

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



CONTROL DESCENTRALIZADO DE FORMACIÓN Y MOVIMIENTO
COORDINADO DE ROBOTS MÓVILES TIPO UNICICLO

POR
ING. RUBÉN HERNÁNDEZ ALEMÁN

TESIS
EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ORIENTACIÓN
EN CONTROL AUTOMÁTICO

CD. UNIVERSITARIA

DICIEMBRE DE 2013

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



CONTROL DESCENTRALIZADO DE FORMACIÓN Y MOVIMIENTO
COORDINADO DE ROBOTS MÓVILES TIPO UNICICLO

POR
ING. RUBÉN HERNÁNDEZ ALEMÁN

TESIS
EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ORIENTACIÓN
EN CONTROL AUTOMÁTICO

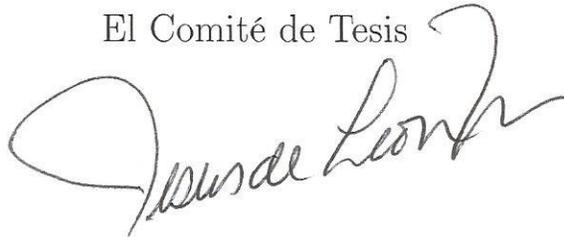
CD. UNIVERSITARIA

DICIEMBRE DE 2013

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis “**Control descentralizado de formación y seguimiento coordinado de robots móviles tipo unicycle**” realizada por el alumno **Ing. Rubén Hernández Alemán**, matrícula 1290895 sea aceptada por su defensa como opción al grado de **Maestro en Ciencias** de la Ingeniería Eléctrica con Especialidad en Control Automático.

El Comité de Tesis



Asesor
Dr. Jesús de León Morales

Coasesor:
Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez



Coasesor:
Dr. Marco Tulio Mata Jiménez

Vo. Bo.
Dr. Moisés Hinojosa Rivera
División de Estudios de Posgrado

Cd. Universitaria, a Noviembre de 2013

A mi familia por su apoyo.

RESUMEN

Publicación No. _____

Rubén Hernández Alemán, M. C. en Ingeniería Eléctrica

Universidad Autónoma de Nuevo León, 2013

Profesor Asesor: Dr. Jesús de León Morales

En el presente documento se proponen tres controladores descentralizados de formación y movimiento coordinado para un sistema multi-agente, los cuales están basados en métodos propuestos en la literatura, tales como métodos de teoría de grafos, Líder-Seguidores y basados en comportamiento, mientras que la descentralización del controlador ofrece autonomía para cada agente del conjunto, además que requiere de menos esfuerzo computacional en la implementación del control. El sistema multi-agente empleado en este estudio está constituido por $P = 1 + N$ robots móviles tipo unicycle, es decir un líder y N seguidores, los cuales deberán mantener una formación rígida mientras siguen una trayectoria generada por el agente líder. En este documento la linealización entrada-salida es aplicada para descomponer las dinámicas no lineales de cada robot en sistemas con dinámicas lineales de segundo orden. Mientras que, dada una transformación de coordenadas del i -ésimo sistema, la dinámica interna se vuelve no observable y no controlable, sin embargo la dinámica cero es estable.

En este trabajo de tesis, se busca dar una solución al problema de control de formación y movimiento coordinado, el cual consiste en mantener un grupo de N robots móviles tipo unicycle en una formación rígida mientras siguen una trayectoria generada por un robot líder en un plano coordinado.

Por lo tanto, a partir del sistema linealizado, se proponen tres controladores descentralizados para dar solución al problema de control de formación y movimiento coordinado. El primer

controlador está basado en los métodos de comportamiento y métodos Líder-Seguidores, que es obtenido a partir de la modificación del algoritmo de control de formación presentado en [30], cuyo objetivo fue coordinar de manera centralizada el movimiento de los robots, de manera que es posible evitar conflictos en las interacciones entre los robots, además se prueba la estabilidad para trayectorias continuas en el tiempo.

El segundo controlador es construido a partir de los métodos de teoría de grafos y métodos Líder-Seguidor, el cual es obtenido a partir de la modificación del algoritmo de control de sincronización presentado en [57, 5], la mejora radica en que es posible demostrar que el origen es el único equilibrio. Luego, la estabilidad asintótica del origen es demostrada a partir del método directo de Lyapunov.

Por otra parte, los objetivos de control pueden no ser alcanzados debido a la presencia de perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas. Por lo tanto, para proporcionar robustez al sistema multi-agente ante incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas desconocidas pero acotadas, se propone la aplicación de un enfoque de control basado en métodos de modos deslizantes (Algoritmo Super-Twisting Adaptativo).

Para verificar los enfoques de control propuestos, se hacen simulaciones en el ambiente de MatLab/Simulink de cuatro robots móviles tipo unicycle, donde se asume que las interconexiones son constantes y uniformes, y que el deslizamiento de las ruedas con la superficie de desplazamiento es nulo. En las simulaciones del primer y segundo controlador, bajo una situación hipotética en donde las distancias relativas entre los robots son nulas, se compararon aspectos de sincronización interna y externa con controladores citados en este documento. Por otra parte, se presentó una simulación del tercer controlador, donde han sido comparados aspectos de robustez ante incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas con un controlador PID, donde se logra reducir el error de sincronización con respecto al líder con el ASTA respecto al PID.

Índice General

Resumen	iv
Índice General	vi
Índice de Tablas	ix
Índice de Figuras	x
1 Introducción	1
1.1 Generalidades	1
1.2 Antecedentes	6
1.3 Planteamiento del Problema y Estructura de la Tesis	9
1.3.1 Conclusiones	11
2 Preliminares	12
2.1 Introducción	12
2.2 Grafos	12
2.2.1 Ejemplo: Grafo dirigido	16
2.3 Sincronización	18
2.4 Álgebra de Kronecker	19
2.5 Conclusiones	20
3 Robots Móviles	21
3.1 Introducción	21
3.2 Configuraciones de robots con ruedas	22
3.2.1 Configuración Sincrona (Sincro Drive)	22

3.2.2	Configuración Omnidireccional	23
3.2.3	Configuración Oruga (Slip/Skid Steer)	24
3.2.4	Configuración Diferencial	25
3.3	Modelo cinemático	25
3.3.1	Modelo cinemático no-holonómico	26
3.3.2	Modelo cinemático holonómico	27
3.3.3	Modelo cinemático expresado en coordenadas polares	27
3.4	Modelo dinámico	29
3.4.1	Modelo dinámico estructura Euler-Lagrange	29
3.4.2	Modelo dinámico expresado en variables de estado	31
3.5	Algoritmos de control	33
3.5.1	Control de postura	33
3.5.2	Control de seguimiento de trayectoria	35
3.5.3	Control de posición	37
3.6	Conclusiones	40
4	Control de formación y movimiento sincronizado	42
4.1	Introducción	42
4.2	Control de sincronización interna	44
4.3	Control de sincronización interna y externa basada en teoría de grafos	47
4.4	Control de formación basado en métodos basados en comportamiento	53
4.5	Control de formación basado en acoplamiento cruzado (cross-coupling)	59
4.6	Comentarios	64
5	Diseño de controles de formación y seguimiento coordinado	66
5.1	Introducción	66
5.2	Control de formación basado en sincronización externa y métodos de comportamiento	67
5.3	Control de formación basado en métodos de Líder-Seguidores y Teoría de grafos	73
5.4	Control de formación basado en métodos geométricos y modos deslizantes	79
5.5	Conclusiones	86

