conocen sus cotas δ_3 i.e. $|\dot{b}(x, t)v| < \delta_3$.

Entonces, el sistema puede reescribirse como

$$\dot{\varsigma} = \bar{A}(\varsigma_1)\varsigma \quad \bar{A}(\varsigma_1) = \frac{1}{2|\varsigma_1|} \begin{pmatrix} -2b(x, t)K_1 & 1 \\ -2b(x, t)K_2 + 2\varrho(x, t) & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3.7)$$

donde $|\varsigma_1| = |s|^{1/2}$, tomando en cuenta la función cuadrática

$$V_0 = \varsigma^T \tilde{P} \varsigma \quad (3.3.8)$$

donde \tilde{P} es una matriz constante, simétrica y definida positiva, entonces se tiene una función de Lyapunov estricta para (3.2.2). Tomando su derivada a lo largo de las trayectorias de (3.2.2) tenemos que

$$\dot{V}_0 = -|s|^{-1/2} \varsigma^T \tilde{Q} \varsigma, \quad (3.3.9)$$

es válida para casi cualquier región, donde \tilde{P} y \tilde{Q} están relacionadas por la Ecuación Algebraica de Lyapunov

$$\bar{A}^T \tilde{P} + \tilde{P} \bar{A} = -\tilde{Q}, \quad (3.3.10)$$

Ya que \bar{A} es Hurwitz para $b(x, t)K_1 > 0$, $2b(x, t)K_2 + 2\rho(x, t) > 0$, para todo $\tilde{Q} = \tilde{Q}^T > 0$ existe una única solución $\tilde{P} = \tilde{P}^T > 0$ de (3.3.10), tal que V_0 es una función de Lyapunov estricta.

Nota 1. La estabilidad en $\dot{\zeta} = 0$ de (3.3.7) esta completamente determinada por la estabilidad de la matriz \bar{A} . Sin embargo, las versiones clásicas del Teorema de Lyapunov [17] no pueden emplearse ya que requieren una función candidata continuamente diferenciable, o por lo menos una función de Lyapunov continua localmente Lipschitz, sin embargo V_0 (3.3.13) es continua pero no localmente Lipschitz. No obstante, como se explica en el Teorema 1 en [34], es posible demostrar la convergencia mediante el Teorema de Zubov [37], que requiere solo funciones de Lyapunov continuas. Este argumento es válido para todas las pruebas del presente trabajo, por lo que no se mencionará posteriormente.

De las Hipótesis B4 - B5, se tiene que

$$0 < \rho(x, t) < \delta_2 + \delta_3 = \delta_4.$$

Dado que ς_1 y ς_2 convergen a 0 en tiempo finito, entonces s y \dot{s} convergen a 0 también en tiempo finito.

El diseño del controlador basado en el enfoque ASTA, es formulado en el siguiente teorema.

Teorema 3.3.1. ([41]) *Considérese el sistema (3.2.1) en lazo cerrado con el control (3.2.2) expresado en términos de las dinámicas de la variable deslizante (3.3.2). Además, considérense satisfechas las hipótesis B1-B5 para las ganancias desconocidas $\gamma_1, \delta_1, \delta_2 > 0$. Entonces, para*

valores iniciales dados $x(0)$ y $s(0)$, existe un tiempo finito $t_F > 0$ y un parámetro μ , tan pronto como se cumpla la condición

$$K_1 > \frac{(\lambda + 4\epsilon_*)^2 + 4\delta_4^2 + 4\delta_4(\lambda - 4\epsilon_*^2)}{16\epsilon_*\lambda},$$

si $|s(0)| > \mu$, tal que un modo deslizante de segundo orden, i.e. $|s| \leq \eta_1$ y $|\dot{s}| \leq \eta_2$ es establecido $\forall t \geq t_F$, bajo la acción de control (3.2.2) con las ganancias adaptables

$$\begin{aligned} \dot{K}_1 &= \begin{cases} \omega_1 \sqrt{\frac{\gamma_1}{2}} \text{sign}(|s| - \mu), & \text{if } K_1 > K_*, \\ K_*, & \text{if } K_1 \leq K_*, \end{cases} \\ K_2 &= 2\epsilon_* K_1, \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

donde ϵ_* , λ , γ_1 , ω_1 , μ son constantes arbitrarias positivas, y $\eta_1 \geq \mu$, $\eta_2 > 0$. \diamond

Prueba. Para analizar la estabilidad en lazo cerrado del sistema (3.3.7), considérese la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\varsigma, K_1, K_2) = V_0 + \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{1}{2\gamma_i} (K_i - K_i^*)^2 \right\} \quad (3.3.12)$$

donde

$$V_0 = \varsigma^T \tilde{P} \varsigma, \quad \tilde{P} = \begin{pmatrix} \lambda + 4\epsilon_*^2 & -2\epsilon_* \\ -2\epsilon_* & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.3.13)$$

y λ , ϵ_* , γ_2 , K_1^* y $K_2^* > 0$. Notése que la matrix \tilde{P} es definida positiva si $\lambda > 0$ y $\epsilon_* \in \mathfrak{R}$.

Entonces, al calcular la derivada con respecto al tiempo de la función candidata de Lyapunov (3.3.12), se obtiene

$$\dot{V}(\varsigma, K_1, K_2) = \dot{V}_0 + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\gamma_i} (K_i - K_i^*) \dot{K}_i, \quad (3.3.14)$$

donde

$$\dot{V}_0 = \varsigma^T \{ \tilde{A}(\varsigma_1)^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{A}(\varsigma_1) \} \varsigma \leq -\frac{1}{|\varsigma_1|} \varsigma^T \tilde{Q} \varsigma. \quad (3.3.15)$$

La matriz simétrica \tilde{Q} se define como

$$\tilde{Q} = \frac{1}{2|s|^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} 4b(x, t) [K_1(\lambda + 4\epsilon_*^2) - 2K_2\epsilon_*] + 8\rho\epsilon_* & * \\ -\lambda - 4\epsilon_*^2 - 2b(x, t) [2K_1\epsilon_* - K_2] - 2\rho & 4\epsilon_* \end{pmatrix}. \quad (3.3.16)$$

Al seleccionar

$$K_2 = 2\epsilon_*K_1, \quad (3.3.17)$$

entonces, a partir de las hipótesis $B3 - B5$, es fácil deducir que la matriz \tilde{Q} será definida positiva con un valor propio mínimo $\lambda_{min}(\tilde{Q}) \geq 2\epsilon_*$ si se cumple la condición siguiente

$$K_1 > \frac{(\lambda + 4\epsilon_*)^2 + 4\delta_4^2 + 4\delta_4(\lambda - 4\epsilon_*^2)}{16\epsilon_*\lambda\gamma_1}. \quad (3.3.18)$$

Por otro lado, derivando la función candidata de Lyapunov (3.3.12) a lo largo de las trayectorias de (3.3.7), se obtiene

$$\dot{V}(\varsigma, K_1, K_2) = \dot{V}_0 + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\gamma_i} (K_i - K_i^*) \dot{K}_i, \quad (3.3.19)$$

donde

$$\dot{V}_0 = \varsigma^T \{ \tilde{A}(\varsigma_1)^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{A}(\varsigma_1) \} \varsigma \leq -\frac{1}{|\varsigma_1|} \varsigma^T \tilde{Q} \varsigma. \quad (3.3.20)$$

Dado que \tilde{Q} es definida positiva con un valor propio mínimo $\lambda_{min}(\tilde{Q}) \geq 2\epsilon_*$, se satisface la siguiente desigualdad

$$\dot{V}_0 \leq -\frac{1}{|\varsigma_1|} \varsigma^T \tilde{Q} \varsigma \leq -\frac{2\epsilon_*}{|\varsigma_1|} \|\varsigma\|^2, \quad (3.3.21)$$

y, a partir de la norma de equivalencia, se tiene

$$\lambda_{min}(\tilde{P}) \|\varsigma\|^2 \leq \varsigma^T \tilde{P} \varsigma \leq \lambda_{max}(\tilde{P}) \|\varsigma\|^2, \quad (3.3.22)$$

donde $\|\varsigma\|^2 = |s| + \varsigma_2^2$, y

$$|\varsigma_1| = |s|^{1/2} \leq \|\varsigma\| \leq \sqrt{\frac{V_0(\varsigma)}{\lambda_{min}(\tilde{P})}}.$$

Entonces, con una selección de las ganancias acorde a las condiciones (3.3.17),(3.3.18), se tiene que

$$\dot{V}_0 \leq -rV_0^{1/2}, \quad r = 2\epsilon_* \frac{\sqrt{\lambda_{min}(\tilde{P})}}{\lambda_{max}(\tilde{P})}. \quad (3.3.23)$$

Ahora bien, de acuerdo a las ecuaciones (3.3.19) y (3.3.23), se tiene

$$\dot{V}(\varsigma, K_1, K_2) \leq -rV_0^{1/2} + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\gamma_i} \epsilon_{K_i} \dot{K}_i^*, \quad (3.3.24)$$

donde $\epsilon_{K_i} = (K_i - K_i^*)$ para $i=1,2$. Añadiendo el término $\pm \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\omega_i}{\sqrt{2\gamma_i}} |\epsilon_{K_i}| \right\}$ a (3.3.24), se obtiene

$$\dot{V}(\varsigma, K_1, K_2) \leq -rV_0^{1/2} - \sum_{i=1}^2 \frac{\omega_i}{\sqrt{2\gamma_i}} |\epsilon_{K_i}| + \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{1}{\gamma_i} \epsilon_{K_i} \dot{K}_i^* + \frac{\omega_i}{\sqrt{2\gamma_i}} |\epsilon_{K_i}| \right\}, \quad (3.3.25)$$

A partir de $(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \leq |x| + |y| + |z|$, se mantiene la siguiente desigualdad

$$-rV_0^{1/2} - \sum_{i=1}^2 \frac{\omega_i}{\sqrt{2\gamma_i}} |\epsilon_{K_i}| \leq -\eta_0 \sqrt{V(\varsigma, K_1, K_2)}, \quad (3.3.26)$$

dados $\omega_2 > 0$, $\eta_0 = \min(r, \frac{\omega_1}{\sqrt{2\gamma_1}}, \frac{\omega_2}{\sqrt{2\gamma_2}})$. De acuerdo a la desigualdad (3.3.26), la ecuación (3.3.24) puede reescribirse como

$$\dot{V}(\varsigma, K_1, K_2) \leq -\eta_0 \sqrt{V(\varsigma, K_1, K_2)} + \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{1}{\gamma_i} \epsilon_{K_i} \dot{K}_i^* + \frac{\omega_i}{\sqrt{2\gamma_i}} |\epsilon_{K_i}| \right\}. \quad (3.3.27)$$

Ahora bien, con base en la definición de las ganancias adaptivas (3.3.11), se puede construir una solución en el dominio $\mu < |s| \leq \eta_1$ de la forma siguiente

$$K_1 = K_1(0) + \omega_1 \sqrt{\frac{\gamma_1}{2}} t, \quad 0 \leq t \leq t_F. \quad (3.3.28)$$

siendo K_1 acotada. Considerando $K_2 = 2\epsilon_* K_1$, la ganancia adaptiva K_2 es igualmente acotada.

Dentro del dominio $|s| \leq \mu$, Las ganancias K_1 y K_2 son decrecientes. Por lo tanto, las ganancias K_1 y K_2 están acotadas en el modo deslizante real de segundo orden.

Entonces, existen constantes positivas K_1^*, K_2^* tal que $K_i - K_i^* < 0, \forall \geq 0, i = 1, 2$. De esta forma, la ecuación (3.3.27) puede reducirse a

$$\dot{V}(\varsigma, K_1, K_2) \leq -\eta_0 \sqrt{V(\varsigma, K_1, K_2)} + \hat{\epsilon}, \quad (3.3.29)$$

donde

$$\hat{\epsilon} = - \sum_{i=1}^2 |\epsilon_{K_i}| \left(\frac{1}{\gamma_i} \dot{K}_i - \frac{\omega_i}{\sqrt{2\gamma_i}} \right).$$

Entonces, si $|s| > \mu$ y $K_1 > K_1^*, \forall t \geq 0$, se tiene que

$$\dot{K}_1 = \omega_1 \sqrt{\frac{\gamma_1}{2}} \quad y \quad \hat{\epsilon} = - |\epsilon_{K_2}| \left(\frac{1}{\gamma_2} \dot{K}_2 - \frac{\omega_2}{\sqrt{2\gamma_2}} \right). \quad (3.3.30)$$

Así, seleccionando $\epsilon_* = \frac{\omega_2}{2\omega_1} \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}}$, obtenemos

$$\dot{K}_2 = \omega_2 \sqrt{\frac{\gamma_2}{2}}. \quad (3.3.31)$$

A partir de (3.3.31), el término $\hat{\epsilon}$ en (3.3.29) se vuelve $\hat{\epsilon} = 0$, por lo que se obtiene

$$\dot{V}(\varsigma, K_1, K_2) \leq -\eta_0 \sqrt{V(\varsigma, K_1, K_2)}. \quad (3.3.32)$$

Integrando (3.3.32), tenemos que

$$\sqrt{V(t, \varsigma, K_1, K_2)} \leq \sqrt{V(t_0, \varsigma, K_1, K_2)} - \frac{\eta_0}{2} t, \quad (3.3.33)$$

Sea $\sqrt{V(t_0, \varsigma, K_1, K_2)} - \frac{\eta_0}{2} t_F = 0$, entonces el tiempo de convergencia t_F esta dado por

$$t_F = \frac{2\sqrt{V(t_0, \varsigma, K_1, K_2)}}{\eta_0}. \quad (3.3.34)$$

Además, para $t > t_F$ tenemos que $V(t) = 0$.

Por otro lado, cuando $|s| < \mu$, K_1 está dado por (3.3.11), y el término $\hat{\epsilon}$ se vuelve

$$\hat{\epsilon} = \begin{cases} 2 |K_1 - K_1^*| \frac{\omega_1}{\sqrt{2\gamma_1}}, & K_1 > K_*, \\ - |K_* - K_1^* + \eta t| \left(\frac{\eta}{\gamma_1} - \frac{\omega_1}{\sqrt{2\gamma_1}} \right), & K_1 \leq K_*, \end{cases} \quad (3.3.35)$$

Por lo cual, durante el proceso de adaptación la variable deslizante s alcanza el dominio $|s| \leq \mu$ en tiempo finito. Si s escapa del dominio un tiempo finito, se garantiza que permanecerá en un dominio mayor $|s| \leq \eta_1, \eta_1 > \mu$ en un modo deslizante real.

Dentro del dominio $|s| \leq \mu$, el valor $|s|$ puede estimarse con respecto a (3.3.4), y de acuerdo a (3.3.11)-(3.3.17) tal que

$$|s| \leq \{(1 - \gamma_1)K_1 + \delta_1\} \mu^{\frac{1}{2}} + \epsilon_* K_1 (1 - \gamma_1)(t_2 - t_1) = \bar{\eta}_1, \quad (3.3.36)$$

donde t_1, t_2 es el tiempo en el cual s entra y se aleja del dominio $|s| \leq \mu$, respectivamente.

Si $\mu < |s| \leq \eta_1$, entonces

$$|\dot{s}| \leq (1 + \gamma_1)(\sqrt{\eta_1} + \epsilon_*)(K_1(t_2) + \omega_1 \sqrt{\frac{\eta_1 \gamma_1}{2}})(t_3 - t_2) + \delta_1 \sqrt{\eta_1} = \bar{\eta}_2, \quad (3.3.37)$$

donde $t_2, t_3, t_3 > t_2$, son los instantes de tiempo cuando s abandona y regresa al dominio $|s| \leq \mu$ respectivamente.

A partir de las condiciones (3.3.36)-(3.3.37), obtenemos

$$|\dot{s}| \leq \max(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2) = \eta_2, \quad (3.3.38)$$

y de esta forma se prueba la existencia del dominio real del modo deslizante

$$W = \{s, \dot{s} : |s| \leq \eta_1, |\dot{s}| \leq \eta_2, \eta_1 > \mu\} \quad (3.3.39)$$

Con lo cual se concluye la prueba. \diamond

3.4 No linealidades en los accionadores de aeronaves

Las aeronaves a escala poseen generalmente sistemas de propulsión eléctricos. Lo anterior debido a características como el bajo nivel de ruido, lo cual representa una ventaja en cuestiones de seguridad. Además, existe un mayor rango de operación en los motores eléctricos,

en comparación con su contraparte de combustión interna. Los vehículos aéreos no tripulados eléctricos pueden concentrar distintas fuentes de alimentación como celdas de combustible, paneles solares, entre otras. Permitiendo así, una actualización más rápida en los equipos de acuerdo a los avances en la electrónica de potencia.

Sin embargo, existe la aparición de dinámicas no lineales indeseables para la operación de cualquier sistema, y en el caso de los sistemas de control de vuelo tiende a ser minimizada para facilitar la tarea de control. Entre las dinámicas no lineales que ocurren en los sistemas de control de las aeronaves se encuentran el juego dinámico, la aparición de zonas muertas y fricción. Dichas dinámicas indeseables pueden ocurrir en diversas superficies de control como los alerones de aeronaves de ala fija, así como también en mecanismos de plato cíclico y rotores articulados en el caso de helicópteros [10, 33, 16]. De tal forma que una estrategia de control adecuada, además de tomar en cuenta las dinámicas del sistema, deberá de ser suficientemente robusta para compensar dinámicas indeseables en los accionadores.

El fenómeno del juego mecánico puede definirse como el espacio excedente que existe entre dos piezas móviles en contacto, el cual está presente en muchos sistemas mecánicos, típicamente aquellos que poseen engranes, por ejemplo: la transmisión en vehículos, molinos, imprentas y robots industriales. Fenómenos similares al juego mecánico se pueden apreciar en los sistemas de control como los servomecanismos, circuitos con relevadores y dispositivos magnéticos con histéresis. Ésta dinámica no lineal impone serias limitaciones en el desempeño, generando pérdida de exactitud en la posición y velocidad del sistema de control e indeseables retardos y oscilaciones, las cuales pueden llevar incluso a la inestabilidad.

Las dinámicas de un motor de corriente directa pueden describirse mediante las siguientes

ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{\chi}_1 &= \chi_2 \\ \dot{\chi}_2 &= \alpha\chi_2 + \beta u + \Delta(\chi, u, t),\end{aligned}\tag{3.4.1}$$

$$\alpha = -\frac{BR+K_eK_m}{RJ} < 0, \quad \beta = \frac{K_m}{RJ} > 0$$

donde $\chi = (\chi_1, \chi_2)^T$ corresponde a $(\theta, \dot{\theta})^T$, respectivamente. u denota el voltaje de entrada del motor. $\Delta(\chi, u, t)$ representa la incertidumbre en los parámetros, dinámicas no lineales y las perturbaciones externas agrupadas en conjunto. K_e representa la fuerza contra-electromotriz, R denota la resistencia del devanado de armadura, J representa el momento de inercia de las partes móviles, K_m el coeficiente del par electromecánico y B denota el coeficiente de amortiguamiento.

Con el fin de diseñar un controlador ASTA basado en las ecuaciones (3.2.2)-(3.3.1), para el sistema (3.4.1), se define una superficie deslizante de control de la siguiente forma

$$s = \left(\chi_2 - \dot{\theta}_d(t) \right) + \lambda_1 (\chi_1 - \theta_d(t)),\tag{3.4.2}$$

cuya derivada con respecto al tiempo está dada por

$$\dot{s} = F_1 - \ddot{\theta}_d(t) + \lambda_1 \left(\chi_2 - \dot{\theta}_d(t) \right) + b_1 v_1 = a_1 + b_1 v_1\tag{3.4.3}$$

donde $(\theta_d(t))$ es la trayectoria de referencia y v_1 la entrada de control definida de acuerdo a las ecuaciones (3.2.2)-(3.3.11).

3.4.1 Resultados experimentales

Con el fin de demostrar la factibilidad y el desempeño de la metodología de control ASTA, en esta sección se muestran los resultados obtenidos mediante la implementación del esquema de

control propuesto, la cual es llevada a cabo en la plataforma Modular Servo System[®] (MSS) (Fig. 3.1)

La plataforma experimental MSS está compuesta por diferentes módulos acoplados en serie y montados sobre un riel metálico. En primer lugar se encuentra un motor acoplado a un taco-generador; mientras que al final de la cadena se encuentra un motorreductor con un disco para indicar la posición. Posteriormente se pueden insertar en la cadena módulos de inercia, juego mecánico y amortiguamiento (ver Fig. 3.2). El ángulo del eje del motor de CD es medido a través de un encóder incremental. La medición del ángulo tiene una precisión de 0.1%. La señal de control está limitada a ± 1 , lo cual corresponde a un voltaje de $\pm 12V$ (para mayor información consultar [2]).

Los algoritmos de control fueron desarrollados en el ambiente MATLAB/Simulink[®], mientras el código ejecutable correspondiente fué generado automáticamente mediante el software RTW/RTWI, empleando un período de muestreo de $0.4kHz$ y el método de integración numérica Euler.

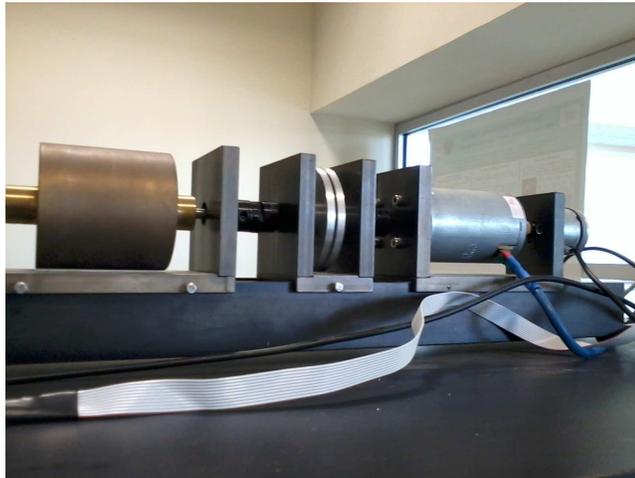


Figura 3.1: Plataforma electromecánica experimental.

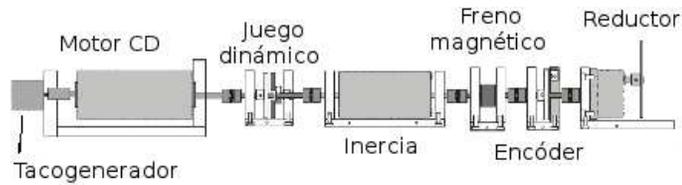


Figura 3.2: Diagrama del Modular Servo System[©].

Los parámetros del controlador se muestran en la Tabla 6.1. Además del control ASTA, también fueron considerados un controlador PID clásico y el algoritmo de control Super Twisting de ganancia fija (STA, ver [28]) para un estudio comparativo.

ω_1	λ	ι	γ	ϵ_*
0.1	0.3	0.1	0.1	0.01

Tabla 3.1: Parámetros del controlador ASTA aplicado a la plataforma electromecánica experimental.

Caso Nominal.

La tarea de control consiste en realizar el seguimiento angular con una señal de referencia cuadrada de amplitud 40 rad y frecuencia de 0.1Hz. La respuesta angular puede verse en la Figura 3.3, donde se puede apreciar que para el caso nominal los controladores muestran una respuesta similar. Las señales de control correspondientes pueden observarse en la Figura 3.4.

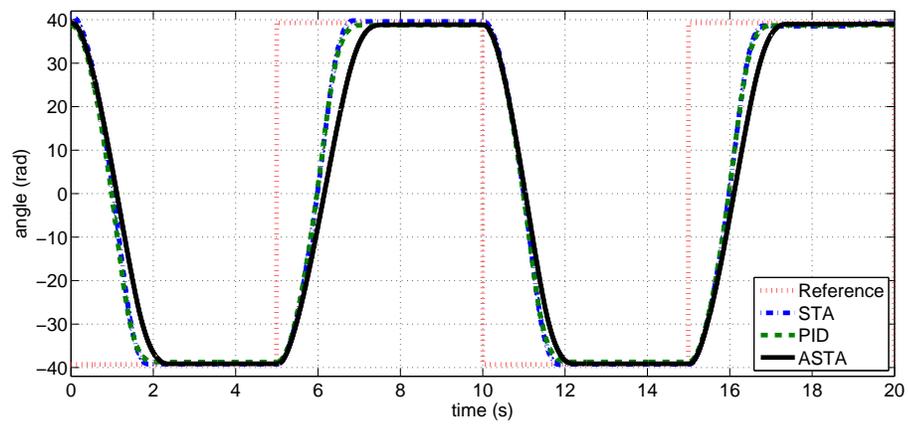


Figura 3.3: Respuesta angular de la plataforma electromecánica experimental.

Control	MSE	ITAE	$\ e\ _2$	$\ u\ _2$
STA	1528.94	3.52×10^6	3029.05	40.96
PID	1526.60	3.51×10^6	3026.74	39.23
ASTA	1527.52	3.51×10^6	3027.65	30.31

Tabla 3.2: Desempeño de los controladores aplicados a la plataforma electromecánica experimental (Caso nominal).

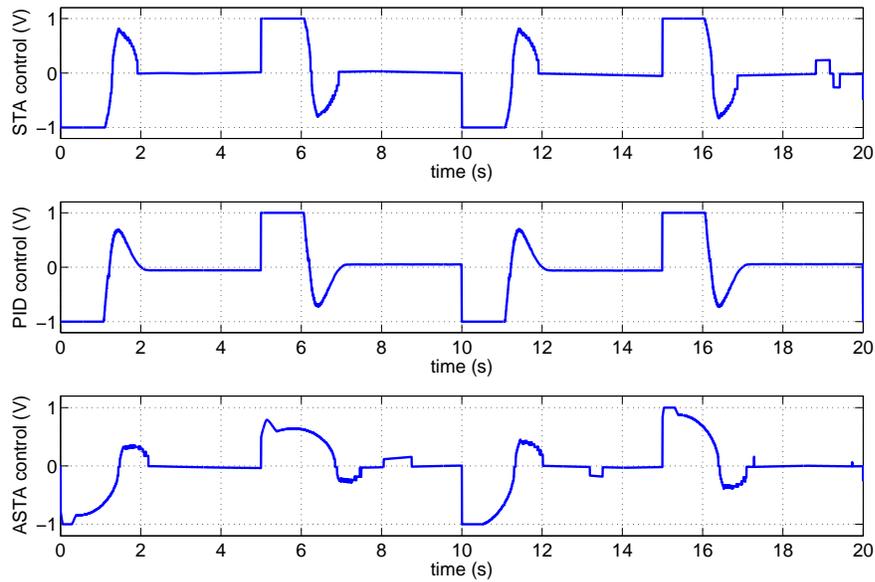


Figura 3.4: Señales de control de la plataforma electromecánica experimental: STA (superior), PID (centro), ASTA (inferior).

Adicionalmente, la adaptación de las ganancias del controlador ASTA se puede observar en la Figura 3.7. Los índices de desempeño: Error Cuadrático Promedio (MSE), Integral del Error Absoluto con respecto al Tiempo (ITAE), norma del error y norma de la señal de control se muestran en la Tabla 6.3 con el propósito de ilustrar el desempeño similar de los controladores.

Juego mecánico añadido.

Con el fin de probar la robustez del controlador propuesto, se inserta en la plataforma experimental el módulo de juego mecánico entre el motor de CD y la carga inercial. Cabe destacar que el módulo de juego mecánico tiene un par de engranes con un solo diente, lo cual equivale a un ángulo de juego mecánico aproximado a 2π .

La respuesta del sistema para el segundo experimento se muestra en la Figura 3.5, donde

puede observarse que el controlador propuesto presenta la mejor respuesta. En el caso del controlador PID, las oscilaciones resultan evidentes; mientras que para el control STA las oscilaciones se observan fácilmente en la señal de control, en la Figura 3.6. A partir de las gráficas de tiempo extendido se puede observar que el controlador propuesto mantiene su desempeño. La ganancia adaptativa contribuye a compensar la dinámica no lineal, la Figura 3.7 muestra su evolución. La Tabla 6.4 ilustra el desempeño de los controladores de acuerdo a distintos índices. A través de los índices podemos observar que el esquema de control propuesto requiere menor esfuerzo de control y presenta el mejor desempeño entre los controladores probados.

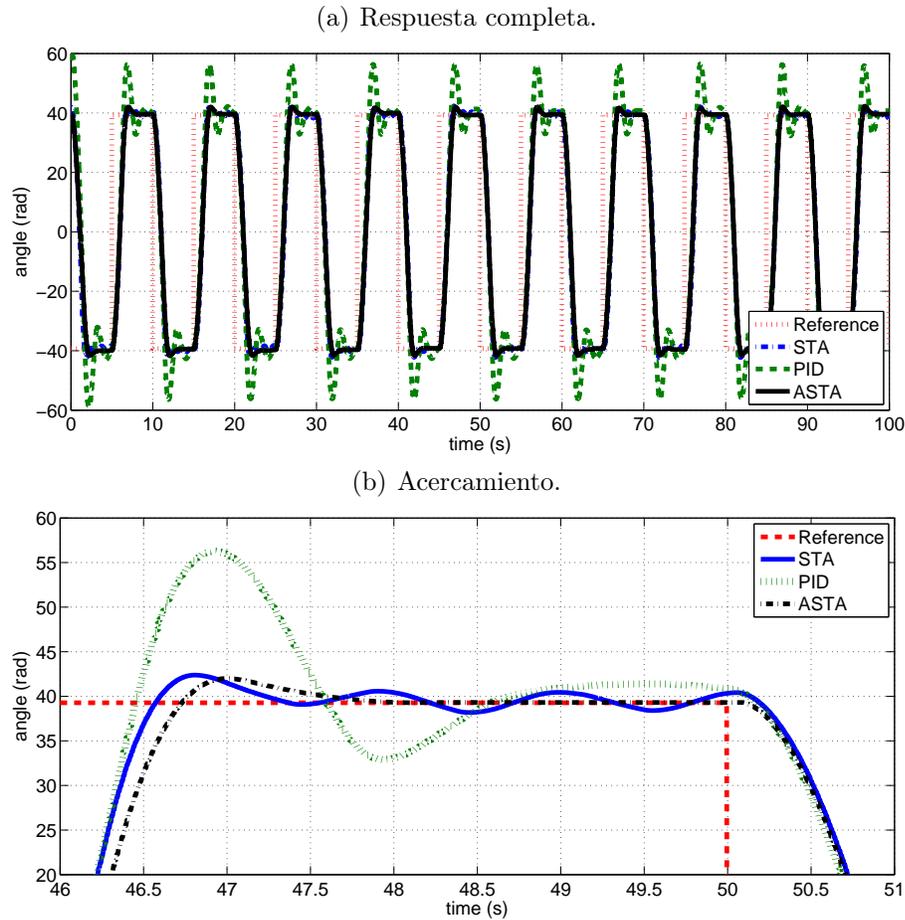


Figura 3.5: Respuesta angular de la plataforma electromecánica experimental con juego mecánico añadido.

Control	MSE	ITAE	$\ e\ _2$	$\ u\ _2$
STA	991.54	1.58×10^7	4453.29	85.12
PID	985.90	1.78×10^7	4440.62	97.06
ASTA	958.94	1.54×10^7	4379.48	66.91

Tabla 3.3: Desempeño de los controladores aplicado a la plataforma electromecánica experimental con juego mecánico.

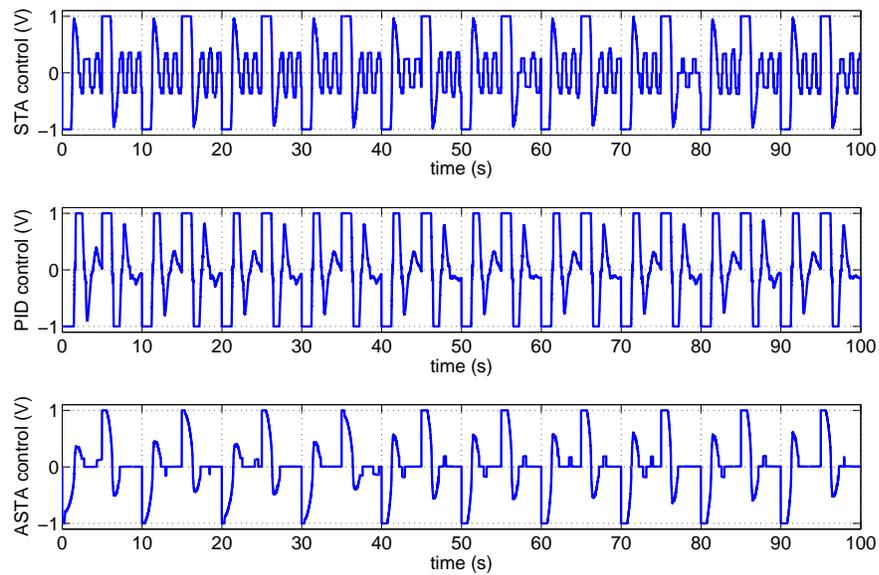


Figura 3.6: Señales de control del sistema electromecánico experimental con juego mecánico añadido: STA (superior), PID (centro), ASTA (inferior).

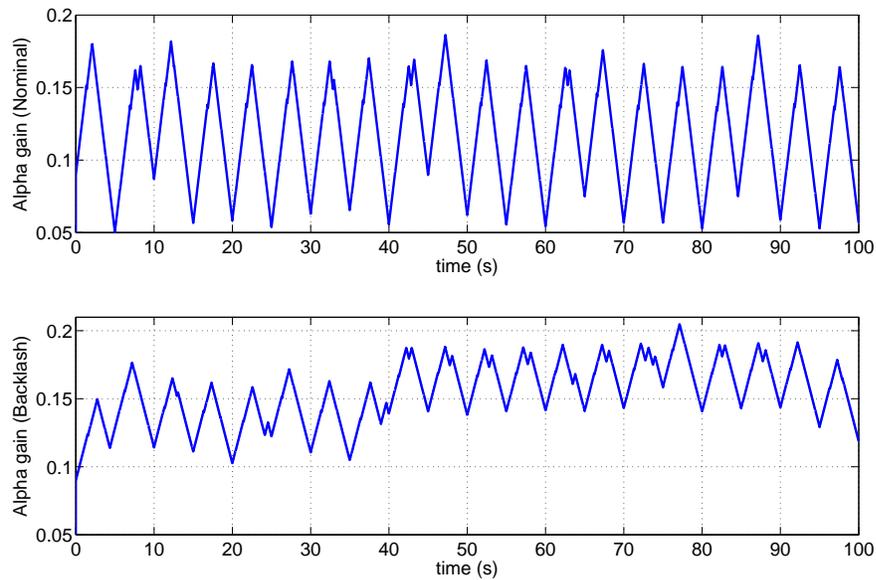


Figura 3.7: Ganancias adaptivas del controlador ASTA de la plataforma electromecánica experimental: caso nominal (superior), experimento con juego mecánico añadido (inferior).

3.5 Conclusiones

En este capítulo se introdujo el Algoritmo Super Twisting Adaptivo (ASTA), bajo este enfoque, no se requiere conocer las cotas de las incertidumbres y perturbaciones presentes en el sistema. La principal ventaja de este algoritmo es la combinación de la reducción del fenómeno de chattering y la robustez de los modos deslizantes de alto orden; garantizando la convergencia en tiempo finito y la robustez del sistema bajo incertidumbre.

Como un ejemplo ilustrativo de la metodología de control Adaptivo Super Twisting, se abordó el control de posición de un sistema electromecánico. El controlador propuesto fue probado en una plataforma experimental y comparado con un controlador PID clásico y el Algoritmo Super Twisting con ganancia fija. Al introducir la no linealidad del juego mecánico

en la plataforma, se demostró la robustez y eficiencia del controlador propuesto sobre los demás esquemas de control, requiriendo además el menor esfuerzo de control.

Cabe destacar que la validación del controlador ASTA sobre sistemas con juego dinámico representa una nueva aplicación del algoritmo. Bajo el enfoque ASTA, no es necesario caracterizar la dinámica no lineal del juego dinámico, representando una ventaja sobre algoritmos basados en su modelado.

En el siguiente capítulo se abordará el diseño de observadores que permitan estimar la información necesaria para la implementación de los controladores presentados en esta sección.

Capítulo 4

Observadores no lineales

4.1 Introducción

Para implementar un controlador, es necesario contar con información sobre los estados del sistema. Sin embargo, no siempre es posible medir los estados directamente. Esta dificultad puede superarse mediante el uso de observadores, los cuales permiten estimar los estados del sistema a partir de sus entradas y salidas.

Antes de proceder al diseño de un observador, es necesario verificar la observabilidad del sistema. La observabilidad de los sistemas no lineales depende de la entrada del sistema. Existen entradas que vuelven al sistema inobservable, las cuales se conocen como entradas singulares. Sin embargo, existe una clase de sistemas que son observables para cualquier tipo de entrada, los cuales se denominan uniformemente observables. Los sistemas no lineales uniformemente observables pueden transformarse, mediante un cambio de coordenadas adecuado, a una forma canónica de estructura triangular.

Existen diferentes clases de observadores para sistemas uniformemente observables, por

ejemplo los basados en técnicas de Modos Deslizantes, los cuales poseen un tiempo de convergencia finito. Existen además los observadores de alta ganancia con convergencia asintótica. Una clase de observador de alta ganancia es el Observador de Estado Extendido, el cual presenta un desempeño notable bajo condiciones de dinámicas desconocidas, perturbaciones, ruido de medición y además es sencillo de sintonizar [18, 46, 20]. En este caso, las incertidumbres paramétricas y dinámicas no modeladas son consideradas como un estado adicional del sistema y posteriormente pueden compensarse al cancelar su estimado, controlando así cada subsistema mediante un controlador independiente.

4.2 Observador No Lineal de Estado Extendido

Considérese un sistema triangular de segundo orden, aunque la metodología puede extenderse fácilmente a sistemas de orden superior, cuyas dinámicas son extendidas como se describe a continuación

$$\tilde{\Sigma} : \begin{cases} \dot{\chi}_1 &= \chi_2, \\ \dot{\chi}_2 &= \chi_3 + b_0 u, \\ \dot{\chi}_3 &= \eta(\chi), \\ y &= \chi_1, \end{cases} \quad (4.2.1)$$

donde b_0 representa el valor nominal de b , con $b = b_0 + \Delta b$ y los estados adicionales $\chi_3 = F(\chi) + \frac{\Delta b}{b_0} u$, estimando la perturbación total para cada subsistema.

Hipótesis C1. $F(\cdot)$, u y sus derivadas $\eta(\cdot) = \dot{F}(\chi) + \frac{\Delta b}{b_0} \dot{u}$, son localmente Lipschitz con respecto a sus argumentos y acotadas dentro de los dominios de interés. Además, se asumen las condiciones iniciales $F(\cdot)|_{t=0} = 0$, y $\dot{F}(\cdot)|_{t=0} = 0$.

Hipótesis C2. La salida $y = \chi_1$; y sus derivadas hasta 4º orden están acotadas.

Entonces, el siguiente sistema

$$O : \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 - \beta_1 fal(\hat{e}_1(t), \hat{\gamma}_1, \hat{\delta}), \\ \dot{z}_2 = z_3 - \beta_2 fal(\hat{e}_1(t), \hat{\gamma}_2, \hat{\delta}) + b_0 u, \\ \dot{z}_3 = -\beta_3 fal(\hat{e}_1(t), \hat{\gamma}_3, \hat{\delta}), \end{cases} \quad (4.2.2)$$

es un observador que estima los estados no medibles de (4.2.1), donde $\hat{e}_j(t) = \chi_j - z_j$ dado $j = 1, 2, 3$; es el error de estimación, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$ son las ganancias del observador y $Z = (z_1, z_2, z_3)^T$; es el vector de estados estimados.

La ganancia del observador está en función de $fal(\cdot)$, dicha función no lineal se utiliza para acelerar la convergencia de las señales y es definida de la siguiente manera

$$fal(e, \hat{\gamma}, \hat{\delta}) = \begin{cases} |e|^{\hat{\gamma}} sign(e), & |e| > \hat{\delta}, \\ \frac{e}{\hat{\delta}^{1-\hat{\gamma}}}, & |e| \leq \hat{\delta}, \end{cases} \quad (4.2.3)$$

donde $\hat{\gamma}$ y $\hat{\delta}$ son parámetros de diseño.