6 Resultados	88
6.1 Introducción	88
6.2 Simulación: Control 1	89
6.3 Simulación: Control 2	91
6.4 Simulación: Control 3	93
Conclusiones	110
A Sistemas no lineales: Definiciones y teoremas	112
A.1 Definiciones	112
A.2 Teoremas	114
Bibliografía	116

Índice de Tablas

6.1	Caso 1: ASTA control en el eje x	94
6.2	Caso 1: ASTA control en el eje y	95
6.3	Caso 2: ASTA control en el eje x	95
6.4	Caso 2: ASTA control en el eje y	96

Índice de Figuras

1.1	Campo de potencial generado por dos comportamientos; repulsión y atracción. . .	5
1.2	Sistema de múltiples agentes interconectados.	5
2.1	Grafo dirigido conformado por tres nodos, dos arcos unidireccionales y un arco bidireccional.	13
2.2	Grafo dirigido de tres nodos.	18
3.1	Configuración sincrona: El robot puede moverse en cualquier dirección, sin embargo, la orientación del chasis no es controlable.	23
3.2	Diagrama de la configuración de robot omnidireccional.	24
3.3	Diagrama de un robot móvil con configuración oruga.	25
3.4	Robot tipo unicyclo no-holonómico.	27
3.5	Posición del robot tipo unicyclo a una distancia a	28
3.6	Posición del robot unicyclo con respecto a un sistema de coordenadas $\langle g \rangle$. . .	28
3.7	Parámetros considerados por Zhang en el modelo dinámico del robot tipo unicyclo. . .	33
3.8	Sistema en lazo cerrado con control PD.	40
4.1	Topología de interconexión del sistema multi-agente.	44
4.2	Topología de interconexión del i -ésimo robot con los robots vecinos.	60
5.1	Topología de interconexión del i -ésimo robot con un robot vecino y el líder. . . .	77
5.2	Estructura de control.	80
6.1	Topología de interconexión de cuatro agentes aplicado en la Simulación 1.	90
6.2	Topología de interconexión de cuatro agentes aplicado en la Simulación 2.	92
6.3	Secuencia de patrones de formación.	94

6.4	Simulación 1.1: Transitorio en la entrada de control u_i con distancias relativas nulas, (a) fuerza aplicada para la traslación y (b) par aplicado para la orientación.	97
6.5	Simulación 1.1: Entrada de control u_i con distancias relativas nulas, (a) fuerza aplicada para la traslación y (b) par aplicado para la orientación.	98
6.6	Simulación 1.1: Error de posición con respecto al líder con distancias relativas nulas, (a) error de posición en el eje x y (b) error de posición en el eje y	99
6.7	Simulación 1.1: Error de sincronización con distancias relativas nulas, (a) error de sincronización en el eje x y (b) error de sincronización en el eje y	100
6.8	Simulación 1.1: Trayectorias de tres robots y un líder tipo unicycle con respecto al tiempo con una formación cuadrada.	101
6.9	Simulación 1.1: Velocidades de cuatro robots tipo unicycle con respecto al tiempo con una formación cuadrada.	102
6.10	Simulación 2.1: Entrada de control u_i , (a) fuerza aplicada para la traslación y (b) par aplicado para la orientación.	103
6.11	Simulación 2.1: Error de posición con respecto al líder, (a) error de posición en el eje x y (b) error de posición en el eje y	104
6.12	Simulación 2.1: Trayectorias de tres robots y un líder tipo unicycle con respecto al tiempo.	105
6.13	Simulación 2.1: Velocidades de cuatro robots tipo unicycle con respecto al tiempo.	106
6.14	Simulación 3.1: Trayectorias de cuatro robots móviles en el caso nominal.	107
6.15	Simulación 3.1: Trayectorias de cuatro robots móviles ante incertidumbre paramétrica y perturbaciones externas.	107
6.16	Simulación 3.2: Error de seguimiento con respecto al líder para distancias relativas nulas.	108
6.17	Simulación 3.2: Resultado de la Simulación del caso perturbado.	109

Capítulo 1

Introducción

1.1 Generalidades

El avance tecnológico en los sistemas robóticos ha permitido realizar tareas cada vez más complejas y con mayor precisión, aumentando así la eficiencia en la mayoría de los procesos que son de vital importancia en las áreas médica, industrial y de servicio. Esto lleva al planteamiento de nuevos escenarios en los que se requiere la coordinación y cooperación de múltiples robots (sistema multi-robot o sistema multi-agente) para realizar tareas que pueden ser peligrosas o tediosas para los seres humanos, algunos ejemplos son; las líneas de soldadura de carrocerías de automóviles, en donde se requiere que múltiples robots desempeñen un papel de manera cooperativa, los cuales realizan tareas bajo un comportamiento coordinado para producir un número de unidades en un tiempo definido [4]; en el área médica, un conjunto de robots manipuladores teleoperados trabajan de manera cooperativa, para operar en áreas en donde los niveles de infección son altos para el ser humano [25]; en la actualidad se ha recurrido a los robots móviles para desempeñar tareas de seguridad, los cuales se mueven de manera coordinada mientras cooperan para mantener una formación con la finalidad de vigilar un área definida [19]. Sin embargo, en los esquemas de control de sistemas multi-agente es necesario considerar aspectos

como las interacciones o interconexiones entre los agentes, esto debido a que pueden presentarse comportamientos no deseados, como colisiones o discrepancias en el movimiento de algún robot. Por consiguiente, métodos y técnicas de control han sido desarrolladas para dar solución a los problemas de movimiento coordinado presentes en un sistema multi-agente (SMA), el cual **es un conjunto de unidades autónomas interactúan entre sí, o con un ambiente en común** [19].

La sincronización es un concepto de gran interés en redes complejas, y es aplicado en muchos campos tecnológicos. El término de sincronización proviene de la palabra griega $\sigma\upsilon\nu$ (syn = común) y $\chi\rho\nu\zeta$ (Cronos = tiempo), que significa tiempo en común. En lo que respecta al fenómeno de sincronización, este fue probablemente reportado por primera vez en el año de 1673 por Christian Huygens, quien observó que los péndulos de un par de relojes colgados de una barra en común se sincronizaban después de un periodo corto de tiempo, esto luego de haber iniciado sus movimientos bajo condiciones iniciales diferentes [23]. Si dicha concordancia era perturbada, ésta era restablecida luego de un tiempo [38]. De acuerdo con Blekhman la sincronización se define como: *la correlación o correspondencia en el tiempo del comportamiento de dos o más procesos* [7], la cual puede estar presente de forma natural en algunos sistemas sin que exista, en apariencia o introducida de forma artificial, alguna conexión entre ellos, por ejemplo el caso de los millones de células que conforman al tejido cardiaco, las cuales se contraen y se relajan de forma coordinada para realizar la función sistólica y diastólica; otro ejemplo es la luna, cuyo desplazamiento y rotación están sincronizados de tal manera que muestra la misma cara en dirección hacia la tierra; en la fauna algunos insectos coordinan sus actividades como es en el caso del brillo de las luciérnagas [22]. Sin embargo, la sincronización no siempre puede darse de forma natural en todos los sistemas. Por lo tanto, para lograr la sincronía es necesario inducir tal comportamiento mediante una acción de control y agregando las conexiones necesarias, dando lugar a la **sincronización controlada**[22]. Dicha acción de control puede estar dada por una estrategia de control centralizadas o descentralizada. El

control centralizado consiste en controlar al sistema multi-agente desde algún procesador central. El **control descentralizado** (control distribuido) consiste en asignar a cada agente un algoritmo de control que sólo requiere de la información local proveniente de los agentes vecinos. No obstante, una de las ventajas que ofrece el control descentralizado es que el esfuerzo computacional se ve reducido.

La sincronización controlada dependiendo de la formulación del problema puede ser **interna** o **externa** [35]. La **sincronización interna** es lograda como resultado de todas las interacciones del sistema, por ejemplo los SMA basados en un esquema cooperativo. Mientras que la **sincronización externa**, es predeterminada por un elemento dominante del sistema multi-agente, por ejemplo los SMA basados en el esquema coordinado [35].

La coordinación según Malone y Crowstone es: *el hecho de manejar las interdependencias entre las actividades realizadas para lograr un objetivo en común* [34]. Mientras que en [53], se define como **la capacidad de dos o más agentes para alcanzar en conjunto un consenso sobre las actividades realizadas en un entorno**. La **coordinación** proporciona unicidad en los comportamientos de los agentes. En síntesis, **el objetivo del comportamiento coordinado en un SMA es evitar situaciones de conflicto entre los agentes** [51]. Mientras tanto, la **cooperación es el hecho de actuar y compartir información o tareas para lograr un objetivo en común** [55]. El comportamiento cooperativo proporciona flexibilidad y maniobrabilidad en un SMA [35], lo cual da lugar a un marcado interés en los SMA, cuya motivación recae en el hecho de que **existen tareas que pueden ser realizadas de manera más eficiente por un conjunto de robots que por un solo robot**, inclusive existen tareas no pueden ser realizadas por un solo robot. Por ejemplo los robots limpiadores, los cuales tienen como objetivo realizar las labores de limpieza para disminuir la intensidad del trabajo [56], esta tarea puede ser realizada más rápidamente si para ello se emplea un grupo de robots.

El control de formación es una aplicación del comportamiento cooperativo de gran interés, por ejemplo en las tareas de vigilancia y exploración, en donde, los robots se mueven manteniendo una formación para maximizar sus capacidades de detección. En tareas de manipulación de objetos grandes, los robots se mueven manteniendo una formación rígida para mover algún objeto de gran tamaño (Ver mientras son guiados por un agente líder [49]).

Para dar solución al problema de control de control de formación y movimiento coordinado, se han reportado varios métodos en la literatura, de los cuales se mencionan los **métodos de estructura virtual**, en [41, 36] el sistema multi-agente es considerado como una sola estructura rígida o ente, y entonces la trayectoria deseada es asignada a la estructura mientras ésta mantiene una formación rígida.

Los **métodos basados en comportamiento** [30], que consisten en prescribir varios comportamientos deseados para cada robot, y la acción final de cada robot se deriva mediante la ponderación de la importancia relativa de cada comportamiento.

El concepto básico de los **métodos de campo de potencial** es ocupar el espacio de trabajo del robot con un campo de potencial artificial, en donde el robot es atraído a la posición de destino y es repelido de los obstáculos (Figura 1.1) [18, 60].

Los **métodos de Líder-Seguidores** [3] consisten en asignar uno o más agentes como líderes, y un grupo de agentes como seguidores. Entonces, se especifica la trayectoria deseada del líder, y también las orientaciones y posiciones relativas entre el líder y los seguidores.

En los **métodos basados en teoría de grafos**, la topología de interconexión es representada por un grafo tal como el que se muestra en la Figura 1.2, donde un nodo es relacionado con los estados de cada agente. Mientras que los arcos que unen a los nodos, representa la comunicación [59, 5] o distancias relativas entre los agentes [20]. La teoría de grafos consiste en

el análisis de gráficas, las cuales están conformadas por nodos o vértices interconectados mediante arcos. Además, provee algoritmos y herramientas que resultan ser útiles para el modelado y análisis de una red de comunicación. Por lo tanto, es posible obtener información sobre la estabilidad de alguna formación en base a la topología de interconexión. Por otra parte, cuando el control descentralizado se volvió un área de estudio en el año 1970, los investigadores usaron la teoría de grafos para modelar las interconexiones en los sistemas multi-agente [16].

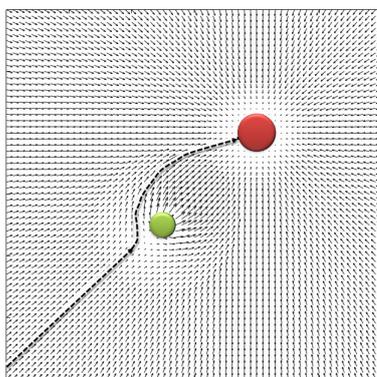


Figura 1.1: Campo de potencial generado por dos comportamientos; repulsión y atracción.

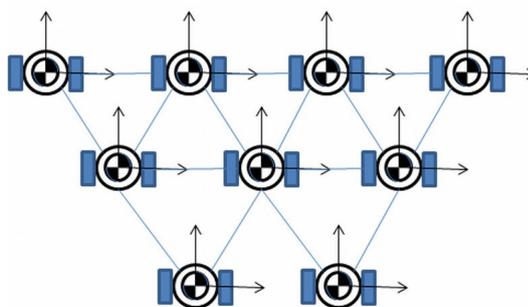


Figura 1.2: Sistema de múltiples agentes interconectados.