Cuando el valor del parámetro $\hat{\gamma}$ es seleccionado entre 0 y 1, $fal(\cdot)$ genera una ganancia mayor cuando el error es pequeño, mientras que para errores grandes corresponde una ganancia menor. Si se selecciona $\hat{\gamma} = 1$, entonces el observador equivale al observador Luenberger. $\hat{\delta}$ es un valor pequeño usado para limitar la ganancia en la vecindad del origen (Fig. 4.1).

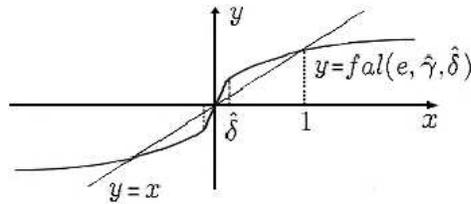


Figura 4.1: Comparación entre ganancia lineal y no-lineal del observador de estado extendido.

Existen diferentes técnicas para sintonizar los parámetros $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, del observador. Por ejemplo, a partir de una ganancia lineal $fal(\cdot) = e$, el método de localización de polos se emplea en [19] para los parámetros iniciales del observador, para posteriormente añadir los términos no lineales para mejorar el desempeño. Para simplificar, los polos de la ecuación característica se ubican en un punto ($\hat{\omega}$) y las ganancias del observador se pueden expresar como

$$\beta_j = l_j \hat{\omega}^j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (4.2.4)$$

donde los parámetros l_j , $j = 1, 2, 3$; son seleccionados tal que el polinomio característico $s^3 + l_1 s^2 + l_2 s + l_3$ es Hurwitz. $\hat{\omega} > 0$ es un parámetro de diseño, el ancho de banda de la salida del observador. Es común seleccionar $\hat{\omega}$ de acuerdo a un balance entre la velocidad de convergencia y la sensibilidad al ruido y el período de muestreo. Un análisis sobre la convergencia de este observador puede consultarse en [21].

4.3 Diferenciador por Modos Deslizantes de Alto Orden

La elección de un método de derivación conlleva un compromiso entre la sensibilidad al ruido y el desfase de la salida del diferenciador con respecto a la derivada real. La diferenciación por Modos Deslizantes de Alto Orden representa un poderoso enfoque para la estimación de la derivada de una señal [28, 42]. Sin embargo, en presencia de ruido, la precisión en el cálculo de la derivada numérica se vé deteriorada rápidamente conforme crece el orden de derivación [27].

Sea $f(t)$ una función definida en $[0, \infty)$, compuesta de ruido Lebesgue-medible acotado desconocido y $f_0(t)$ una señal desconocida, cuya derivada k -th posee una constante Lipschitz $L > 0$ conocida. De esta forma, el problema de encontrar los valores estimados de $f_0^{(i)}(t)$, para $i = 0, \dots, k$; tal que sean exactos bajo condiciones de ausencia de ruido, es resuelto mediante el

diferenciador exacto robusto (Para más detalles consultar [28].), el cual está dado por

$$\begin{aligned}
\dot{z}_0 &= \nu_0 \\
\nu_0 &= -\lambda_k L^{\frac{1}{k}} |z_0 - f(t)|^{\frac{k-1}{k}} \text{sign}(z_0 - f(t)) + z_1 \\
&\vdots \\
\dot{z}_j &= \nu_j \\
\nu_j &= -\lambda_{k-j} L^{\frac{1}{k-j}} |z_j - \nu_{j-1}|^{\frac{k-j-1}{k-j}} \text{sign}(z_j - \nu_{j-1}) + z_{j+1} \\
\dot{z}_{k-1} &= -\lambda_1 L \text{sign}(z_{k-1} - \nu_{k-2}),
\end{aligned} \tag{4.3.1}$$

para $j = 0, \dots, k-2$; donde z_0, z_1, \dots, z_j son los estimados de las derivadas j -th de $f(t)$.

4.4 Comparativo de los observadores

En esta sección, un diferenciador robusto y un observador no lineal de estado extendido de tercer orden fueron diseñados para calcular la derivada de la siguiente señal $f(t) = 5t + \sin(t) + \alpha \cos(10t)$. El parámetro α tiene un valor inicial de 0 y a los 3 segundos de la simulación se incrementa a 0.01. En una segunda prueba, el valor del parámetro α se incrementa a 0.3. En la Figura 4.2, se puede apreciar la respuesta de los observadores para la estimación de la derivada de la señal $f(t)$. La derivada que se obtiene mediante el diferenciador robusto muestra un mayor retraso que la derivada obtenida mediante el observador NESO, con respecto a la derivada exacta. El retraso de la derivada obtenida mediante el diferenciador robusto es inversamente proporcional a las oscilaciones de la señal en estado estable. Por otro lado, la derivada que se obtiene mediante el observador NESO muestra un mayor transitorio cuando se incrementa el valor de α . Finalmente, la Tabla 4.1 presenta diversos indicadores del desempeño de los observadores.

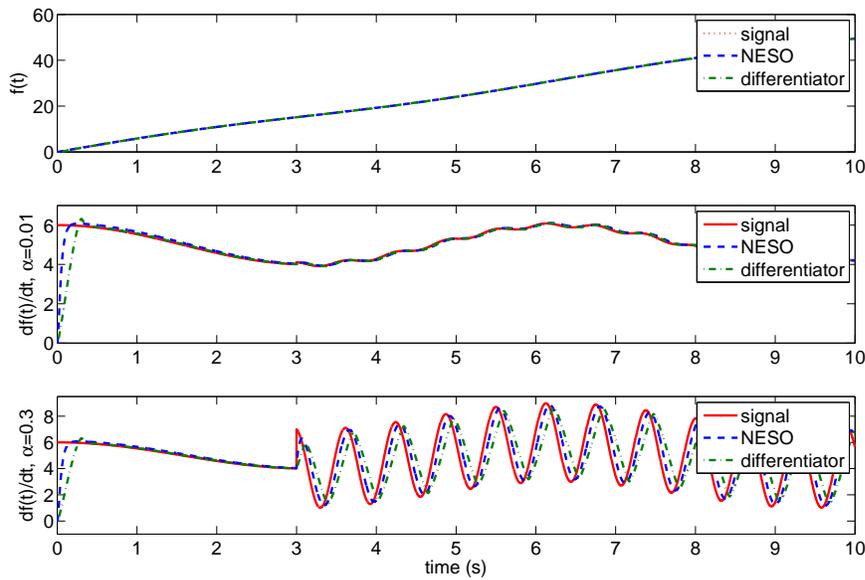


Figura 4.2: Comparación del desempeño del NESO y el diferenciador robusto: señal original $f(t)$ (superior), $\dot{f}(t)$ con $\alpha = 0.01$ (centro), $\dot{f}(t)$ con $\alpha = 0.3$ (inferior).

Observador	MSE	ITAE	$\ e\ _2$	$\ e\ _\infty$
$\alpha = 0.01$				
NESO	0.1195	2.03×10^3	34.56	6.01
Diferenciador robusto	0.3257	1.32×10^3	57.07	6
$\alpha = 0.3$				
NESO	0.7371	3.58×10^4	85.85	6.01
Diferenciador robusto	2.2855	6.77×10^4	151.18	6

Tabla 4.1: Desempeño de los observadores.

4.5 Conclusión

En el presente capítulo se establecieron estrategias de observación para sistemas no lineales. Se presentó la metodología de diseño de observadores no lineales de estado extendido y el enfoque de diferenciación robusta. Mediante un comparativo se estableció el desempeño de los mismos,

donde se pudo constatar un mejor desempeño del observador NESO bajo condiciones de señales ruidosas.

En el siguiente capítulo se establecerán esquemas de control y observación para el helicóptero de 2-GDL y el cuadrirotor, abordados en la presente investigación. Se analizará la estabilidad en lazo cerrado de los mismos, y se establecerá un comparativo entre métodos anteriormente utilizados.

Capítulo 5

Esquemas de control y observación

5.1 Introducción

La mayor desventaja en los enfoques de control basado en modelos del sistema se debe a la variación e incertidumbre presente en los parámetros del modelo dinámico.

Para resolver el problema de seguimiento angular del sistema aerodinámico, se propone un algoritmo de control basado en super twisting adaptivo. Con el fin de implementar dicho controlador, la información necesaria de los estados no medibles al igual que las perturbaciones del sistema, son estimadas mediante observadores.

5.1.1 Control de posición angular basado en Super Twisting Adaptivo

A partir de los subsistemas (2.1.5), la superficie deslizante para el control (3.2.2)-(3.3.1) está definida como

$$s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\chi_{12} - \dot{\theta}_d(t)) + \lambda_\theta (\chi_{11} - \theta_d(t)) \\ (\chi_{22} - \dot{\psi}_d(t)) + \lambda_\psi (\chi_{21} - \psi_d(t)) \end{bmatrix}, \quad (5.1.1)$$

cuya derivada con respecto al tiempo esta dada por

$$\dot{s} = \begin{pmatrix} \left\{ F_1 - \ddot{\theta}_d(t) + \lambda_\theta (\chi_{12} - \dot{\theta}_d(t)) \right\} + b_1 v_1 \\ \left\{ F_2 - \ddot{\psi}_d(t) + \lambda_\psi (\chi_{22} - \dot{\psi}_d(t)) \right\} + b_2 v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 v_1 \\ a_2 + b_2 v_2 \end{pmatrix} \quad (5.1.2)$$

$(\theta_d(t), \psi_d(t))$ son las referencias angulares deseadas y (v_1, v_2) las entradas de control definidas de acuerdo a (3.2.2)-(3.3.11).

Sin embargo, para implementar el control propuesto, es necesario conocer los valores de (χ_{12}, χ_{12}) , así como también de las dinámicas desconocidas F_i , para $i=1,2$. Por ello, y para superar las dificultades de modelado, la estimación de los dichos términos será abordada en la siguiente sección.

5.1.2 Observador No Lineal de Estado Extendido

En esta sección, con el fin de estimar las velocidades angulares $\dot{\theta}, \dot{\psi}$ y los términos F_i de los subsistemas (Σ_1, Σ_2) , se aborda el diseño de un Observador No Lineal de Estado Extendido (NESO).

Considérese los subsistemas (2.1.5), cuyas dinámicas son extendidas como se describe a continuación

$$\tilde{\Sigma}_i : \begin{cases} \dot{\chi}_{i1} = \chi_{i2} \\ \dot{\chi}_{i2} = \chi_{i3} + b_{i0} u_i \\ \dot{\chi}_{i3} = \eta_i(\chi) \\ y = \chi_{i1}, \quad i = 1, 2 \end{cases} \quad (5.1.3)$$

donde b_{0i} representa el valor nominal de b_i , con $b_i = b_{0i} + \Delta b_i$ y los estados adicionales $\chi_{i3} = F_i(\chi_i) + \frac{\Delta b_i}{b_{i0}} u_i$, estimando la perturbación total para cada subsistema.

Hipótesis C1. $F_i(\cdot)$, u_i y sus derivadas $\eta_i(\cdot) = \dot{F}_i(\chi_i) + \frac{\Delta b_i}{b_{i0}} u_i$, $i = 1, 2$; son localmente Lipschitz con respecto a sus argumentos y acotadas dentro de los dominios de interés. Además, se asumen las condiciones iniciales $F(\cdot)|_{t=0} = 0$, y $\dot{F}_i(\cdot)|_{t=0} = 0$.

Hipótesis C2. La salida $y_i = \chi_{i1}$, dado $i = 1, 2$; y sus derivadas hasta 4º orden están acotadas.

Entonces, el siguiente sistema

$$O_i : \begin{cases} \dot{z}_{i1} &= z_{i2} - \beta_{i1} \text{fal}(\hat{e}_{i1}(t), \hat{\gamma}_{i1}, \hat{\delta}_i), \\ \dot{z}_{i2} &= z_{i3} - \beta_{i2} \text{fal}(\hat{e}_{i1}(t), \hat{\gamma}_{i2}, \hat{\delta}_i) + b_{0i} u_i, \\ \dot{z}_{i3} &= -\beta_{i3} \text{fal}(\hat{e}_{i1}(t), \hat{\gamma}_{i3}, \hat{\delta}_i), \quad i = 1, 2. \end{cases} \quad (5.1.4)$$

es un observador que estima los estados no medibles de (5.1.18), donde $\hat{e}_{ij}(t) = \chi_{ij} - z_{ij}$ dado $j = 1, 2, 3$; es el error de estimación, $\beta_i = (\beta_{i1}, \beta_{i2}, \beta_{i3})^T$ son las ganancias del observador y $Z_i = (z_{i1}, z_{i2}, z_{i3})^T$, para $i = 1, 2$; es el vector de estados estimados para cada subsistema (5.1.18). $\hat{\gamma}$ y $\hat{\delta}$ son parámetros de diseño. La ganancia $\text{fal}(\cdot)$ del observador está definida por la ecuación 4.2.3, dicha función acelera la convergencia de las señales.

Estabilidad del Sistema en Lazo Cerrado con el Controlador-Observador

En el capítulo 3, el controlador se ha diseñado considerando que los estados son medibles. Sin embargo, en la práctica no es posible medir todos los estados del sistema, por lo cual se sustituyen por los estados estimados por el observador los cuales se aproximan a los estados reales del sistema. Con el fin de garantizar el buen desempeño del esquema Controlador-Observador, es necesario presentar un análisis del sistema en lazo cerrado.

Considérese los subsistemas (2.1.5), donde el control depende de los estados estimados

$$\dot{\chi}_i = \mathcal{F}_i(\chi_i) + \mathcal{G}_i u_i(Z_i) \quad (5.1.5)$$

donde $\mathcal{F}_i(\chi_i) = (\chi_{i2}, F_i(\chi_i))^T$ y $\mathcal{G}_i = (0, b_i)^T$, para $i = 1, 2$.

Agregando el término $\pm \mathcal{G}_i u_i(\chi_i)$ a (5.1.5), el sistema puede representarse como

$$\dot{\chi}_i = \mathcal{F}_i(\chi_i) + \mathcal{G}_i u_i(\chi_i) + \mathcal{G}_i [u_i(Z_i) - u_i(\chi_i)], \quad i = 1, 2. \quad (5.1.6)$$

Considerando la superficie deslizante (5.1.1), las derivadas de las variables deslizantes $s = (s_1, s_2)^T$ pueden escribirse como

$$\dot{s} = \mathcal{A}(\chi) + \mathcal{B}(\chi)u(\chi) + \Gamma(\epsilon) \quad (5.1.7)$$

donde $\mathcal{A}(\chi) = [a_1(\chi_1, t), a_2(\chi_2, t)]^T$, $\mathcal{B}(\chi) = \text{diag}[b_1(\chi_1), b_2(\chi_2)]$, $\Gamma(\epsilon) = [\Gamma_1(\epsilon_1), \Gamma_2(\epsilon_2)]^T$, $a_i(\chi_i, t) = \frac{\partial s_i}{\partial t} + \frac{\partial s_i}{\partial \chi_i} \mathcal{F}_i(\chi_i)$, $b_i(\chi_i, t) = \frac{\partial s_i}{\partial \chi_i} \mathcal{G}_i$. $u(\chi) = (u_1(\chi_1), u_2(\chi_2))^T$, $\Gamma_i(\epsilon) = b_i(\chi_i) [u_i(Z_i) - u_i(\chi_i)]$. Además, $\Gamma_i(\epsilon)$ para $i = 1, 2$; depende de los estimados $\epsilon_i = Z_i - \chi_i$, dado $i = 1, 2$; y tomando en cuenta el Teorema 3.3.1, están acotados.

Por otro lado, los términos $a_i(\chi_i, t)$ y $b_i(\chi_i, t)$, $i = 1, 2$ satisfacen las hipótesis B3 y B4. Entonces, bajo éstas hipótesis, el sistema (5.1.7) en lazo cerrado con el control (3.2.2)-(3.3.1) esta dado por

$$\begin{aligned} \dot{s}_i &= -\kappa_{1i} |s_i|^{1/2} \text{sign}(s_i) + v_i + \Gamma_i(\epsilon_i), \\ \dot{v}_i &= -\kappa_{2i} \text{sign}(s_i), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

donde $\kappa_{1i} = K_{1i} b_i$, $\kappa_{2i} = \frac{K_{2i}}{2} b_i$. K_{1i} y K_{2i} , denotan las ganancias del controlador para el i -ésimo subsistema, *i.e.* subsistemas Cabeceo y Guiñada, respectivamente.

Mediante el siguiente cambio de variable $\xi_i = (|s_i|^{1/2} \text{sign}(s_i), v_i + a_i(\chi_i, t))^T$, el sistema

(5.1.5) está dado por

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_{i1} &= -\frac{1}{2|s_i|^{1/2}}\{\kappa_{1i}b_i(\chi_i, t)\xi_{i1} + \xi_{i2} + \Gamma_i(\epsilon_i)\}, \\ \dot{\xi}_{i2} &= -\frac{1}{2|s_i|^{1/2}}\{\kappa_{2i}\xi_{i1} + \dot{a}_i(\chi_i, t)\}, \quad i = 1, 2.\end{aligned}\tag{5.1.9}$$

Considerando la siguiente función de Lyapunov

$$V_i = \xi_i^T \bar{P}_i \xi_i, \quad \text{donde} \quad \bar{P}_i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4\kappa_{2i} + \kappa_{1i}^2 & -\kappa_{1i} \\ -\kappa_{1i} & 2 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2.\tag{5.1.10}$$

Así, la derivada de la función de Lyapunov (5.1.10) esta dada por

$$\dot{V}_i = -\frac{1}{|s_i|^{1/2}}\xi_i^T Q_i \xi_i + \frac{\Gamma_i(\epsilon_i)}{|s_i|^{1/2}}q_{1i}^T \xi_i, \quad i = 1, 2;\tag{5.1.11}$$

donde

$$Q_i = \frac{\kappa_{1i}}{2} \begin{pmatrix} 2\kappa_{2i} + \kappa_{1i}^2 & -\kappa_{1i} \\ -\kappa_{1i} & 1 \end{pmatrix}, \quad q_{1i} = \begin{pmatrix} 2\kappa_{2i} + \frac{1}{2}\kappa_{1i}^2 \\ -\frac{1}{2}\kappa_{1i} \end{pmatrix}$$

De acuerdo al procedimiento definido en [34], el término $\Gamma_i(s_i, \epsilon_i)$ se considera globalmente acotado, *i.e.*

$$|\Gamma_i| \leq \rho_i |s_i|^{1/2}, \quad \rho_i > 0, \quad i = 1, 2.$$

Entonces, se tiene

$$\dot{V}_i \leq -\frac{\kappa_{1i}}{2|s_i|^{1/2}}\xi_i^T \tilde{Q}_i \xi_i, \quad i = 1, 2.\tag{5.1.12}$$

donde

$$\tilde{Q}_i = \begin{pmatrix} 2\kappa_{2i} + \kappa_{1i}^2 - \left(\frac{4\kappa_{2i}}{\kappa_{1i}}\right)\rho_i & -\kappa_{1i} + 2\rho_i \\ -\kappa_{1i} + 2\rho_i & 1 \end{pmatrix}.$$

De esta forma, si el controlador satisface las siguientes condiciones

$$\kappa_{1i} > 2\rho_i, \quad \kappa_{2i} > \kappa_{1i} \frac{5\rho_i \kappa_{1i} + 4\rho_i^2}{2(\kappa_{1i} - 2\rho_i)} \quad i = 1, 2.\tag{5.1.13}$$

De acuerdo al Teorema 3.3.1 y considerando la convergencia asintótica de los términos Γ_i , se puede seleccionar K_{1i} de tal forma que satisfaga las siguiente condición

$$K_{1i} > 2b_i \rho_i, \quad \frac{K_{2i}}{2} > K_{1i} \frac{5\rho_i \kappa_{1i} + 4\rho_i^2}{2(\kappa_{1i} - 2\rho_i)}, \quad i = 1, 2\tag{5.1.14}$$

Dado que $\tilde{Q}_i > 0$, implica que la derivada de la función de Lyapunov (5.1.10) es definida negativa. \diamond

5.1.3 Diferenciador por Modos Deslizantes de Alto Orden

Si se considera que el ángulo de ataque de las hélices es pequeño, se puede obtener un modelo reducido y simplificado del sistema completo (2.1.1), reduciendo además el orden de derivación para la estimación de la dinámica desconocida. Además, considerando que los ángulos de cabeceo y guiñada se encuentran desacoplados, la representación en espacio de estados del helicóptero de 2-GDL, incluyendo la dinámica de los rotores, puede representarse como

$$\begin{cases} \Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 &= F_v + k_{Fv}x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{I_v}(u_v - \frac{1}{k_{Hv}}x_2), \\ y_1 &= x_1 \end{cases} \\ \Sigma_2 : \begin{cases} \dot{x}_3 &= F_h + k_{Fh}x_4, \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{I_h}(u_h - \frac{1}{k_{Hh}}x_4), \\ y_2 &= x_2 \end{cases} \end{cases} \quad (5.1.15)$$

donde $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [\theta, \omega_v, \psi, \omega_h]^T$ representa el vector de estado del sistema completo. Tomando en consideración la naturaleza del sistema, similar al sistema (2.1.2), la descomposición en subsistemas es directa: el primer subsistema $\Sigma_1(\theta, \omega_v)$ consiste en la hélice mayor que controla la rotación alrededor del eje horizontal. El segundo subsistema $\Sigma_2(\psi, \omega_h)$ se compone por la hélice menor la cual controla la rotación alrededor del eje vertical. u_h, u_v , denotan los voltajes de entrada a los rotores secundario y principal, respectivamente. Además, F_v, F_h son términos acotados pero desconocidos, los cuales contienen información acerca de la velocidad angular. I_v, I_h , representa el momento de inercia de los rotores, mientras que k_{Hh}, k_{Hv} corresponde al coeficiente de velocidad de los rotores. k_{Fv}, k_{Fh} denota el coeficiente de empuje de los rotores.

Ahora bien, reordenando(5.1.15), el modelo dinámico del helicóptero de 2-GDL puede representarse mediante el siguiente sistema MIMO en la forma singularmente perturbada

$$\dot{\chi}_i = F_i + \mathbf{h}_i \zeta_i, \quad (5.1.16a)$$

$$\mu_i \dot{\zeta}_i = \bar{\mathbf{h}}_i \zeta_i + u_i, \quad (5.1.16b)$$

$$y_i = \chi_i \quad i = 1, 2, \quad (5.1.16c)$$

donde χ_i representa el vector de estado del subsistema lento (5.1.16a) tal que $\chi_1 = \theta$, $\chi_2 = \psi$, mientras que $\zeta_1 = \omega_v$ y $\zeta_2 = \omega_h$ corresponden al vector de estado del subsistema rápido (5.1.16b) con $\mu_1 = I_v$, $\mu_2 = I_h$. Además, $u_1 = u_v$, $u_2 = u_h$, $F_1 = F_v$, $F_2 = F_h$, $\mathbf{h}_1 = k_{Fv}$, $\mathbf{h}_2 = k_{Fh}$, $\bar{\mathbf{h}}_1 = -1/k_{Hv}$ y $\bar{\mathbf{h}}_2 = -1/k_{Hh}$.

A partir de la hipótesis A2, y seleccionando $\mu_i = 0, i = 1, 2$, la dinámica del subsistema rápido (5.1.16b) se vuelve instantánea *i.e.* $0 = \bar{\mathbf{h}}_i \zeta_i + u_i, i = 1, 2$. Resolviendo para ζ_i y substituyendo en la ecuación (5.1.16a), se obtiene el modelo reducido *Dinámica lenta*

$$\Sigma_i : \begin{cases} \dot{\chi}_i = F_i + b_i u_i, \\ y_i = \chi_i \quad i = 1, 2, \end{cases} \quad (5.1.17)$$

donde $b_1 = \mathbf{h}_1 \bar{\mathbf{h}}_1, b_2 = \mathbf{h}_2 \bar{\mathbf{h}}_2$ y $F_i(\cdot)$ incluye dinámicas desconocidas, incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas, para cada subsistema. u_i representa el voltaje de entrada al motor, mientras que b_i son constantes positivas.

Entonces, con el propósito de diseñar un observador para estimar las velocidades angulares $\dot{\theta}, \dot{\psi}$ y los términos F_i de los subsistemas (Σ_1, Σ_2) , los subsistemas (5.1.17) son extendidos de la siguiente forma

$$\tilde{\Sigma}_i : \begin{cases} \dot{\chi}_{i1} = \chi_{i2} + b_{i0} u_i, \\ \dot{\chi}_{i2} = \eta_i(\chi), \\ y = \chi_{i1}, \quad i = 1, 2. \end{cases} \quad (5.1.18)$$

donde b_{0i} representa el valor nominal b_i , dado $b_i = b_{0i} + \Delta b_i$ y los estados adicionales $\chi_{i2} =$

$F_i(\chi_i) + \frac{\Delta b_i}{b_{i0}} u_i$, estiman la perturbacion total de cada subsistema.

Hipótesis D1. $F_i(\cdot)$, u_i y sus derivadas $\eta_i(\cdot) = \dot{F}_i(\chi_i) + \frac{\Delta b_i}{b_{i0}} \dot{u}_i$, $i = 1, 2$; son localmente Lipschitz en sus argumentos y acotadas dentro de su dominio de interés. Además, se asumen condiciones iniciales $F(\cdot)|_{t=0} = 0$, y $\dot{F}_i(\cdot)|_{t=0} = 0$.

Hipótesis D2. La salida $y = \chi_{i1}$, para $i = 1, 2$; y sus derivadas hasta el 3 – er orden son acotadas.

Entonces, de acuerdo a (4.3.1), el diferenciador homogéneo para (5.1.18) esta dado por

$$O_i : \begin{cases} \dot{z}_{i0} &= \nu_0 \\ \nu_{i0} &= -\lambda_{i3} L^{1/3} |z_{i0} - \sigma_i|^{2/3} \text{sign}(z_{i0} - \sigma_i) + z_{i1} \\ &+ b_{i0} u_i \\ \dot{z}_{i1} &= \nu_{i1} \\ \nu_{i1} &= -\lambda_{i2} L^{1/2} |z_{i1} - \nu_{i0}|^{1/2} \text{sign}(z_{i1} - \nu_{i0}) + z_{i2} \\ \dot{z}_{i2} &= -\lambda_{i1} L_i \text{sign}(z_{i2} - \nu_{i1}), \quad i = 1, 2. \end{cases} \quad (5.1.19)$$

donde $\hat{e}_{ij}(t) = \chi_{ij} - z_{ij}$ para $j = 1, 2$; es el error de estimación y $Z_i = (z_{i0}, z_{i1})^T$, para $i = 1, 2$; es el vector de estados estimados para cada subsistema (5.1.18).

Proposición 1. Considérese el sistema (5.1.15) reescrito de la forma (5.1.17), además considérense satisfechas las Hipótesis A1-A2 para cada subsistema. Entonces, bajo estas consideraciones, el sistema (5.1.17) en lazo cerrado con el control adaptivo super twisting (3.2.2)-(3.3.1), empleando los estimados obtenidos mediante el diferenciador (4.3.1), garantiza que las trayectorias del sistema (5.1.15) convergen en tiempo finito a las señales de referencia (θ^*, ψ^*) .

Nota 2: Dado que el observador converge en tiempo finito, la ley de control y el observador pueden diseñarse por separado, *i.e.*, se satisface el principio de separación. De esta forma, si se sabe que el controlador estabiliza el proceso entonces se asegura la estabilización del sistema en lazo cerrado cuando las dinámicas del diferenciador son lo suficientemente rápidas para proveer una evaluación exacta de los modos $\sigma, \dot{\sigma}$.

5.2 Conclusiones

En el presente capítulo se abordaron los esquemas de control basados en Super Twisting Adaptivo, empleando los estados estimados mediante un Observador No Lineal de Estado Extendido y mediante un Diferenciador Robusto.

Como una aportación del presente trabajo, la estabilidad del sistema en lazo cerrado del controlador ASTA con el observador NESO quedó demostrada. Por otro lado, debido a la convergencia en tiempo finito del diferenciador robusto, el principio de separación resulta satisfecho, por lo que se puede diseñar de forma independiente el controlador y observador.

En el siguiente capítulo se abordará la validación experimental y en simulación de los esquemas de control propuestos.

Capítulo 6

Resultados experimentales y de simulación

6.1 Control del Helicóptero de 2-GDL

Con el fin de ilustrar la validez del esquema de control propuesto, en esta sección se proveen los resultados experimentales obtenidos en la plataforma Two-Rotor Aerodynamical System[©] (TRAS) (Fig. 6.1), la cual recrea el comportamiento de un helicóptero de 2-GDL.



Figura 6.1: Plataforma experimental de dos rotores.

La plataforma experimental TRAS interactúa con un ordenador externo a través de un sistema de adquisición de datos RT-DAC4/USB. Los algoritmos de control y estimación se desarrollan en el entorno MATLAB/Simulink[®], mientras que el código ejecutable asociado es generado automáticamente mediante la herramienta de Simulink RTW/RTWI. Durante los experimentos se seleccionó un período de muestreo de $0.01s$, empleando el método de integración de ecuaciones diferenciales Dormand-Prince. Las señales de control se encuentran normalizadas, tomando valores en el rango de $[-1, +1]$, los cuales corresponden a un voltaje entre $[-24V, +24V]$. Además, las señales de control han sido saturadas en el rango de $[0.2, 1]$ para el control del ángulo de cabeceo y $[-0.3, 0.3]$ para el ángulo de guiñada. Dichos valores son los recomendados por el fabricante. Para mayor información acerca de la plataforma se puede consultar ([3]).

En un primer experimento, se seleccionó para el ángulo vertical una trayectoria sinusoidal de 0.2 rad de amplitud y una frecuencia de $1/60\text{Hz}$. Por otro lado, para el ángulo horizontal se escogió una señal cuadrada de 0.4 rad de amplitud y $1/50\text{Hz}$ de frecuencia. Se consideran las señales de referencia propuestas por el fabricante, dado que se aproximan a una trayectoria de vuelo real. Para un segundo experimento (Fig. 6.2), se añadió un peso extra de 25% sobre el rotor principal a los 20 segundos después del inicio del experimento, i.e. se añadieron 15 gramos para observar el desempeño ante tal variación.

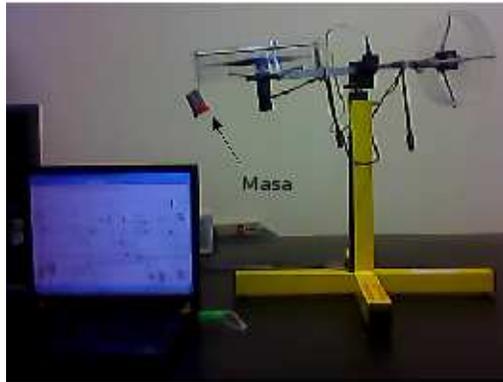


Figura 6.2: Masa añadida a la plataforma TRAS para el caso perturbado.

6.1.1 Control ASTA basado en Observador No Lineal Extendido.

Con el objetivo de comparar el desempeño del esquema ASTA+NESO, se probaron sobre la plataforma experimental un controlador PID cruzado y el algoritmo Super Twisting (STA) con ganancia fija, empleando los estimados del NESO.

Los parámetros del controlador y observador se muestran en las Tablas 6.1 - 6.2. Con respecto a los parámetros del control: ω_i , l_i , ϵ_{*I} y γ_i se seleccionaron como valores positivos seleccionados entre 0 y 1. λ_i , es un valor positivo relacionado con la acción derivativa de la superficie deslizante. Concerniente a los parámetros del observador: $\hat{\delta}_i$ y $\hat{\gamma}_{ij}$, $i = 1, 2; j = 1, 2, 3$; son escogidos arbitrariamente entre 0 y 1. b_{0i} está relacionado con la constante de tiempo de conjunto motor-hélice. β_{ij} , $i = 1, 2; j = 1, 2, 3$; están seleccionados de acuerdo a (4.2.4), donde $\hat{\omega}_i$, $i = 1, 2$; son seleccionados en base a un compromiso entre velocidad de convergencia y sensibilidad al ruido. Finalmente, los parámetros l_{ij} , $i = 1, 2; j = 1, 2, 3$; se seleccionaron como $l_{i1} = 3$, $l_{i2} = 3$ y $l_{i3} = 1$, $i = 1, 2$.

Subsistema	$\hat{\gamma}_{i1}$	$\hat{\gamma}_{i2}$	$\hat{\gamma}_{i3}$	$\hat{\delta}_i$	b_{0i}	β_{i1}	β_{i2}	β_{i3}
Cabeceo (i=1)	0.5	0.35	0.25	0.15	0.001	67.5	1518.8	11391
Guiñada (i=2)	0.5	0.35	0.25	0.1	0.005	30	300	1000

Tabla 6.2: Parámetros del observador extendido de la plataforma TRAS.

Subsistema	ω_i	λ_i	μ_i	γ_i	ϵ_{*i}
Cabeceo (i=1)	0.1	1	0.1	0.1	0.1
Guiñada (i=2)	0.1	3	0.1	0.1	0.1

Tabla 6.1: Parámetros del controlador ASTA basado en NESO aplicado a la plataforma TRAS.

Caso Nominal

La respuesta del sistema puede observarse en la Figura 6.3, se puede apreciar que las dinámicas de acoplamiento han sido compensadas por el esquema de control propuesto.

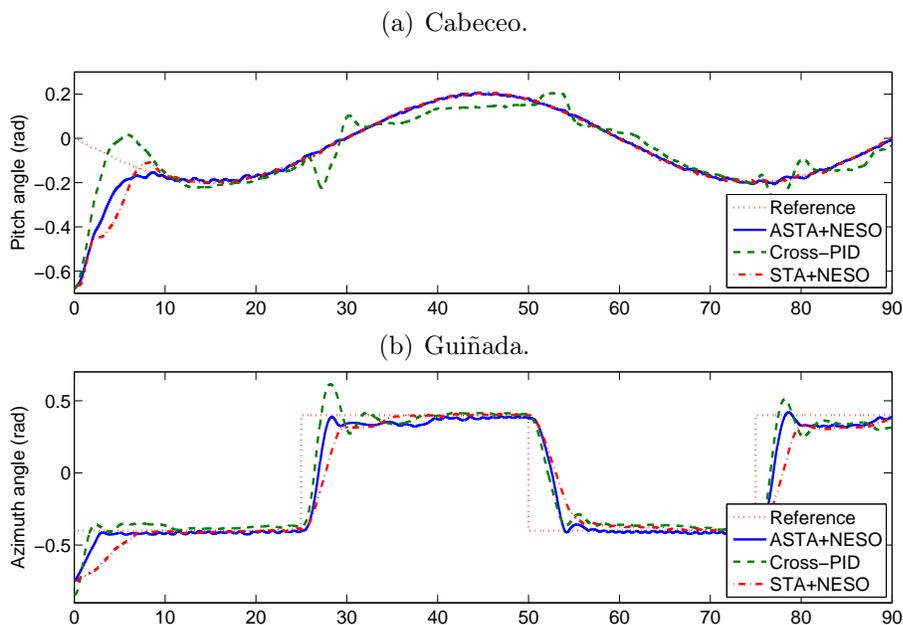


Figura 6.3: Respuesta angular del controlador ASTA basado en NESO aplicado a la plataforma TRAS (Caso Nominal).

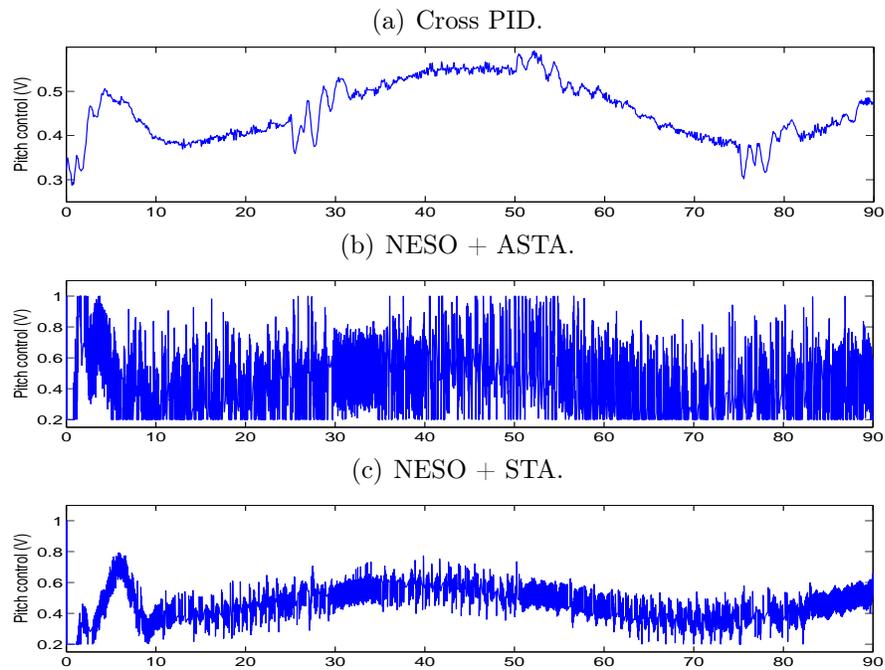


Figura 6.4: Señal del control ASTA basado en NESO para el rotor principal de la plataforma TRAS (Caso Nominal).

Las señales de control aplicadas al sistema se pueden apreciar en las Figuras 6.4 - 6.5, aunque el esquema propuesto demanda mayor energía, presenta el mejor desempeño. A pesar de la naturaleza de las señales de control, éstas se ven atenuadas por la dinámica de los rotores, como puede verse en la velocidad resultante en las Figuras 6.6 - 6.7.

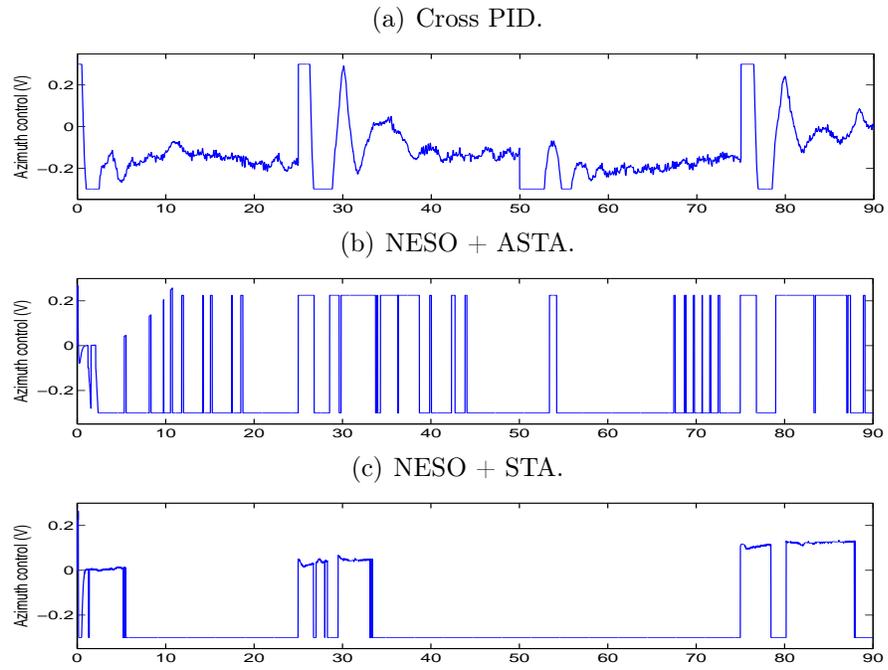


Figura 6.5: Señal del control ASTA basado en NESO para el rotor secundario de la plataforma TRAS (Caso Nominal).