1.2 Antecedentes

En [44] se propone un control de sincronización interna, que consiste en la retroalimentación de estado entre cada miembro del sistema multi-agente. Se toma en cuenta que está disponible una trayectoria deseada global, y que se conoce la posición angular de los agentes que conforman al conjunto. Una aplicación potencial de este enfoque es la teleoperación, en donde la referencia global del sistema es generada por un agente líder manipulado directamente por el operador. Mientras que la posición angular de los robots seguidores, converge a la posición angular del robot líder de manera sincronizada. Este algoritmo de control no puede ser aplicado directamente al control de formación de robots móviles. Por otra parte, la topología de interconexión es fija y puede presentar complicaciones de implementación para grupos grandes de robots, esto debido a que la información del i -ésimo robot es transmitida a todos los robots del sistema, entonces el número de interconexiones del i -ésimo robot aumenta conforme el número de robots del sistema aumenta. Además, se requiere definir una referencia global, la cual deberá estar disponible para todos los robots del conjunto.

En [48] se propone un algoritmo de control para la estabilización de trayectoria de un robot móvil tipo unicycle. A partir de que se conoce la velocidad angular de las ruedas, el control incorpora técnicas de acoplamiento cruzado (*cross-coupling*) en una arquitectura de control adaptivo. La técnica del *cross-coupling* es usada para minimizar el error más significativo (error de sincronización entre las ruedas), y de esta manera garantizar la convergencia del error a cero. La ventaja de este algoritmo radica en la posibilidad de evitar las restricciones no-holónicas involucradas en el sistema, y que sólo requiere de la información. Sin embargo, debido a que el control está basado en la técnica del acoplamiento cruzado, el control está restringido a tareas específicas, esto es debido a que es necesario definir los parámetros de acoplamiento cruzado en función de la tarea definida, que en este caso es el seguimiento de una trayectoria curva. Por otra parte, el robot puede ser estabilizado en los estados deseados bajo

la condición de que el error inicial de posición y orientación en el plano coordenado del robot sea cero.

En [35] se propone una extensión del control de sincronización mutua para el caso de control de seguimiento de un robot móvil tipo unicycle, el cual está basado en la técnica del acoplamiento cruzado. Se hace la suposición de que no es posible medir algunos componentes del estado de cada agente. Por lo que la velocidad angular de las ruedas es estimada por medio de un observador. La técnica del acoplamiento cruzado es aplicada para minimizar el error de sincronización de las ruedas. El control está restringido a tareas específicas, que en este caso es el seguimiento de una trayectoria curva, y sólo puede ser estabilizado en los estados deseados bajo la condición de que el error inicial es cero.

En [5] se presenta un control de sincronización descentralizado. En este algoritmo de control se utiliza la linealización por retroalimentación de entrada y salida para transformar las dinámicas no lineales y heterogéneas de los agentes en dinámicas lineales e idénticas y dinámicas internas no idénticas, respectivamente. El control propuesto está basado en los métodos de teoría de grafos, en donde la representación de las interconexiones entre los agentes seguidores está dada por la matriz **Laplaciana**. Además, la referencia deseada global es variable y es generada por un agente aislado, el cual es denominado líder. Sin embargo, este algoritmo de control no puede ser directamente aplicado al control de formación de robots móviles. El error del N -ésimo agente con respecto al líder puede ser acumulativo, por lo que es necesario ajustar las ganancias para reducir este error. Por otra parte, se demuestra que el error de sincronización es acotado y que la estabilidad del sistema es asintótica.

En [14] se propone un algoritmo de control de formación y de sincronización. El control está basado en los métodos de comportamiento y la técnica de acoplamiento cruzado, para minimizar

el error más significativo, que en este caso es el error de sincronización. Además, se asume que es posible medir la orientación y las coordenadas en el plano cartesiano de cada agente, y que el sistema multi-agente está conformado por robots con tracción diferencial. La desventaja radica en que este algoritmo puede presentar singularidades para ciertos valores del ángulo de orientación, por lo que para evitar ciertas singularidades es necesario definir adecuadamente las trayectorias deseadas. Además, debido a que está basado en la técnica del acoplamiento cruzado, el algoritmo de control es formulado dependiendo de la tarea a realizar, por ejemplo mantener una formación elíptica o cuadrada.

En [30] se propone un control descentralizado de formación y sincronización basado en los métodos de comportamiento, el cual utiliza técnicas de linealización por retroalimentación de entrada-salida. El algoritmo de control consiste en prescribir los patrones de formación para cada uno de los agentes del sistema multi-agente. Se asume que los patrones de formación son constantes y han sido diseñados de tal forma, que es posible evitar las colisiones entre los agentes cuando pasan de una formación a otra. Por lo tanto, la estabilidad no está garantizada para trayectorias variables en el tiempo. Este algoritmo de control no es robusto ante incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas. Además, no es posible redefinir la topología de interconexión.

En [40] se presenta un control de formación y de trayectoria para robots del tipo diferencial, el cual está basado en los métodos de Líder-Seguidores y métodos basados en teoría de grafos. Dicho controlador garantiza llevar el centroide de la formación a lo largo de la trayectoria generada por el líder virtual, mientras que los robots del conjunto mantienen la formación deseada. Las interconexiones entre los agentes son representadas mediante la matriz **Laplaciana**. Sin embargo, la trayectoria del agente líder deberá estar disponible para todos los agentes del conjunto.

En [20] se propone un control de formación descentralizado basado en métodos de campos de potencial y teoría de grafos, en el cual se considera que el sistema multi-agente es conformado por múltiples robots omnidireccionales. La metodología del algoritmo consiste en aplicar un gradiente negativo conformado por funciones de potencial atractivas (APF), para garantizar la convergencia global a los patrones de formación deseados. Mientras que las funciones de potencial repulsivas (RPF), se usan para evitar las colisiones. El sistema multi-agente es representado por un grafo dirigido, en donde las interconexiones y distancias relativas entre los robots son representadas por la matriz **Laplaciana**. Sin embargo, debido a los posibles escenarios de colisión, este algoritmo puede mostrar complejidad en el análisis de estabilidad de la formación, esto es debido a la presencia de equilibrios no deseados, por lo que el análisis de estabilidad se realiza sin tomar en cuenta a los equilibrios no deseados.