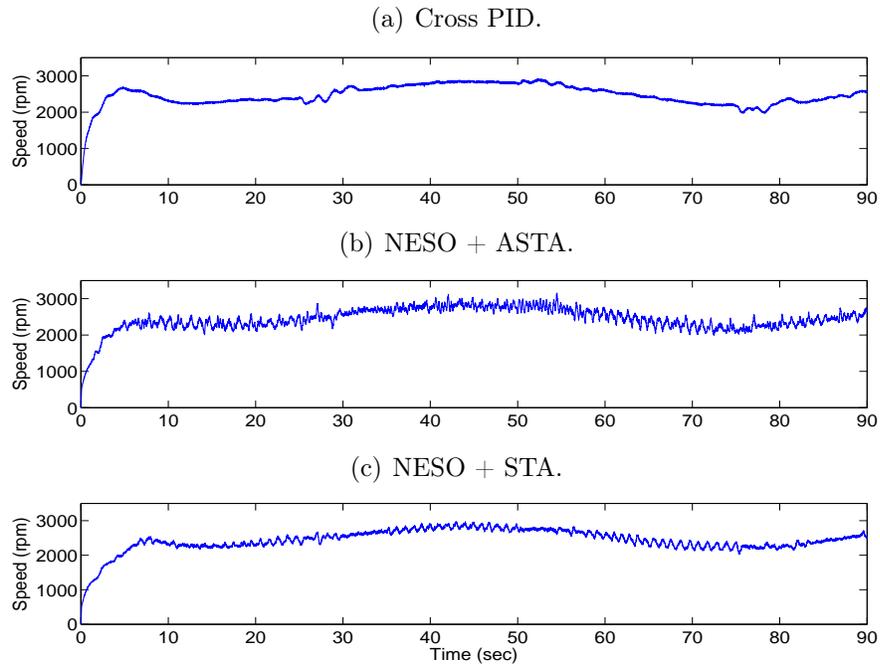


Figura 6.6: Velocidad del rotor principal de la plataforma TRAS, mediante la aplicación del controlador ASTA basado en NESO (Caso Nominal).

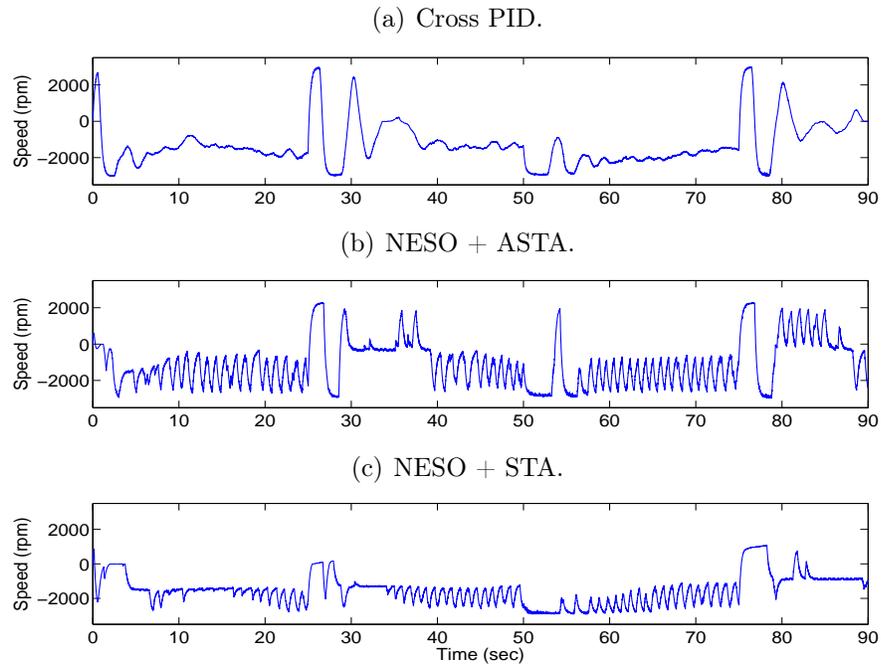


Figura 6.7: Velocidad del rotor secundario de la plataforma TRAS, mediante la aplicación del controlador ASTA basado en NESO (Caso Nominal).

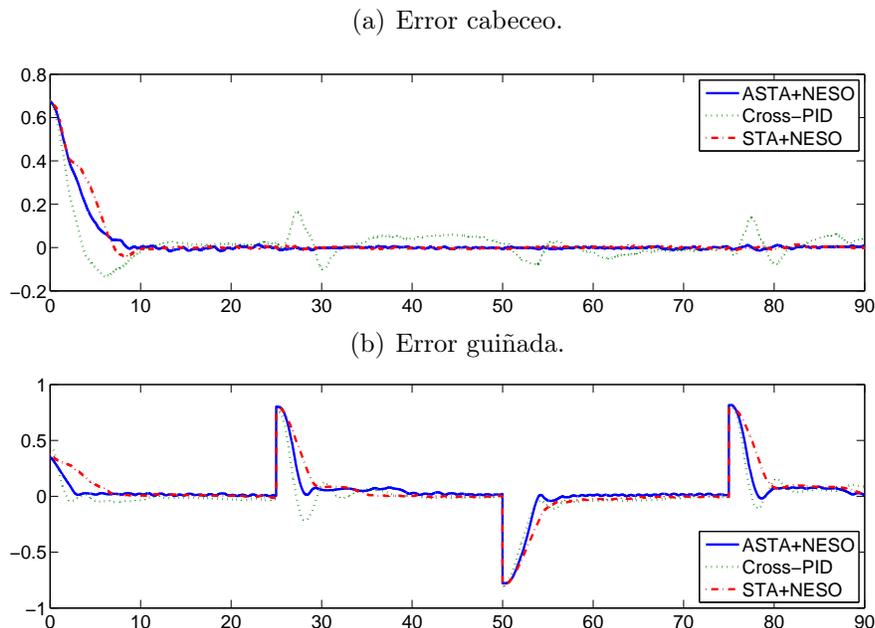


Figura 6.8: Error de seguimiento de la plataforma TRAS para el controlador ASTA basado en NESO (Caso Nominal).

Un comparativo de los errores de seguimiento se muestra en la Figura 6.8, donde se puede ver que el esquema ASTA + NESO presenta el menor error.

Adicionalmente, la Figura 6.9 muestra la evolución de los valores de la ganancia adaptativa, a partir de un valor de inicialización dado, las ganancias alcanzan valores mas apropiados. Mientras que para el resto de las gráficas la escala de tiempo se mantuvo en 90 segundos, para observar más fácilmente los detalles de las respuestas; para las gráficas de las ganancias del controlador la escala de tiempo se ha extendido con el fin de mostrar la convergencia. Diferentes índices de desempeño presentes en la Tabla 6.3, ilustran el comportamiento del esquema ASTA+NESO.

	MSE	ITAE	$\ u\ _2$
Control cabeceo			
NESO + ASTA	0.009	1916.645	47.284
Cross-PID	0.009	14126.229	43.566
NESO + STA	0.011	1947.061	44.712
Control guiñada			
NESO + ASTA	0.038	37010.961	26.288
Cross-PID	0.032	36919.345	17.175
NESO + STA	0.051	47395.427	24.971

Tabla 6.3: Desempeño de los controladores aplicados a la plataforma experimental TRAS, mediante la aplicación del controlador ASTA basado en NESO (Caso Nominal).

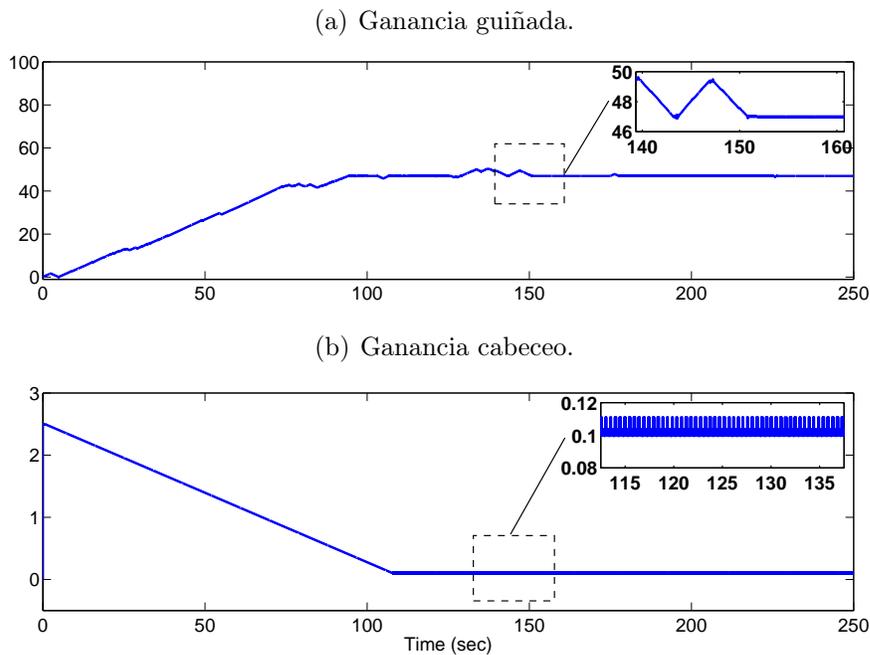


Figura 6.9: Ganancias del controlador ASTA basado en NESO aplicado a la plataforma TRAS (Caso Nominal).

Caso Perturbado

La respuesta angular del sistema sometido al incremento de peso se puede observar en la Figura 6.10. Resulta evidente que en el caso del ángulo vertical, el control PID cruzado no logra compensar la perturbación y por lo tanto no alcanza la referencia. Por otro lado, los esquemas basados en Super Twisting + NESO logran el seguimiento de las trayectorias de referencia para ambos ángulos durante todo el experimento.

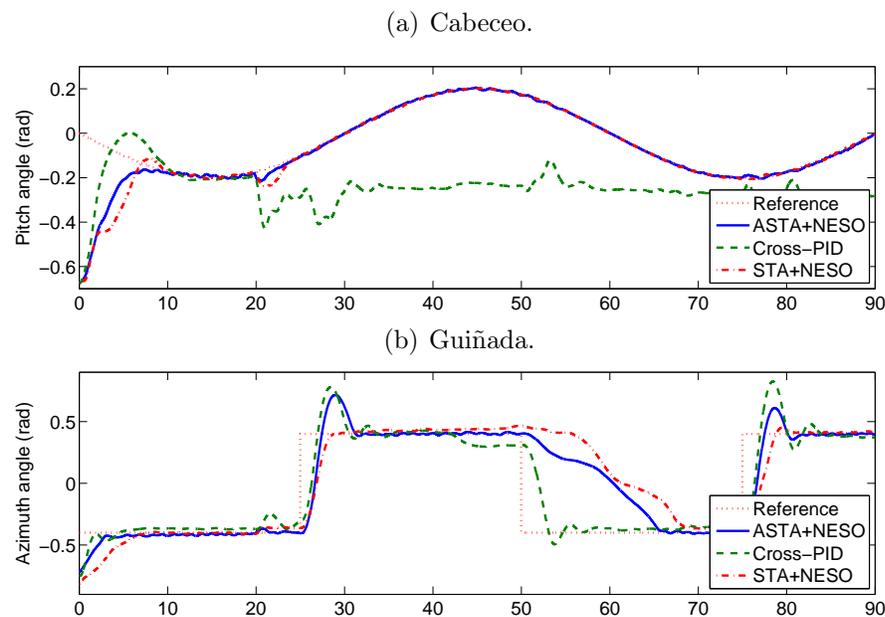


Figura 6.10: Respuesta angular del controlador ASTA basado en NESO aplicado a la plataforma TRAS (Caso Perturbado).

Con el fin de prevenir daños en la plataforma, las salidas de control están saturadas, como se puede observar en las Figuras 6.11 - 6.12. La saturación impide rechazar más rápidamente la perturbación, lo cual se puede apreciar en la respuesta del ángulo de guiñada.

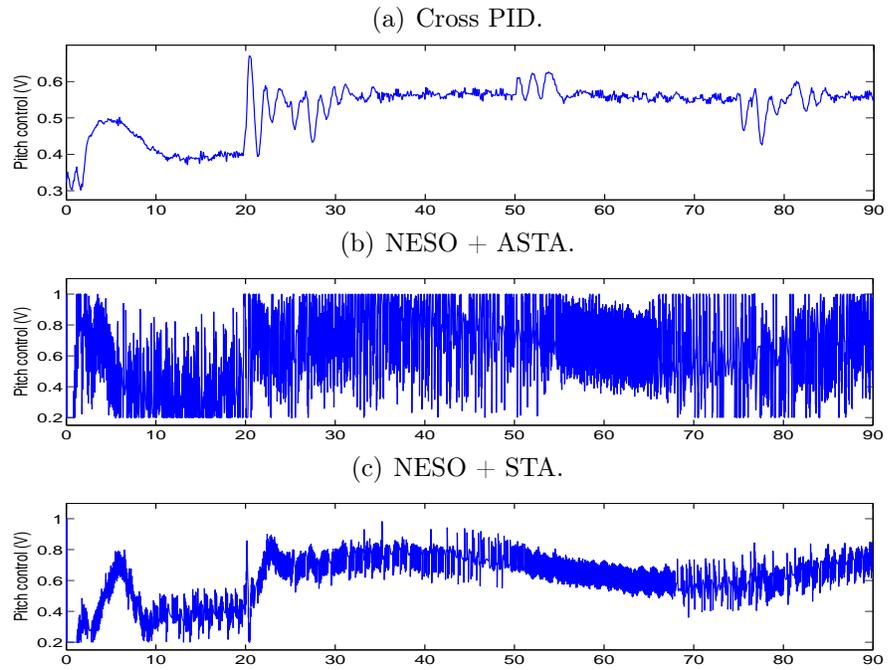


Figura 6.11: Señal del control ASTA basado en NESO aplicado al rotor principal de la plataforma TRAS (Caso Perturbado).

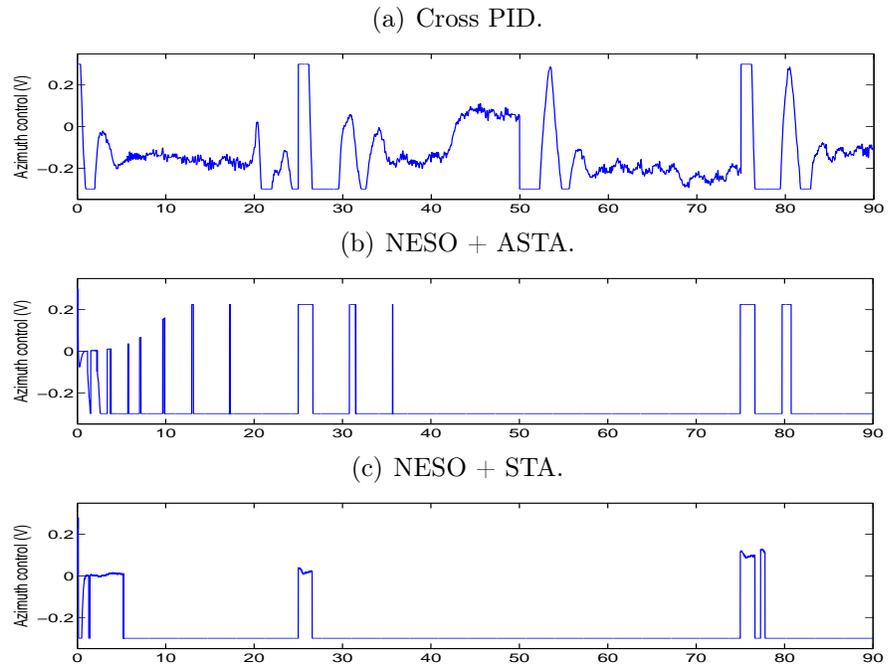


Figura 6.12: Señal del control ASTA basado en NESO aplicado al rotor secundario de la plataforma TRAS (Caso Perturbado).

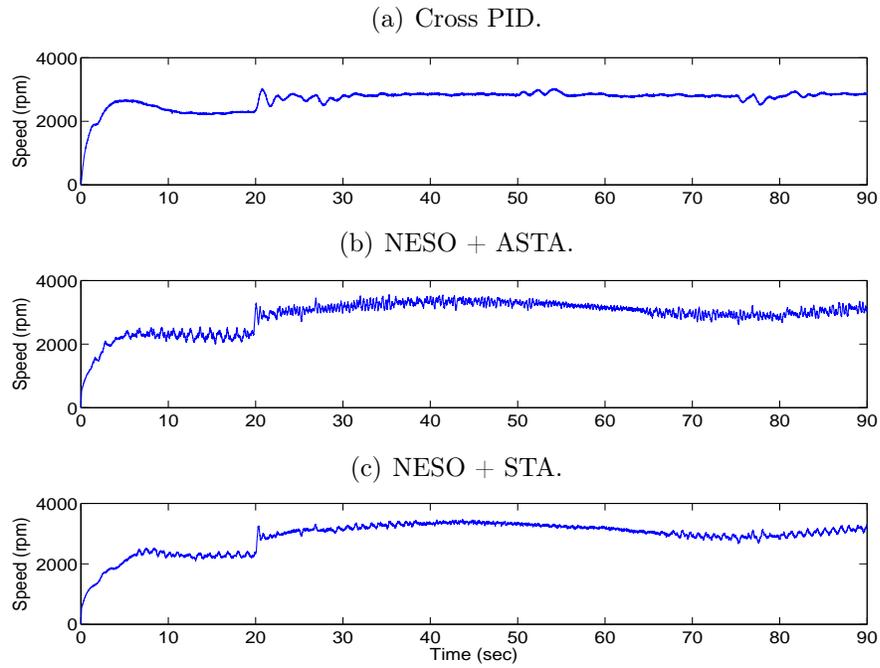


Figura 6.13: Velocidad del rotor principal de la plataforma TRAS, mediante la aplicación del controlador ASTA basado en NESO (Caso Perturbado).

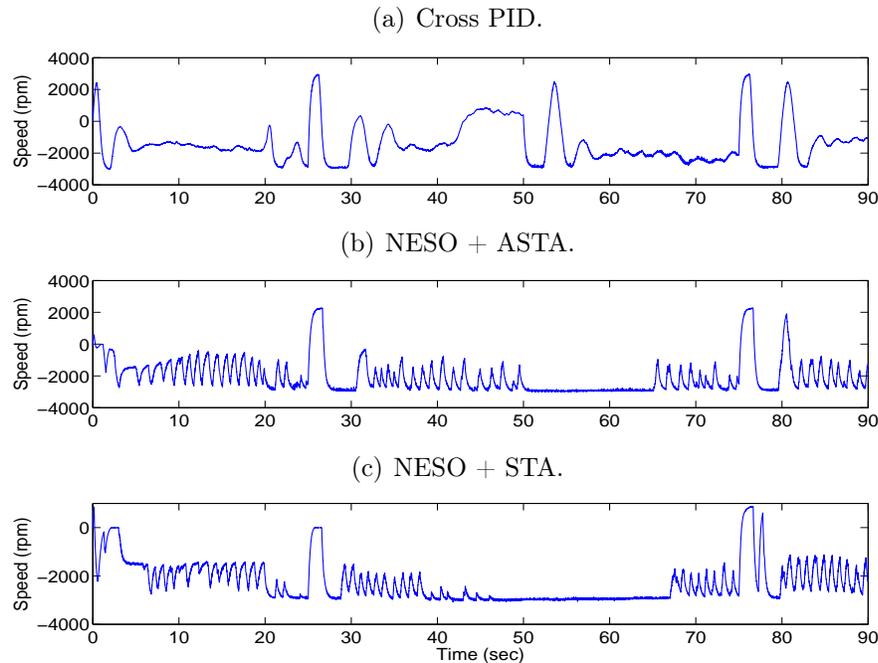


Figura 6.14: Velocidad rotor secundario de la plataforma TRAS, mediante la aplicación del controlador ASTA basado en NESO (Caso Perturbado).

La dinámica de los rotores atenúa la respuesta de las señales de control, como se puede apreciar en las Figuras 6.13 - 6.14.

Dado que el control PID cruzado es incapaz de manejar el incremento de peso, presenta un gran error de seguimiento, como se puede observar en el comparativo de los errores de seguimiento para el caso perturbado mostrado en la Figura 6.15.

Las ganancias adaptativas del controlador ASTA contribuyen a rechazar la perturbación aplicada al helicóptero de 2-GDL. En la Figura 6.16 se puede observar el comportamiento de dichas ganancias, donde se puede apreciar su convergencia gracias a la escala de tiempo extendida.

Conforme a los índices de desempeño mostrados en la Tabla 6.4, el esquema propuesto presenta el mejor desempeño entre los controladores probados.

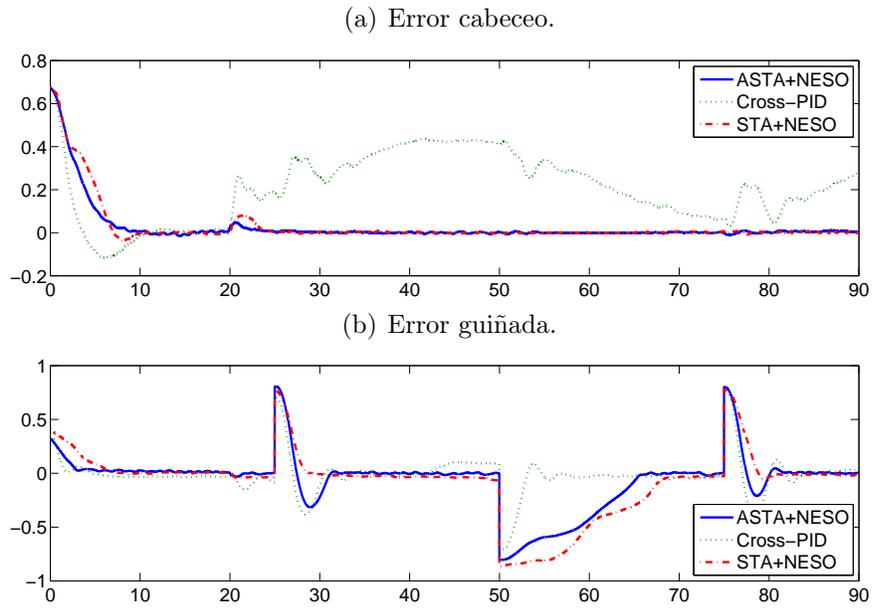


Figura 6.15: Error de seguimiento de la plataforma TRAS para la aplicación del controlador ASTA basado en NESO (Caso Perturbado).

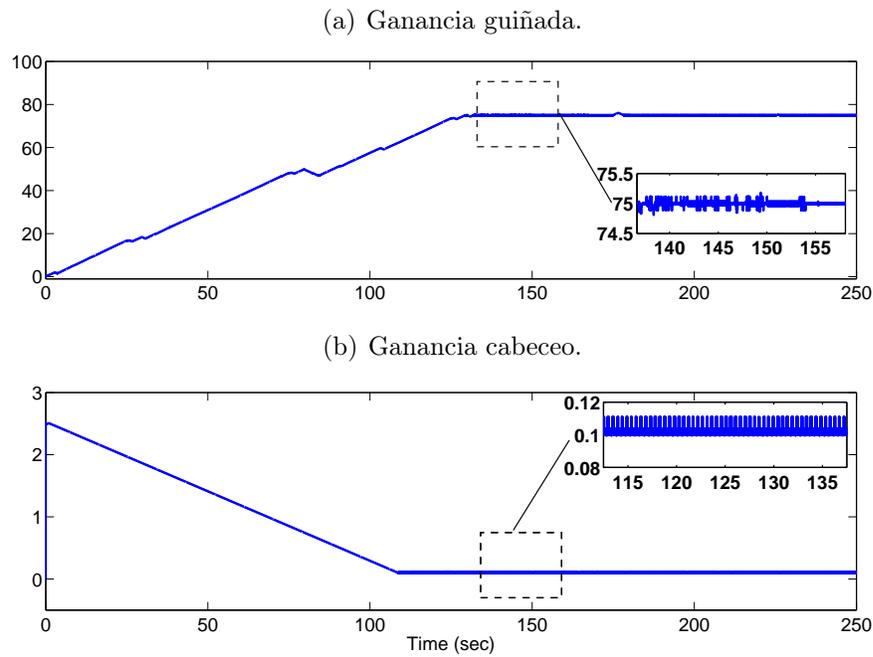


Figura 6.16: Ganancias del controlador ASTA basado en NESO aplicado a la plataforma TRAS (Caso Perturbado).

	MSE	ITAE	$\ u\ _2$
Control cabeceo			
NESO + ASTA	0.009	1963.227	64.207
Cross-PID	0.067	89474.449	50.119
NESO + STA	0.012	1971.801	59.954
Control guiñada			
NESO + ASTA	0.070	62079.431	27.598
Cross-PID	0.031	40080.065	18.817
NESO + STA	0.100	81159.385	27.152

Tabla 6.4: Desempeño del controlador ASTA basado en NESO aplicado a la plataforma TRAS (Caso Perturbado).

6.1.2 Control ASTA basado en Diferenciador Robusto.

En la presente sección se plantea el uso del controlador ASTA, empleando los estados estimados mediante un diferenciador robusto [28], basados en el modelo del sistema (5.1.15). Los parámetros de controlador y diferenciador se pueden ver en las tablas 6.5 - 6.6, respectivamente. Además del esquema de control ASTA, se probó un controlador PID cruzado para fines comparativos.

	ω_i	λ_i	ι_i	γ_i	ϵ_{*i}
Cabeceo (i=1)	0.075	1.1	0.001	0.1	0.1
Guiñada (i=2)	1.1	2	0.001	0.1	0.01

Tabla 6.5: Parámetros del controlador ASTA basado en diferenciador robusto aplicado a la plataforma TRAS.

	λ_{i1}	λ_{i2}	λ_{i3}	L_i
Cabeceo (i=1)	3.0	10	0.1252	250
Guiñada (i=2)	3.0	10	0.1252	100

Tabla 6.6: Parámetros del diferenciador robusto de la plataforma TRAS.

Caso Nominal

En la Figura 6.17 se puede apreciar la respuesta angular del sistema, resulta evidente que ambos controladores logran compensar las dinámicas de acoplamiento, teniendo una mejor respuesta el esquema propuesto.

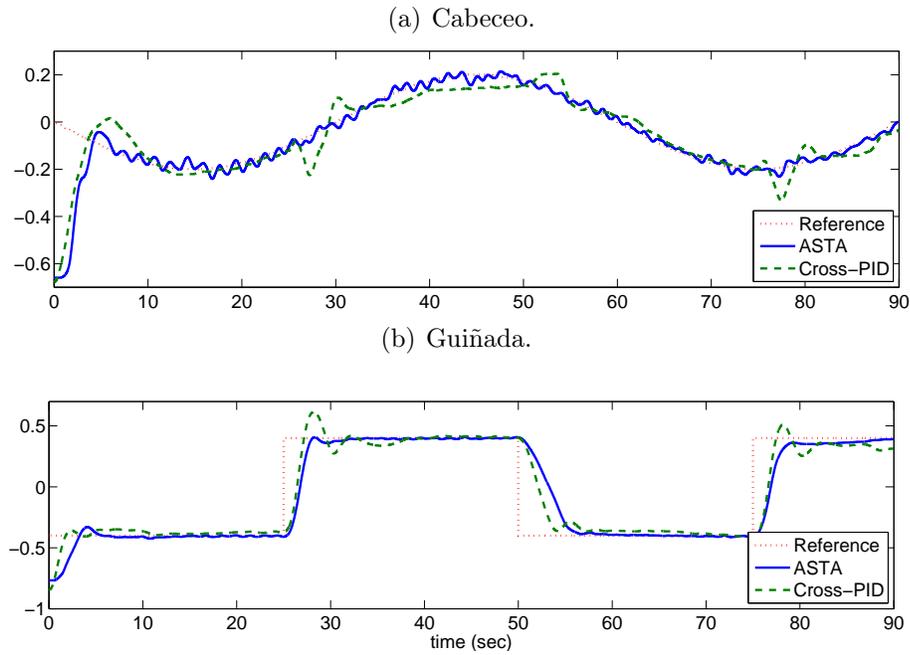


Figura 6.17: Respuesta angular del controlador ASTA basado en diferenciador robusto aplicado a la plataforma TRAS (Caso Nominal).

Cabe destacar que el control propuesto demanda menor esfuerzo de control, como se puede observar en las señales de control mostradas en la Figura 6.18 y la velocidad resultante de los rotores (Fig. 6.19).

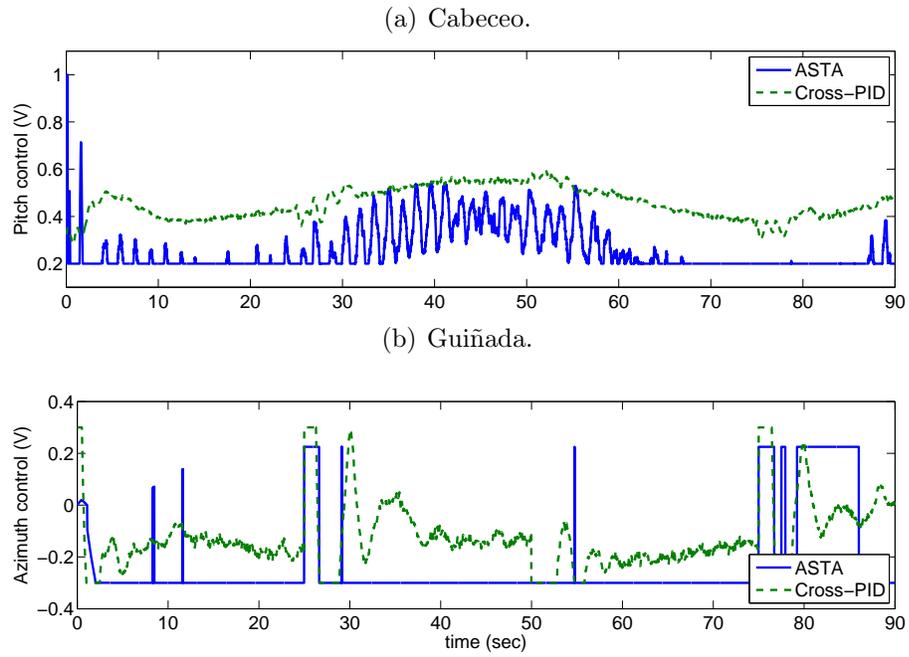


Figura 6.18: Señales del controlador ASTA basado en diferenciador robusto, aplicadas a la plataforma TRAS (Caso Nominal).

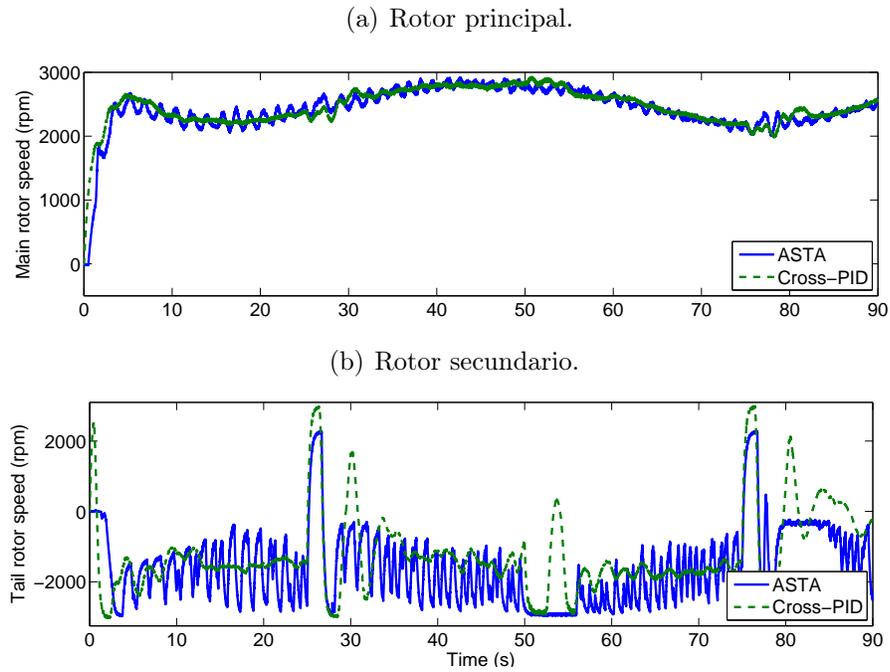


Figura 6.19: Velocidad de los rotores de la plataforma TRAS, mediante la aplicación del controlador ASTA basado en diferenciador robusto (Caso Nominal).

La evolución de las ganancias adaptivas se puede observar en la Figura 6.9; a partir de valores iniciales dados, las ganancias alcanzan valores mas adecuados. Un comparativo del desempeño de acuerdo a diversos índices puede observarse en la Tabla 6.7, donde la última columna de la derecha corresponde al esfuerzo de control.

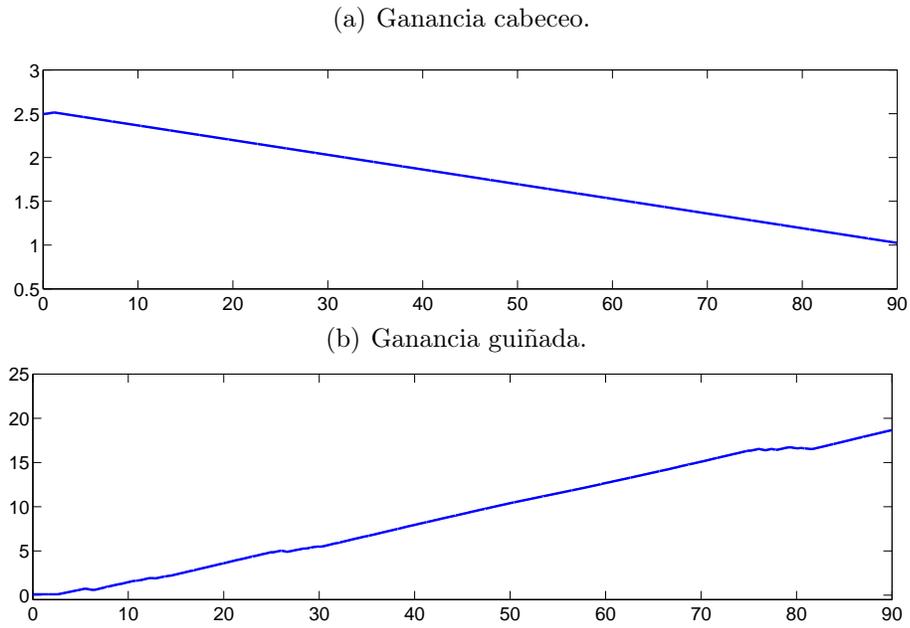


Figura 6.20: Ganancias del controlador ASTA basado en diferenciador robusto, aplicado a la plataforma TRAS (Caso Nominal).

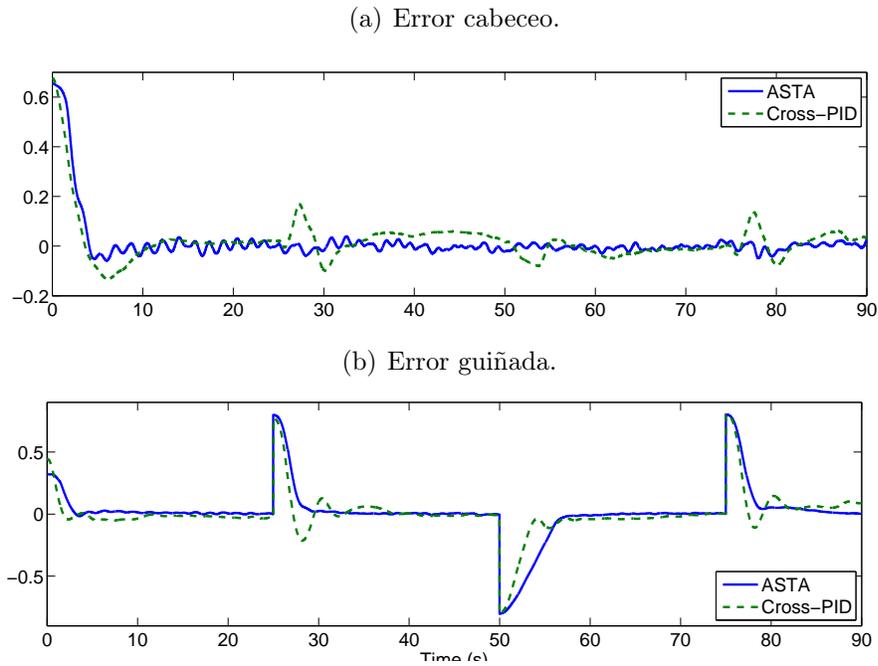


Figura 6.21: Error de seguimiento de la plataforma TRAS, mediante la aplicación del controlador ASTA basado en diferenciador robusto (Caso Nominal).

Angulo	Control	MSE	IAE	ITAE	$\ u\ _2$
Cabeceo	ASTA	0.009	262.33	4267.98	24.25
	Cross-PID	0.009	446.33	14126.22	43.56
Guiñada	ASTA	0.04	908.84	41075.95	27.33
	Cross-PID	0.03	760.66	36919.34	17.17

Tabla 6.7: Desempeño del controlador ASTA basado en diferenciador robusto aplicado a la plataforma TRAS (Caso Nominal).

Caso Perturbado

La respuesta del sistema para el caso en el cual se añadió un peso extra a la plataforma, se muestra en la Figura 6.22.

Como puede observarse, el sistema controlado mediante el enfoque ASTA basado en diferenciador robusto mantuvo un buen desempeño a lo largo del experimento; por otro lado, el controlador PID cruzado fué incapaz de compensar el peso excedente. Debido a las saturación en la salida del controlador (Fig. 6.23), el ángulo de guiñada presentó una respuesta más lenta, en comparación con el ángulo de cabeceo. El peso extra de la plataforma requiere un mayor consumo de energía para compensar la variación, tal como se ve reflejado en la velocidad de los rotores mostrada en la Figura 6.24.

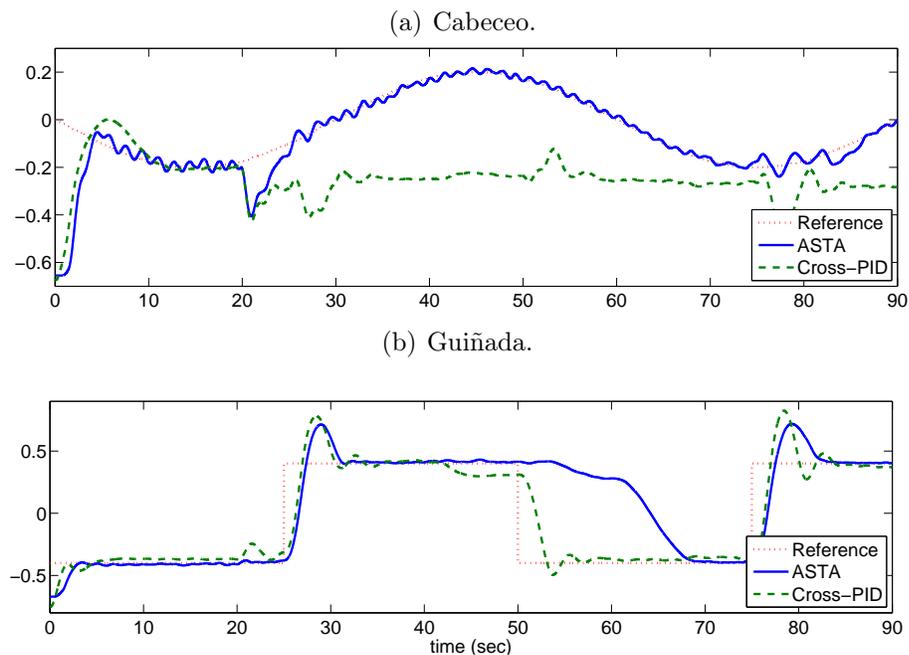


Figura 6.22: Respuesta angular del control ASTA basado en diferenciador robusto aplicado a la plataforma TRAS (Caso Perturbado).

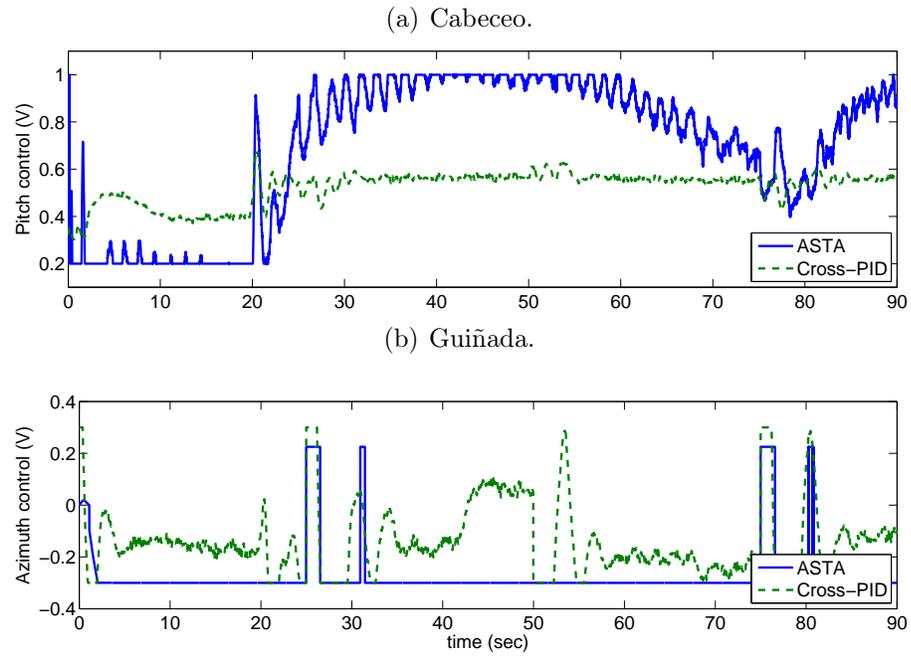


Figura 6.23: Señales del control ASTA basado en diferenciador robusto aplicado a la plataforma TRAS (Caso Perturbado).