1.3 Planteamiento del Problema y Estructura de la Tesis

Este trabajo de tesis de maestría tiene como objetivo general dar una solución al problema de **control de formación y movimiento coordinado** de un sistema multi-agente conformado por un conjunto de robots móviles tipo unicyclo. El problema de control de formación y movimiento coordinado consiste en **construir una ley de control descentralizada que garantice llevar las trayectorias de un conjunto de N agentes seguidores a las trayectorias generadas por un agente líder en un plano coordenado mientras mantienen una formación rígida.**

Para dar solución al problema planteado, se proponen dos controladores basados en el esquema descentralizado, los cuales están basados en los métodos Líder-Seguidores y en los esquemas cooperativo y coordinado. El primer controlador está basado en el algoritmo de control presentado en [30], el cual ha sido modificado al ser combinado con el esquema coordinado,

de modo que garantiza la estabilidad asintótica del equilibrio ante trayectorias variantes con el tiempo, este control, sólo requiere de la información de dos robots adjuntos y del líder. El segundo controlador propuesto está basado en el algoritmo de control presentado en [58, 6], cuya modificación permite reducir el error con respecto al líder a cero, en este control es posible redefinir la topología de interconexión y no es necesario que la información del agente líder esté disponible para algunos de los agentes del conjunto, la estabilidad asintótica del equilibrio está garantizada para trayectorias variantes con el tiempo, esto bajo ciertas condiciones dependiendo de la topología de interconexión. Finalmente, se propone un enfoque de control basado en algoritmo super-twisting adaptivo (ASTA), el cual garantiza la estabilidad asintótica ante perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas. En este enfoque de control, es posible redefinir la topología de interconexión, y no es necesario que la información del líder esté disponible para algunos los agentes.

En este trabajo de tesis se asume lo siguiente: la topología de interconexión es cuasi-estática, es decir, que la topología de interconexión puede ser redefinida fuera de línea, ya que la estabilidad está garantizada para una interconexión constante en el sistema multi-agente cuando $t \rightarrow \infty$; sólo existe un arco por cada par de nodos en el grafo o par de agentes en el sistema multi-agente; se considera que no existe deslizamiento, es decir, que el deslizamiento de las ruedas con respecto a la superficie es nulo. La suposición anterior, es común en muchos de los trabajos teóricos sobre el control de robots móviles tipo unicycle.

En el Capítulo 1 se presenta una introducción a los sistemas multi-agente. También, se presentan algunos de los métodos existentes en el control de formación y movimiento coordinado de sistemas multi-agente. Además, se muestra un estado del arte consistente en el tema de sincronización y control de formación. En el Capítulo 2 se muestran preliminares matemáticas tales como notaciones y definiciones. En el Capítulo 3 se realiza una revisión de los modelos,

tanto cinemáticos como dinámicos, de robots móviles con tracción diferencial, así como estrategias de control de postura, seguimiento de trayectoria y posición de un solo robot móvil. En el Capítulo 4 se hace una revisión de leyes de control de formación y de movimiento coordinado para sistemas multi-agente presentes en la literatura. En el Capítulo 5 se proponen tres enfoques de control descentralizado basados en el esquema cooperativo y coordinado, para dar solución al problema de control de formación y movimiento coordinado, esto para un conjunto de N robots móviles tipo unicycle, cuya dinámica no lineal de cada robot es descompuesta en sistemas MIMO con dinámicas lineales homogéneas. Finalmente, en el Capítulo 6 se presentan los resultados de las simulaciones.

1.3.1 Conclusiones

En este capítulo se presentó una introducción a la sincronización de sistemas multi agente. Además, se mostraron los antecedentes históricos relacionados con el control de movimiento coordinado, y algunos métodos reportados en la literatura para dar solución al problema de control de sincronía y coordinación de sistemas multi-agentes. Luego, el problema de seguimiento coordinado es presentado para un grupo de N robots móviles seguidores del tipo unicycle. Posteriormente, se muestra un estado del arte y la distribución de la presente tesis.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Introducción

En este capítulo se presentan las herramientas, así como conceptos y definiciones utilizadas a lo largo de este documento.

2.2 Grafos

Una de las herramientas más utilizadas para el análisis de sistemas complejos es la teoría de grafos (véase [39]). Un grafo es una representación gráfica de una red, la cual está compuesta por conjuntos de nodos o vértices y arcos o enlaces tal como se muestra en la Figura 2.1. La presencia de un arco entre dos nodos indica la existencia de interacción entre dichos vértices, esta interacción puede ser unidireccional o bidireccional [47].

Un grafo consiste de nodos situados en un espacio N -dimensional, con arcos que conectan pares de nodos adyacentes entre sí [12]. En la teoría de grafos pueden distinguirse dos vertientes: El de los grafos no dirigidos, y el de los grafos dirigidos (también conocidos como *digrafos*). Sin

embargo, a pesar de que ambos campos tienen numerosas aplicaciones importantes, el estudio de los grafos no dirigidos es mucho más amplio que el de los grafos dirigidos, esto debido a que el análisis de redes con grafos dirigidos puede presentar mayor complejidad [17].

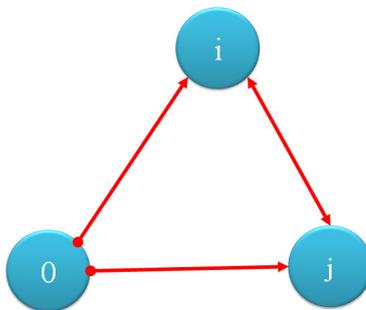


Figura 2.1: Grafo dirigido conformado por tres nodos, dos arcos unidireccionales y un arco bidireccional.

Un digrafo o grafo dirigido \mathcal{G} consiste de un conjunto finito no vacío $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, \dots, V_N\}$ de elementos llamados vértices o nodos, de un conjunto finito $\varepsilon = \{(i, j) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}\}$ de pares ordenados de distintos vértices llamados arcos, y una matriz de adyacencia $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$, donde los pesos de las uniones $a_{ij} \neq 0$ si $(V_i, V_j) \in \varepsilon$, de otro modo $a_{ij} = 0$ [17]. De una manera más formal, un digrafo puede definirse como:

Definición 2.2.1. [17]. *Un grafo dirigido es una dupla $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \varepsilon\}$, la cual consiste de un conjunto de vértices $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, \dots, V_N\}$, y de un conjunto de arcos $\varepsilon = \{(i, j) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}\}$ con $i \neq j$.*

Ahora se presentaran algunas definiciones, que serán utilizadas en capítulos posteriores.

Definición 2.2.2. [10]. *Dado el grafo dirigido $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \varepsilon\}$, la matriz de adyacencia $A(\mathcal{G})$ es definida como: $a_{ij} = 1$ sí y sólo sí existe un arco dirigido del nodo i al nodo j .*

Definición 2.2.3. [52]. D es una matriz diagonal de dimensión $|\mathcal{V}| \times |\mathcal{V}|$, cuyo i -ésimo elemento de la diagonal es el grado de incidencia del i -ésimo vértice, i.e., $D = (d_{ij})$ con $d_{ii} = d(i)$ y $d_{ij} = 0, \forall i \neq j$, con $d(i)$ como el número de arcos incidentes en el nodo i .