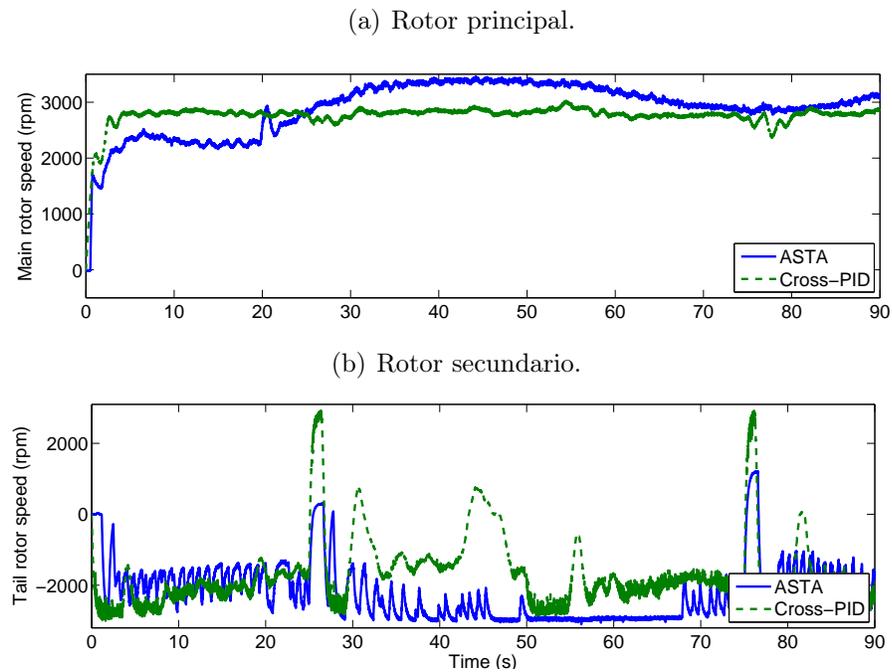


Figura 6.24: Velocidad de los rotores de la plataforma TRAS, mediante la aplicación del controlador ASTA basado en diferenciador robusto (Caso Perturbado).

Las ganancias adaptivas contribuyen a compensar de manera más adecuada la perturbación que constituye el peso extra de la plataforma; su evolución se puede apreciar en la Figura 6.25. El desempeño del controlador propuesto se puede observar mediante el comparativo del error de seguimiento mostrado en la Figura 6.26, de igual forma mediante los índices mostrados en la Tabla 6.8.

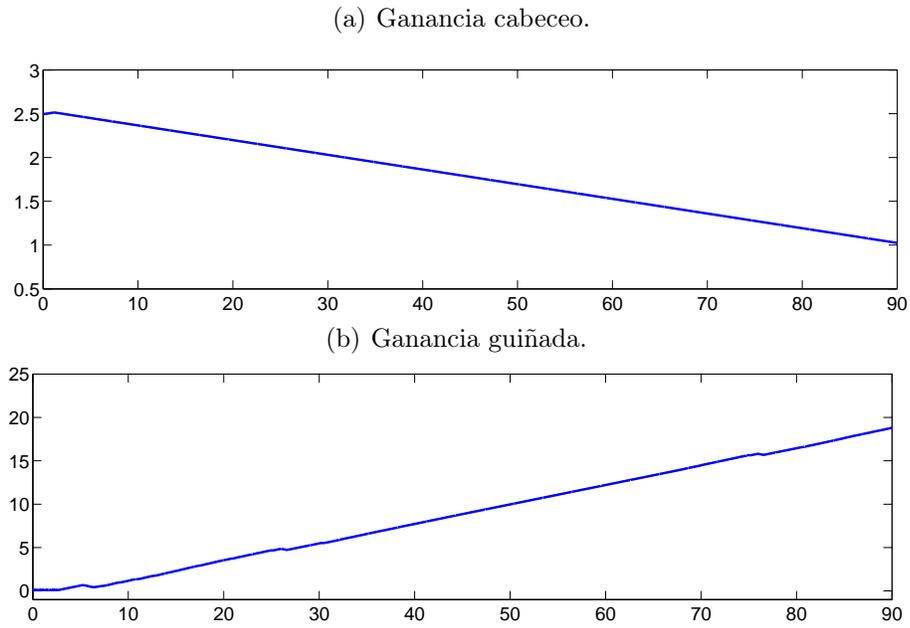


Figura 6.25: Ganancias del controlador ASTA basado en diferenciador robusto, aplicado a la plataforma TRAS (Caso Perturbado).

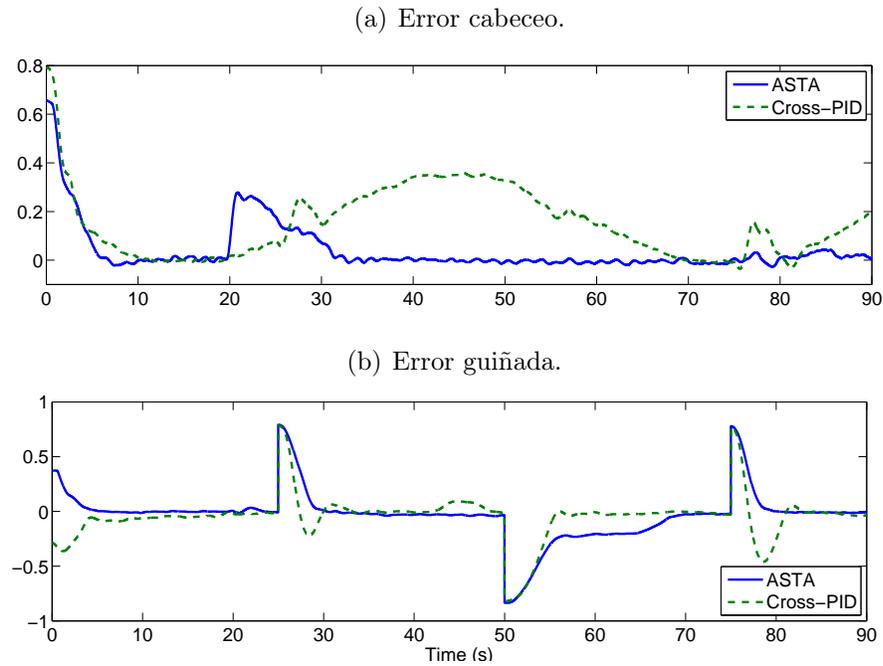


Figura 6.26: Error de seguimiento de la plataforma TRAS, mediante la aplicación del controlador ASTA basado en diferenciador robusto (Caso Perturbado).

Angulo	Control	MSE	IAE	ITAE	$\ u\ _2$
Cabeceo	ASTA	0.011	363.85	8324.40	69.12
	Cross-PID	0.067	1947.91	89474.44	50.11
Guiñada	ASTA	0.127	1802.89	92926.46	27.53
	Cross-PID	0.031	842.70	40080.06	18.81

Tabla 6.8: Desempeño del controlador ASTA basado en diferenciador robusto aplicado a la plataforma TRAS (Caso Perturbado).

6.2 Control del Cuadrirotor

En esta sección se muestran los resultados de simulación de la evaluación del controlador ASTA, aplicado a un cuadrirotor.

Los parámetros del modelo dinámico del cuadrirotor se muestran en la Tabla 6.9. Los parámetros del controlador ASTA se pueden observar en la Tabla 6.10.

Parámetro	Símbolo	Unidad	Valor
Masa	m	kg	0.948
Radio	l	m	0.65
Inercia en x	I_{xx}	$kg \cdot m^2$	0.0291
Inercia en y	I_{yy}	$kg \cdot m^2$	0.0291
Inercia en z	I_{zz}	$kg \cdot m^2$	0.1797
Coficiente de empuje	K_f	$kg \cdot m \cdot rad^{-2}$	$1.37e^{-6}$
Coficiente de los momentos	K_m	$kg \cdot m^2 \cdot rad^{-2}$	$7.42e^{-9}$
Ganancia del motor	K	$rad \cdot s^{-1} \cdot V^{-1}$	97.39
Constante de tiempo del motor	τ	s	$3e^{-6}$
Inercia del conjunto motor-hélice	J_r	$kg \cdot m^2$	$7.0434e^{-5}$

Tabla 6.9: Parámetros del cuadrirotor

	ω_i	λ_i	μ_i	γ_i	ϵ_{*i}
U_1	0.1	1.36	0.01	1.1	1.75
U_2	0.001	15.51	0.01	0.1	0.05
U_3	0.001	2.51	0.01	0.1	1.75
U_4	0.001	15.51	0.01	0.1	0.05
U_x	0.001	1.36	0.01	0.1	0.05
U_y	0.1	1.36	0.01	1.1	0.05

Tabla 6.10: Parámetros del controlador ASTA aplicado al cuadrirotor

Con el fin de evaluar el desempeño del controlador propuesto, también se consideró un controlador backstepping [12] como comparativo.

Caso Nominal

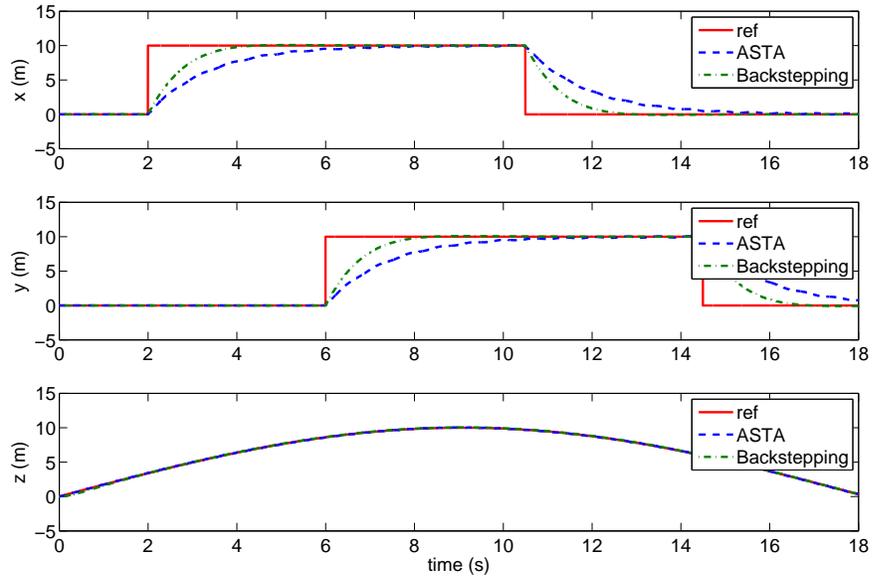


Figura 6.27: Respuesta en posición del cuadrirotor (caso nominal).

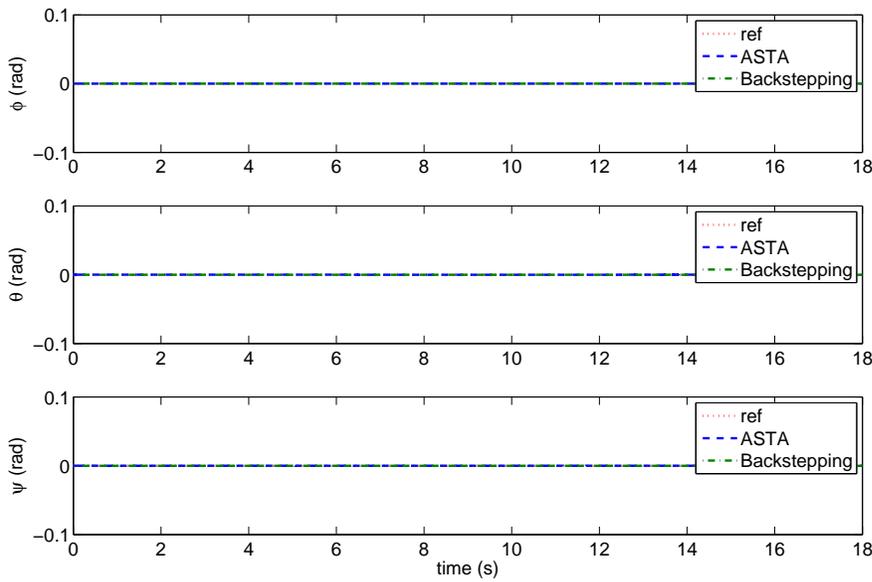


Figura 6.28: Respuesta angular del cuadrirotor (caso nominal).

En las gráficas de la respuesta nominal del cuadrirotor (Figs. 6.27 - 6.28) puede apreciarse un comportamiento similar. Aunque la respuesta del controlador backstepping tiene un mejor desempeño, su sintonización resulta más complicada debido a la mayor cantidad de parámetros del controlador.

Caso Perturbado

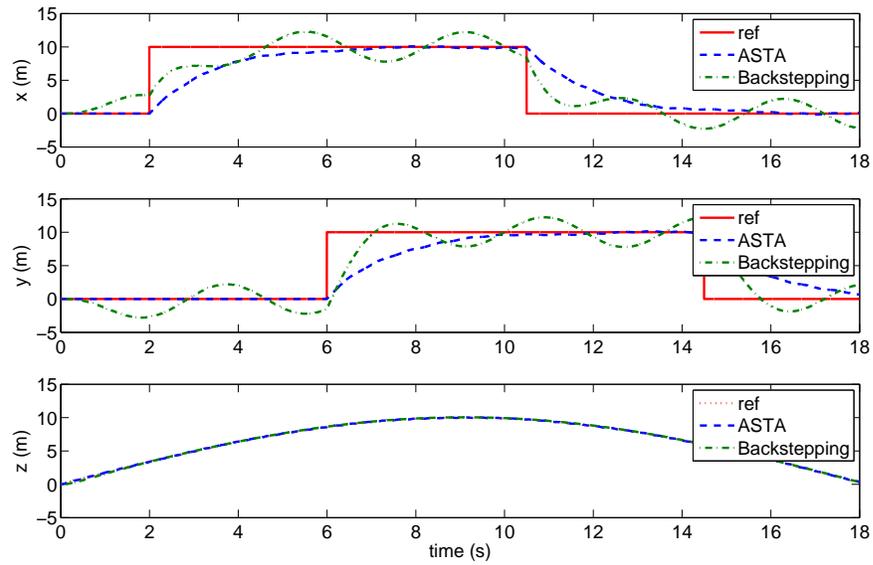


Figura 6.29: Respuesta en posición del cuadrirotor bajo perturbación de viento.

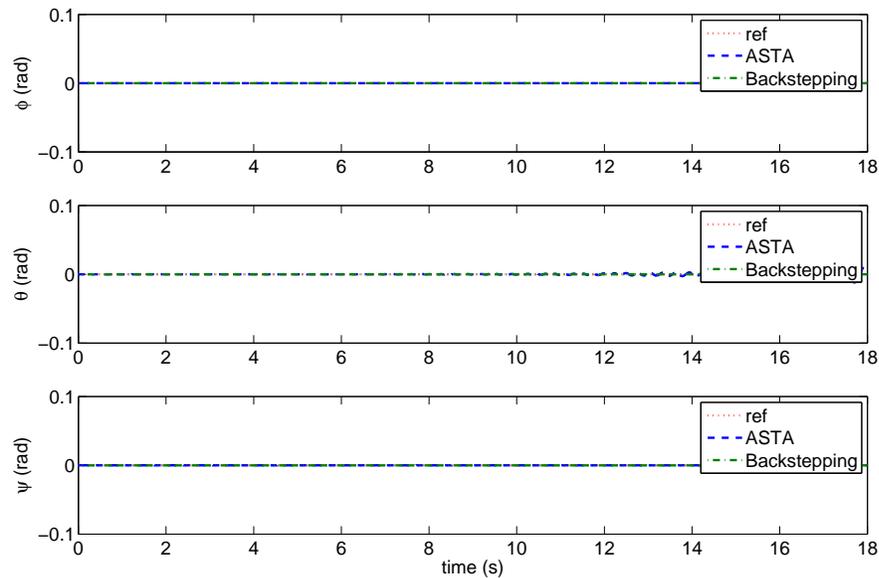


Figura 6.30: Respuesta angular del cuadrirotor bajo perturbación de viento.

En una segunda prueba, el cuadrirotor se somete a una señal de perturbación sinusoidal de frecuencia 1.75rad/s y amplitud 10m/s , para simular una ráfaga de viento. En las Figuras 6.29 - 6.30, se puede observar como el controlador backstepping no alcanza a rechazar la perturbación, mientras el controlador ASTA mantiene el buen desempeño del sistema.

6.3 Conclusiones

A lo largo del presente capítulo se abordó el control de un Helicóptero de 2-GDL. Mediante un modelo matemático simplificado, basado en consideraciones físicas, se logró controlar la posición angular del sistema a través del enfoque Super Twisting Adaptivo. Con el fin de implementar el controlador propuesto, los estados no medibles, dinámicas desconocidas y perturbaciones del sistema, se estiman mediante observadores; por un lado, Observadores No Lineales de Estado Extendido (NESO) y por otro lado, Diferenciadores basados en Modos Deslizantes de Alto

Orden.

En el caso del esquema de control Super Twisting Adaptivo basado en Observador No Lineal de Estado Extendido, la estabilidad del sistema en lazo cerrado quedó demostrada previamente. La sintonización del observador de estado extendido resulta ser más sencilla en comparación con la sintonización del diferenciador robusto probado. Además, durante la validación experimental, dicho esquema mostró el mejor desempeño entre los controladores probados. Sin embargo requirió mayor esfuerzo de control.

Debido a la dificultades de cálculo de la derivada de señales ruidosas, se optó por probar el diseño del esquema de control basado en un modelo matemático reducido de primer orden. A través del enfoque Super Twisting Adaptivo empleando los estados estimados mediante un Diferenciador por Modos Deslizantes de Alto Orden, se logró controlar el sistema de manera satisfactoria. Dicho esquema requirió menor esfuerzo de control, aunque no tuvo mejor desempeño que el basado en Observador No Lineal de Estado Extendido.

Cabe destacar, el enfoque de control Super Twisting Adaptivo basado en observadores permite compensar los acoplamientos del sistema de manera eficiente, de tal manera que los subsistemas se pueden controlar independientemente. A partir de la validación experimental se puede concluir que el esquema de control resulta robusto ante incertidumbre paramétrica y perturbaciones externas.

Mediante simulaciones numéricas, se demostró la factibilidad y el desempeño ante perturbaciones del controlador ASTA, aplicado a un cuadrirotor. En comparación con un controlador backstepping, el control propuesto mostró un desempeño superior cuando se sometió el sistema a una perturbación externa, ráfagas de viento.

En el siguiente capítulo se abordarán las conclusiones generales del presente trabajo.

Capítulo 7

Conclusiones

En la presente tesis se expusieron esquemas de control para dos modelos de helicópteros a escala: un helicóptero de 2-GDL y un cuadrirotor. La metodología de control se basa en el Algoritmo Super Twisting Adaptivo, el cual permite adaptar la ganancia en tiempo real. La adaptación de la ganancia reduce el esfuerzo de control, ya que al contrario de su contraparte Super Twisting de ganancia fija, no es necesario conocer las cotas de las perturbaciones que afectan al sistema para seleccionar la ganancia adecuada cuyo valor depende de dichas cotas.

Debido a que la mayor parte de las aeronaves a escala emplean accionadores eléctricos, resulta interesante observar el desempeño del controlador ASTA cuando se presentan no linealidades comunes en los actuadores. Mediante la validación en una plataforma electromecánica experimental del controlador ASTA, se pudo constatar su buen desempeño ante la aparición de dinámicas no lineales como el juego dinámico. Gracias al controlador ASTA se pudo compensar el retardo inducido por la aparición de la no linealidad, reduciendo de igual forma las oscilaciones a niveles aceptables. Lo cual representa una nueva aplicación para la metodología ASTA, donde no es necesario incluir el término del juego dinámico dentro del modelado del sistema.