La matriz **laplaciana**, como una alternativa para representar las interconexiones entre los agentes, es definida de la siguiente manera:

Definición 2.2.4. [52]. Dado el grafo dirigido $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \varepsilon\}$ se puede calcular como:

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}) = D - A(\mathcal{G}) = \begin{cases} d_i & i = j \\ -1 & (i, j) \in \varepsilon \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En [20], se plantea un concepto de grafo de formación para sistemas multi-agente dado por

Definición 2.2.5. [20]. Un grafo de formación es una tripleta $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \varepsilon, C\}$, el cual consiste de un conjunto de vértices $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, \dots, V_N\}$, relacionado con cada miembro del sistema multi-agente, de un conjunto de arcos $\varepsilon = \{(j, i) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}\}$ con $i \neq j$ que corresponden a las interconexiones entre los agentes, y un conjunto de vectores $C = \{c_{ji}\}, \forall (j, i) \in \varepsilon$ que especifica la posición relativa entre el agente i y j .

El interés en la teoría de grafos, radica en la posibilidad de que las interacciones o comunicación en un SMA sea representado por un digrafo, donde los arcos representan la comunicación uniforme entre los agentes (Figura 1.2) y están definidos por pesos de 1 o 0. Sin embargo, la Definición 2.2.5 puede entrar en conflicto con otras definiciones reportadas en la literatura orientada a teoría de grafos. Por lo tanto, considérese la siguiente definición:

Definición 2.2.6. [58]. La transpuesta de un digrafo $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \varepsilon\}$ es otro digrafo $\hat{\mathcal{G}} = \{\mathcal{V}, \hat{\varepsilon}\}$, con el mismo número de vértices \mathcal{V} y todos los arcos inversos, esto es $(V_i, V_j) \in \varepsilon \iff (V_j, V_i) \in \hat{\varepsilon}$.

Considerando que existe sólo un arco por cada par de nodos (de lo contrario es denominado multigrafo dirigido), el cual puede ser unidireccional o bidireccional, a partir de las definiciones 2.2.5 y 2.2.6, y asumiendo que no existen autolazos o bucles en cada nodo (esto es $a_{i,i} = 0 \quad (i, i) \in \varepsilon$). Entonces se presenta la siguiente definición de **digrafo**:

Definición 2.2.7. *Un **digrafo** es una tripleta $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \hat{\varepsilon}, \hat{\mathcal{A}}\}$, que consiste de un conjunto de vértices $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, \dots, V_N\}$, relacionado con cada miembro del sistema multi-agente, de un conjunto de arcos $\hat{\varepsilon} = \{(j, i) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}\}$ con $i \neq j$ que corresponden a las interconexiones entre los agentes, y la matriz de adyacencia $\hat{\mathcal{A}} = [a_{ji}] \in \mathfrak{R}^{N \times N}$, $\forall (j, i) \in \hat{\varepsilon}$ que especifica las interacciones entre los agentes i y j , siendo la matriz laplaciana del **digrafo** \mathcal{G} dada por $L(\mathcal{G}) = \mathcal{L}(\mathcal{G})^T$, la cual es una representación abstracta de las interacciones entre los agentes.*

Las interacciones de un SMA constituido de un sólo líder, donde sólo existe una interconexión unidireccional del líder a los agentes seguidores, puede ser representado por un **digrafo**, el cual es conexo si existe un árbol de expansión. De modo que puede establecerse el Lema 2.1.1.

Lema 2.2.1. [42]. *Un grafo dirigido $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \hat{\varepsilon}, \hat{\mathcal{A}}\}$ tiene un árbol de expansión dirigido, sí y sólo sí la matriz **laplaciana** $L(\mathcal{G})$ tiene un valor propio cero con multiplicidad uno correspondiente al vector propio 1, y todos los demás valores propios tienen parte real positiva.*

A partir del Lema 2.2.1 se distinguen las siguientes dos propiedades:

1. $\lambda_1 = 0$.
2. $Re(\lambda_j) > 0$ para $j = 2, 3, 4, \dots, N$; sí y sólo sí \mathcal{G} contiene un árbol de expansión dirigido.

Por otra parte, las interacciones de N agentes seguidores con un agente líder (denotado por el subíndice o) están representadas por la matriz G , la cual es definida a continuación.

Definición 2.2.8. [58]. G es una matriz diagonal de dimensión $N \times N$, cuyo i -ésimo elemento $g_i \in 0, 1$ es diferente de cero solo para los agentes que están directamente conectados con el agente líder, i.e., $G = (g_i)$ con $g_i = g(i)$ y $g_{ij} = 0, \forall i \neq j$; con $g(i) = 1$ si hay una conexión directa entre el i -ésimo agente y el agente líder, mientras que $g(i) = 0$ cuando no hay tal conexión.

Finalmente, se define la matriz laplaciana para un conjunto de robots seguidores $\tilde{L}(\tilde{\mathcal{G}}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$,

Definición 2.2.9. *Considere un sistema multi-agente conformado por $p = N + 1$ agentes cuya representación abstracta está dada por el grafo dirigido $\dot{\mathcal{G}}$. Supóngase que existe un nodo aislado que corresponde al agente líder, el cual es independiente de todos los demás agentes y proporciona una referencia global. Entonces el grafo dirigido $\tilde{\mathcal{G}}$ representa las interacciones entre los N agentes seguidores del digrafo $\dot{\mathcal{G}}$. Por lo tanto, $\tilde{L}(\tilde{\mathcal{G}}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ representa las interacciones entre los agentes seguidores.*

2.2.1 Ejemplo: Grafo dirigido

Considérese un SMA cuyas interacciones son representados un grafo dirigido, el cual es conformado por tres nodos tal como se muestra en la Figura 2.2, en donde el nodo aislado es denotado por el subíndice 0. Mientras que los elementos $i = 1, 2, \dots, N$; corresponden a los agentes seguidores. La matriz de adyacencia contiene información referente al flujo de información, y las interacciones entre los elementos del sistema multi-agente. Por lo tanto, las interacciones son representadas mediante pesos binarios en la matriz de adyacencia [54]. Entonces, la matriz de adyacencia esta dada por

$$\mathcal{A}(\mathcal{G})^T = \dot{\mathcal{A}}(\dot{\mathcal{G}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz de grado está dada por

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Entonces, se tiene la siguiente matriz **laplaciana**

$$L(\dot{\mathcal{G}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.2.1)$$

De la matriz (2.2.1) resulta

$$\tilde{L}(\tilde{\mathcal{G}}) + G = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (2.2.2)$$

donde las interconexiones entre los agentes seguidores está dada por $\tilde{L}(\tilde{\mathcal{G}})$, mientras que las interconexiones con el agente líder son representadas por G . Nótese que los valores propios de la matriz laplaciana dada por (2.2.1) son $\lambda = \{0, 1, 3\}$, en donde el valor propio $\lambda_0 = 0$ corresponde al agente líder, mientras que λ_j para $j = 1, 2, \dots, N$; son positivos, entonces el grafo dirigido $\dot{\mathcal{G}}$ es conexo debido a que contiene un árbol de expansión dirigido (véase, Lema 2.2.1).

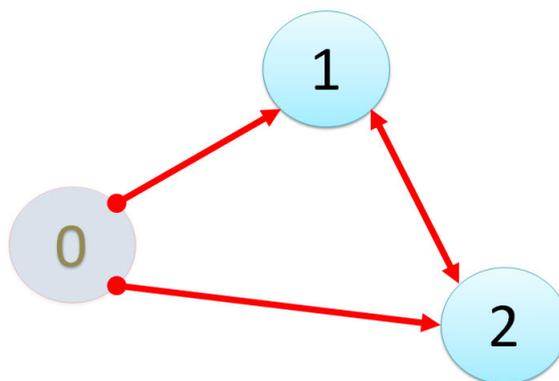


Figura 2.2: Grafo dirigido de tres nodos.

2.3 Sincronización

El concepto de control de movimiento de múltiples agentes es discutido en términos de diferentes formas de sincronización: Cooperación, donde todos los agentes contribuyen en igualdad, y coordinación, donde se requiere que un agente del SMA tome el papel de líder, cuyo movimiento es independiente del movimiento de los otros agentes, y gobierna el movimiento de los seguidores. Entonces, el comportamiento del líder no es afectado si algún seguidor es perturbado [27].

En [24], una red conformada por N sistemas con dinámicas lineales idénticas es asintóticamente sincronizada si

$$x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t) = s(t) \quad \text{para } t \rightarrow \infty ,$$

en donde $s(t)$ son los estados de un sistema predominante, y $x_i \in \mathfrak{R}^n$ son las variables de estado del i -ésimo sistema para $i = 1, 2, \dots, N$; entonces la sincronización puede definirse como

Definición 2.3.1. [15]. Dado una SMA conformado por N agentes seguidores y un agente líder con dinámicas lineales idénticas, los cuales se desplazan en un plano coordenado bidimensional

bajo una topología de interconexión definida, es asintóticamente sincronizable si todas las velocidades de los agentes seguidores $\dot{\Pi}_i \forall i = 1, 2, \dots, N$; convergen a una velocidad de equilibrio dada por el agente líder $\dot{\Pi}_o$, esto es,

$$\dot{\Pi}_1 = \dot{\Pi}_2 = \dots = \dot{\Pi}_N \longrightarrow \dot{\Pi}_o \quad t \rightarrow \infty, \quad (2.3.1)$$

en donde $\dot{\Pi}_i$ corresponde a las velocidad del i -ésimo robot seguidor, mientras que $\dot{\Pi}_o$ corresponde a la velocidad del agente líder.

2.4 Álgebra de Kronecker

El producto de Kronecker, escrito con el símbolo \otimes , es un operador usado en el álgebra matricial.

El producto de dos matrices $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ y $B \in \mathfrak{R}^{p \times q}$, está definido como

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{mp \times nq}.$$

Por otra parte, el producto Kronecker cumple con las siguientes propiedades. Sean las matrices A, B, C, y D, con las dimensiones apropiadas [31]. Entonces

1. $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$.
2. $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$.
3. $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$.
4. $(\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B)$, donde α es constante.

Notación. La siguiente notación se usará en algunos de los apartados posteriores:

- I_N denota a una matriz identidad de dimensión $N \times N$.
- $\mathbf{1}_n = [1, 1, \dots, 1]^T \in \mathfrak{R}^n$.
- $\lambda_{\min}(A)$ y $\lambda_{\max}(A)$ denotan al valor propio más pequeño diferente de cero y al valor propio más grande de la matriz A .

2.5 Conclusiones

En este capítulo se presentaron definiciones que serán utilizadas en apartados posteriores. El SMA de interés en este trabajo de tesis, está conformado por N agentes seguidores y un agente líder, donde existe una conexión unidireccional del agente líder hacia los N robots seguidores, los cuales son asintóticamente sincronizables si las velocidades de todos los robots seguidores convergen a la velocidad del robot líder.

Capítulo 3

Robots Móviles

3.1 Introducción

En [29] un robot móvil es definido como un vehículo de propulsión autónoma y movimiento programado por medio de control automático para realizar una tarea específica. Los robots móviles son sistemas muy versátiles y pueden ejecutar una tarea con gran destreza [48]. Además, a diferencia de los robots manipuladores, los robots móviles no están restringidos a operar en un área de trabajo finita, estos tienen diversas aplicaciones tales como la inspección, vigilancia y control de operaciones a distancia.

En este capítulo, se presentan modelos matemáticos que describen la dinámica y cinemática de un robot móvil, los cuales serán utilizados para diseñar leyes de control de posición y de trayectoria para robots móviles **tipo unicycle**, el cual es **un vehículo con dos ruedas motoras independientes en un solo eje y una rueda libre que permite mantener el equilibrio** [28], cuya tracción es del tipo diferencial. El modelo cinemático describe como una función del tiempo el movimiento espacial del robot [4]. En cambio, el modelo dinámico describe el comportamiento del robot móvil, considerando las fuerzas que actúan en el sistema.

Por otra parte, en lo referente al control de robots móviles, en los últimos años se han abordado los problemas de control: de postura, seguimiento de trayectoria y control de posición. El control de postura, consiste en controlar la traslación y la orientación del robot móvil. El control de seguimiento de trayectoria, consiste en garantizar que posición del robot móvil converga a las trayectorias deseadas. El control de posición consiste en llevar a las variables de posición (x, y) del robot móvil a las posiciones cartesianas deseadas (x_d, y_d) .

En este capítulo, se hace una revisión de las leyes de control de postura, de seguimiento de trayectoria y control de posición para robots móviles tipo unicycle. La ley de control de postura está basada en el modelo cinemático expresado en coordenadas polares; basado en el modelo cinemático no-holonómico, el cual presenta restricciones de velocidad, una ley de control de seguimiento de trayectoria es introducida. Finalmente, se presenta una ley de control de posición, el cual está basado en el modelo dinámico obtenido a partir de la formulación de Lagrange.

3.2 Configuraciones de robots con ruedas

En este apartado se presentan cuatro diferentes tipos de locomoción para los robots móviles, que les confieren características y propiedades respecto a maniobrabilidad, controlabilidad y estabilidad. En general existe una correlación inversa entre maniobrabilidad y controlabilidad [46].

3.2.1 Configuración Sincrona (Sincro Drive)

La configuración sincrona consiste en la acción sincronizada de todas las ruedas tal como se muestra en la Figura 3.1, donde un motor de tracción (drive motor) ajusta la velocidad de

las tres ruedas simultáneamente, mientras que el motor de dirección (steering motor) orienta las ruedas al mismo tiempo en una dirección definida. La configuración sincrona garantiza el desplazamiento en línea recta, y es particularmente ventajosa en casos donde la omnidireccionalidad es requerida. Sin embargo, debido a las constantes variaciones de velocidad el robot presenta un error grande en la orientación del chasis. Otra desventaja es que no existe control sobre la orientación del chasis. Por otra parte, en términos de estimación de posición "dead reckoning", la configuración sincrona es superior a la configuración omnidireccional, pero inferior a los sistemas con configuración diferencial y Ackerman [46].