Con el fin de implementar el controlador propuesto a la plataforma TRAS, se emplearon

observadores de estado para estimar la información necesaria. Mediante los observadores se estimaron los estados del sistema, las dinámicas desconocidas y perturbaciones externas. La estabilidad del sistema controlador-observador en lazo cerrado quedó demostrada. Cabe señalar que la ganancia no lineal del observador de estado extendido contribuye a contrarrestar la presencia de ruido en las señales, contrario a lo que sucede con el diferenciador robusto el cual muestra una mayor sensibilidad al ruido. Por otro lado, puesto que la estimación de las dinámicas desconocidas se lleva a cabo en línea, la información necesaria sobre los parámetros del sistema se reduce significativamente, logrando llevar a cabo el diseño de los esquemas de control sobre modelos simplificados del sistema. A partir de los modelos dinámicos empleados se puede observar que los esquemas de control propuestos no precisan de un modelado exhaustivo. Tanto la perturbación generada por el excedente de peso, como los efectos giroscópicos de la plataforma, son compensados por los esquemas de control. En el caso del cuadrirotor, se pudo constatar el rechazo a perturbaciones externas como el viento por parte del controlador ASTA.

La validez de los esquemas de control propuestos quedó demostrada mediante simulaciones numéricas y resultados experimentales, donde se pudo observar que presentan un mejor desempeño con respecto a los otros controladores probados. El esquema de control puede ampliarse fácilmente a otros tipos de vehículos aéreos no tripulados, y de igual forma a diversos sistemas.

Para un trabajo posterior resta la validación de los esquema de control sobre el cuadrirotor experimental. Debido a limitaciones en los controladores de los motores, es necesario reemplazarlos por modelos que ofrezcan una frecuencia de actualización más alta. De igual forma es recomendable validar los esquemas de control propuestos en un helicóptero convencional a escala, para comparar su desempeño y ventajas.

Apéndice A

Definiciones Matemáticas

Definición: Condición de Lipschitz.

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\| \quad (\text{A.0.1})$$

Una función que satisface (A.0.1) se dice Lipschitz en x y L es la constante de Lipschitz. Decimos que $f(x)$ es *localmente Lipschitz* en un dominio (conjunto abierto y conexo) $D \subset \mathbb{R}^n$ si cada punto de D tiene un entorno D_0 tal que f satisface (A.0.1) con alguna constante de Lipschitz L_0 . Decimos que $f(x)$ es Lipschitz en un conjunto W si satisface (A.0.1) en todos los puntos de W , **con la misma constante de Lipschitz L** . Toda función localmente Lipschitz en un dominio D es Lipschitz en todo subconjunto *compacto* (cerrado y acotado) de D . Decimos que $f(x)$ es globalmente Lipschitz si es Lipschitz en \mathbb{R}^n . Decimos que $f(t, x)$ es *localmente Lipschitz* en x en $[a, b] \times D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ si cada punto $x \in D$ tiene un entorno D_0 tal que f satisface (A.0.1) en $[a, b] \times D_0$ con alguna constante de Lipschitz L_0 . Decimos que $f(t, x)$ es localmente Lipschitz en x en $[t_0, \infty) \times D$ si es localmente Lipschitz en x en $[a, b] \times D$ para todo intervalo compacto $[a, b] \subset [t_0, \infty)$. Decimos que $f(t, x)$ es Lipschitz en $[a, b] \times W$ si satisface (A.0.1) para todo $t \in [a, b]$ y todo punto en W , con la misma constante de Lipschitz L .

Apéndice B

Plataforma experimental

Durante el desarrollo de la presente investigación se procedió a la creación de un cuadrirotor experimental que sirviera tanto para la validación de los esquemas de control propuestos, como para investigaciones posteriores. Uno de los principales objetivos es obtener un equipo de bajo costo que permita su implementación en distintos ambientes.

El procesamiento de la información se realiza en un microcontrolador ATMEL 2560. Cabe destacar que la plataforma consta de sensores de distancia infrarrojos para detección de obstáculos y de ultrasonido para medición de la altura. La medición angular se lleva a cabo mediante una central inercial de 6-GDL. La orientación con respecto al norte magnético se lleva a cabo mediante una brújula electrónica. Un módulo GPS provee información sobre las coordenadas globales. Por último, la interfaz con la computadora se lleva a cabo a través de módulos de comunicación Xbee.

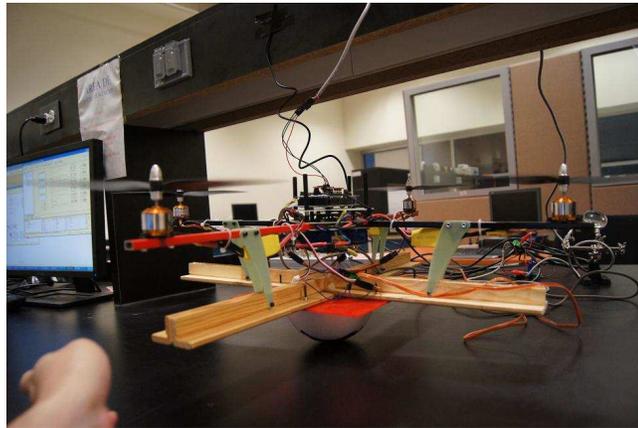


Figura B.1: Cuadrirotor experimental fabricado.

B.1 Motores

Para impulsar las hélices del cuadrirotor se seleccionaron motores sin escobillas. Dichos motores, en vez de funcionar con CD, funcionan con CA y se alimentan a través una señal trifásica, la cual esta constituida mediante pulsos, haciendo que la señal sea continua pulsante o bien una continua formada por componentes de AC. Sin embargo se clasifican como motores de CD porque al igual que los motores comunes tienen imanes permanentes.



Figura B.2: Motores sin escobillas del cuadrirotor experimental.

B.2 Sensor de inercia

La selección del modelo SEN-10010 de unidad de medición inercial de 6-GDL se debió principalmente a su bajo costo y reducido tamaño. Posee un rango de medición de los giroscopios de $\pm 300^\circ/s$ y $\pm 3g$ para los acelerómetros.



Figura B.3: Unidad de medición de inercia del cuadrirotor experimental.

B.3 Brújula

La brújula permite referenciar el ángulo de guiñada con respecto al norte magnético [7]. De esta forma es más fácil controlar la orientación al contar con una referencia fija.



Figura B.4: Brújula electrónica del cuadrirotor experimental.

B.4 Sistema de Posicionamiento Global (GPS)

El módulo GPS [4] permite conocer la ubicación del cuadrirotor con una precisión de centenas de metros. Cabe destacar que la unidad se emplea solamente como accesorio, ya que la baja resolución impide utilizarla para fines de control. El alto costo de las unidades de GPS diferencial de mayor precisión las mantiene fuera del rango del cuadrirotor de bajo costo.



Figura B.5: Módulos de recepción GPS del cuadricóptero experimental.

B.5 Sensores de distancia

Un sensor de proximidad es un transductor que detecta objetos o señales que se encuentran cerca del elemento sensor. Existen varios tipos de sensores de proximidad según el principio físico que utilizan. Los más comunes son los interruptores de posición, los detectores capacitivos, los inductivos y los fotoeléctricos, como el de infrarrojos.

B.5.1 Sensor infrarrojo

El receptor de rayos infrarrojos suele ser un fototransistor o un fotodiodo [8]. El circuito de salida utiliza la señal del receptor para amplificarla y adaptarla a una salida que el sistema pueda entender.



Figura B.6: Sensor infrarrojo de distancia del cuadrirotor experimental.

B.5.2 Sensor ultrasonido

Los sensores de ultrasonidos son detectores de proximidad que emiten impulsos ultrasónicos, los cuales se reflejan en un objeto, el sensor recibe el eco producido y lo convierte en señales eléctricas [5]. Pueden detectar objetos con diferentes formas, colores, superficies y de diferentes materiales. Los materiales pueden ser sólidos o líquidos, sin embargo han de ser deflectores de sonido. Los sensores trabajan según el tiempo de transcurso del eco, es decir, se valora la distancia temporal entre el impulso de emisión y el impulso del eco.

El problema que presentan estos dispositivos son los puntos ciegos. El punto ciego es la zona comprendida entre el lado sensible del detector y el alcance mínimo en el que ningún objeto puede detectarse de forma fiable.



Figura B.7: Sensor ultrasónico de distancia del cuadrirotor experimental.

B.6 Transmisión de datos

La conectividad inalámbrica del cuadrirotor se lleva a cabo a través de los módulos Xbee de MaxStream [6]. Los módulos Xbee proveen 2 formas de comunicación: Transmisión serial transparente (modo AT) y el modo API que provee diversas ventajas. Los Xbee pueden comunicarse en arquitecturas punto a punto, punto a multi punto o en una red mesh. La elección del módulo XBee correcto depende del tipo de antena (chip, alambre o conector SMA) y la potencia de transmisión (2mW para 300 pies o 60mW para hasta 1 milla).



Figura B.8: Módulos de comunicación XBEE del cuadrirotor experimental.

Apéndice C

Publicaciones

C.1 Congresos

- **Observer-based Adaptive Super Twisting Control Strategy for a 2-DOF Helicopter.** O. Salas, H. Castañeda, J. DeLeon-Morales. *International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), Atlanta, USA. May 28-31, 2013*
- **Adaptive Super Twisting Flight Control-Observer for a Fixed-wing UAV.** H. Castañeda, O. Salas, J. DeLeon-Morales. *International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), Atlanta, USA. May 28-31, 2013*
- **Observer-based Attitude Control for a Two-Rotor Aerodynamical System.** O. Salas, H. Castañeda, J. DeLeon-Morales. *6th International Conference on Physics and Control (PhysCon), San Luis Potosí, México. August 26-29, 2013.*
- **Robust autopilot for a fixed wing UAV using adaptive super twisting technique.** H. Castañeda, O. Salas, J. DeLeon-Morales. *6th International Conference on Physics and Control (PhysCon), San Luis Potosí, México. August 26-29, 2013.*

- **Formation Maneuvers via Adaptive Super Twisting Approach.** R. Hernández, O. Salas, J. DeLeon-Morales. *6th International Conference on Physics and Control (PhysCon), San Luis Potosí, México. August 26-29, 2013.*

C.2 Revistas

- **Attitude Observer-based Robust Control for a Twin Rotor System.** Oscar Salas, Herman Castañeda, Jesus De Leon-Morales. *KYBERNETIKA. Aceptado, 2013.*
- **Control de orientación de un vehículo aéreo no tripulado de ala fija.** H. Castañeda, J. DeLeon-Morales, E. Olgúin, O. Salas. *CIENCIA UANL, Año 16, No. 63, 2013.*
- **Observer based Adaptive Super Twisting Attitude Control of a 2-DOF Helicopter.** Oscar Salas, Herman Castañeda, Jesus De Leon-Morales. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. En revisión, 2013.*
- **Autopilot Control based on Adaptive Super-Twisting for a 2-DOF Helicopter.** Oscar Salas, Herman Castañeda, Jesus De Leon-Morales. *Journal of Control Engineering and Applied Informatics. En revisión, 2013.*

Bibliografía

- [1] AHMED, Q., IQBAL, S., AND KAZMI, I. “2-sliding mode based robust control for 2-dof helicopter”. *11th International Workshop on Variable Structure Systems*, pp. 481-486 (2010).
- [2] ANON1. “Modular Servo System. User’s manual”. *Inteco Ltd*, Poland (2006). <http://www.inteco.com.pl>.
- [3] ANON2. “Two Rotor Aerodynamical System. User’s manual”. *Inteco Ltd*, Poland (2006). <http://www.inteco.com.pl>.
- [4] ANON3. “GPS Engine Board EM-408. User Guide”. *Globalsat Technology Corporation*, Taiwan (2009). <http://www.globalsat.com.tw>.
- [5] ANON4. “LV-MaxSonar-EZ3 Data Sheet”. *MaxBotix Inc*, USA (2011). <http://www.maxbotix.com>.
- [6] ANON5. “XBee/XBee-PRO OEM RF Modules. Product manual”. *MaxStream*, USA (2006). <http://www.MaxStream.net>.
- [7] ANON6. “Digital Compass Solution”. *Honeywell International Inc*, USA (2006). <http://www.honeywell.com>.
- [8] ANON7. “Sharp GP2Y0A02YK0F Datasheet”. *Sharp Corporation*, USA (2006). <http://www.sharpsma.com>.
- [9] AZAM, M., AND SINGH, S. “Invertibility and trajectory control for nonlinear maneuvers of aircraft”. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 17(1), pp, 192-200 (1998).
- [10] BAUCHAU, O., RODRIGUEZ, J., AND BOTTASSO, C. “Modeling of unilateral contact conditions with application to aerospace systems involving backlash, freeplay and friction”. *Mechanics Research Communications*, Vol. 28, Issue 5, pp. 571-599 (2001).
- [11] BOUABDALLAH, S. “Design and control of quadrotors with application to autonomous flying”. *Ph.D. dissertation*, EPFL (2006).

- [12] BOUABDALLAH, S., AND SIEGWART, R. "Full Control of a Quadrotor". *IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 153-158, San Diego, USA (2007).
- [13] DUTKA, A., ORDYS, A., AND GRIMBLE, M. "Non-linear Predictive Control of 2 dof helicopter model". *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control, Hawaii, USA* (2003).
- [14] EFE, M. "Model reference sliding mode control for bioreactor benchmark problem". *International Workshop on Variable Structure Systems*, Vol. 1, pp. 361-366 (2008).
- [15] EVANGELISTA, C., PULESTON, P., VALENCIAGA, F., AND FRIDMAN, L. "Lyapunov-Designed Super-Twisting Sliding Mode Control for Wind Energy Conversion Optimization". *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, Vol. 60 (2), pp. 538-545 (2013).
- [16] FIELDING, C., AND FLUX, P. K. "Non-linearities in flight control systems". *Mechanics Research Communications*, Vol. 107, No. 1077, pp. 673-696 (2003).
- [17] FILIPPOV, A. "Differential equation with discontinuous right-hand side". *Kluwer*, Netherlands (1988).
- [18] FREIDOVICH, L., AND KHALIL, H. "Performance Recovery of Feedback-Linearization-Based Designs". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 53, Issue 10, pp. 2324-2334 (2008).
- [19] GAO, Z. "Scaling and bandwidth - parametrization based controller tuning". *IEEE Proceedings of American Control Conference*, pp. 4989-4996, Denver, USA (2003).
- [20] G.REALE, ORTNER, P., AND RE, L. D. "Nonlinear Observers for Closed-Loop Control of a Combustion Engine Test Bench". *Proc. of the 2009 American Control Conference*, Vol.6, pp. 4648-4653, Missouri, USA (2009).
- [21] GUO, B., AND ZHAO, Z. "On convergence of non-linear extended state observer for multi-input multi-output systems with uncertainty". *IET Control Theory & Applications*, Vol. 6, Issue 15, pp. 2375 - 2386 (2012).
- [22] HAUSER, J., SASTRY, S., AND MEYER, G. "Nonlinear control design for slightly non-minimum phase systems: application to a V/STOL aircraft". *Automatica*, vol. 28(4), pp. 665-679 (1992).
- [23] JANARDHANAN, S., UN NABI, M., AND TIWARI, P. "Attitude Control of Magnetic Actuated Spacecraft using Super-Twisting Algorithm with Nonlinear Sliding Surface". *International Workshop on Variable Structure Systems*, Vol. 1, pp. 46-51 (2012).
- [24] KOKOTOVIC, P., AND KHALIL, H. "Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design". *Academic Press*, London (1986).
- [25] KRAVARIS, C. "Tracking the Singular Arc of a Continuous Bioreactor using Sliding Mode Control ". *International Workshop on Variable Structure Systems*, Vol. 1, pp. 498-503 (2010).

- [26] LEISHMAN, J. “Principles of Helicopter Aerodynamics”. *Cambridge University Press*, First Edition (2002).
- [27] LEVANT, A. “Robust Exact Differentiation via Sliding Mode Technique”. *Automatica*, vol. 34(3), pp. 379-384 (1998).
- [28] LEVANT, A. “High-order sliding modes, differentiation and output-feedback control”. *International Journal of Control*, vol. 76(9/10), pp. 924-941 (2003).
- [29] LEVANT, A. “Homogeneity approach to high-order sliding mode design”. *Automatica*, no. 41, pp. 823–830 (2005).
- [30] LEVANT, A. “Principles of 2-sliding mode design”. *Automatica*, no. 43, pp. 576–586 (2007).
- [31] LOPEZ-MARTINEZ, M., ORTEGA, M., VIVAS, C., AND RUBIO, F. “Control No Lineal Robusto de una Maqueta de Helicoptero con Rotores de Velocidad Variable”. *Revista Iberoamericana de Automatica e Informatica Industrial*, Vol. 4, No. 3, pp. 46-60 (2007).
- [32] LOPEZ-MARTINEZ, M., AND RUBIO, F. “Approximate feedback linearization of a Laboratory Helicopter”. *Proceedings Sixth Portuguese Conference on Automatic Control*, , pp.43-48, Portugal (2004).
- [33] LUBER, W. “Flutter Prediction on a Combat Aircraft Involving Backlash on Control Surfaces”. *Proceedings of the 16th International Modal Analysis Conference*, Vol. 3243, pp. 291-299 (1998).
- [34] MORENO, J., AND OSORIO, M. “Strict Lyapunov Functions for the Super-Twisting Algorithm”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 57, Issue 4, pp 1035-1040 (2012).
- [35] MULLHAUPT, P., SRINIVASAN, B., LEVINE, J., AND BONVIN, D. A toy more difficult to control than the real thing. *Proc. of the European Control Conference* (1997), 253–258.
- [36] PETKOV, P., CHRISTOV, N., AND KONSTATINOV, M. “Robust Real-Time Control of a Two-Rotor Aerodynamic System”. *Proceedings of 17th IFAC World Congress*, Korea (2008).
- [37] POZNYAK, A. “Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Engineers”. *Elsevier, Deterministic Techniques*, Vol.1, p.774, Amsterdam, The Netherlands (2008).
- [38] PROCA, A., KEYHANI, A., AND MILLER, J. “Sensorless Sliding-Mode Control of Induction Motors Using Operating Condition Dependent Models”. *IEEE Trans. on Energy Conversion*, Vol. 18, No. 2, pp. 205-212 (2003).
- [39] RAHIDEH, A., SHAHEED, M., AND HUIJBERTS, H. “Dynamic modelling of a TRMS using analytical and empirical approaches”. *Control Engineering Practice*, No. 16, pp. 241-259 (2008).

- [40] SAKSENA, V., O'REILY, J., AND KOKOTOVIC, P. "Singular perturbations and time-scale methods in control theory: Survey 1976-1983". *Automatica*, vol.20, pp. 273-293, May (1984).
- [41] SHTESSEL, Y., PLESTAN, F., AND TALEB, M. "Super-twisting adaptive sliding mode control with not-overestimated gains : application to an electropneumatic actuator". *Proceedings IFAC World Congress*, Italy, Milan (2011).
- [42] SMAOUI, M., BRUN, X., AND THOMASSET, D. "A Robust Differentiator-Controller Design for an Electropneumatic System ". *44th IEEE Conference on Decision and Control and 2005 European Control Conference. CDC-ECC '05*, pp. 4385 - 4390 (2005).
- [43] SOTO-COTA, A., FRIDMAN, L., LOUKIANOV, A., AND CANEDO, J. "Variable structure control of synchronous generator: singularly perturbed analysis". *International Journal of Control*, vol. 79 (1), pp. 1-13 (2006).
- [44] UTKIN, V. "Sliding Mode Control Design Principles and Applications to Electric Drives". *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, Vol. 40, No. 1, pp. 23-36 (1993).
- [45] VAZQUEZ, C., COLLADO, J., AND FRIDMAN, L. "Super twisting control of a parametrically excited overhead crane". *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 1 (2013).
- [46] YANG, X., AND HUANG, Y. "Capabilities of Extended State Observer for Estimating Uncertainties". *Proc. of the 2009 American Control Conference*, Vol.1, pp. 3700-3705, Missouri, USA (2009).
- [47] ZHU, B., AND HUO, W. Trajectory linearization control for a quadrotor helicopter. *8th International Conference on Control and Automation* (2010), 34–39.