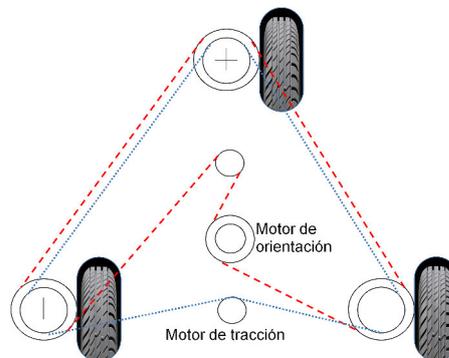


Figura 3.1: Configuración sincrona: El robot puede moverse en cualquier dirección, sin embargo, la orientación del chasis no es controlable.

3.2.2 Configuración Omnidireccional

La configuración omnidireccional está basada en la utilización de tres ruedas de tracción y de orientación tal como se muestra en la Figura 3.2. Dicha configuración tiene tres grados de libertad, y puede posicionarse en cualquier punto de un espacio bidimensional a una orientación definida. Para esta configuración, debido a la su arquitectura, el desplazamiento en línea recta no está garantizado [46].

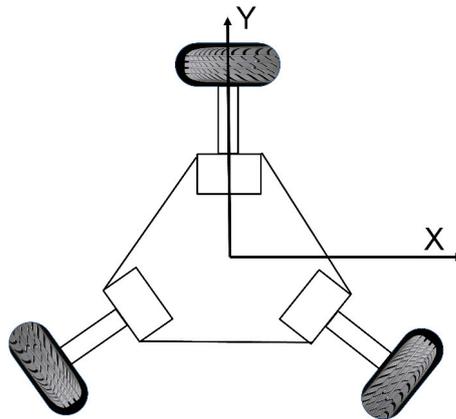


Figura 3.2: Diagrama de la configuración de robot omnidireccional.

3.2.3 Configuración Oruga (Slip/Skid Steer)

La locomoción basada en este concepto, se dispone de varias ruedas o bandas en las laterales del vehículo, como se ve en la Figura 3.3, que son usadas para posicionar y orientar al robot. Las ruedas pueden ser accionadas en la misma dirección, a diferentes velocidades o en dirección contraria. Los tanques del ejército y los tractores utilizados en la construcción son ejemplos de robots móviles basados en este concepto. La ventaja que presenta esta configuración es que existe una elevada capacidad de maniobra en múltiples terrenos, esto debido a que existe mayor área en contacto con el suelo. Sin embargo, la posición exacta del centro geométrico es difícil de estimar, ya que las ruedas o bandas presentan un alto derrape durante el giro. Además, el cambio exacto de la posición y la orientación está sujeto a variaciones dependiendo de la fricción del suelo Slip/Skid [46].

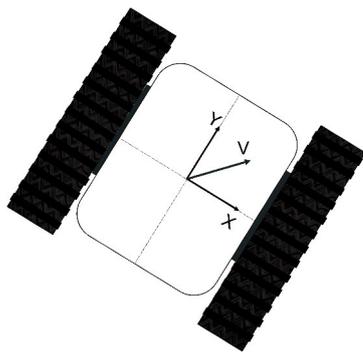


Figura 3.3: Diagrama de un robot móvil con configuración oruga.

3.2.4 Configuración Diferencial

Esta configuración consiste de dos ruedas motoras y una o dos ruedas libres, como se muestra en la Figura 3.5. El desplazamiento y orientación del robot móvil está en función de la diferencia de velocidades de las ruedas. Por otra parte, el movimiento es gobernado por la acción combinada de la velocidad angular ω y el vector de velocidad lineal u .

Los robots móviles tipo unicycle son robots cuya tracción está basada en este concepto, los cuales poseen ventajas como la alta movilidad, alta tracción con ruedas neumáticas, y una simple configuración de ruedas [57]. Debido a esto, la configuración de tracción diferencial ha sido utilizada para la construcción y la automatización del mantenimiento de carreteras. Sin embargo, la trayectoria en línea recta no está garantizada debido a la complejidad del control. Además, el robot debe ser completamente simétrico.

3.3 Modelo cinemático

La cinemática estudia el movimiento del un robot considerando un sistema de referencia dado, mientras que un modelo cinemático relaciona posiciones, velocidades y orientación. En esta

sección, se revisan algunos modelos cinemáticos para un robot tipo unicycle bajo la hipótesis de que las ruedas del robot no se deslizan sobre la superficie de desplazamiento, siendo ésta es una limitación significativa en los robots móviles, incluso dependiendo de las características del terreno, también pueden presentarse deslizamientos y vibraciones.

3.3.1 Modelo cinemático no-holonómico

La posición y orientación del robot móvil tipo unicycle pueden ser descritos por la coordenada (x, y) y el ángulo θ respectivamente, la posición y orientación son medidas con respecto a un sistema de referencia fijo.

En el robot no-holonómico (ver Figura 3.4), la velocidad (\dot{x}, \dot{y}) está restringida en una sola dimensión, mientras que la posición del centro geométrico (x, y) no tiene restricción en el plano. El modelo cinemático (3.3.1) tiene la característica de ser no-holonómico, es decir, tiene restricciones en la velocidad [13].

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \cos(\theta) \\ u \sin(\theta) \\ \omega \end{bmatrix}, \quad (3.3.1)$$

siendo u y ω la velocidad lineal en la dirección perpendicular al eje de sus ruedas y la velocidad angular respectivamente. Este modelo será usado en el diseño del control de seguimiento de trayectoria.

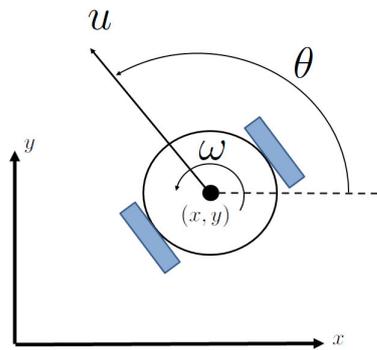


Figura 3.4: Robot tipo unicycle no-holonómico.

3.3.2 Modelo cinemático holonómico

Un robot móvil es holonómico si no tiene restricciones de velocidad en el plano coordenado, es decir, que la posición del robot móvil denotada por (x, y) puede moverse en cualquier dirección. Ahora considérese un robot móvil tipo unicycle, y supóngase que la posición (x, y) se encuentra a una distancia " a " del centro geométrico (eje imaginario que une las ruedas) tal como se muestra en la Figura 3.5. Entonces se obtiene un modelo holonómico dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \cos(\theta) - a\omega \sin(\theta) \\ u \sin(\theta) + a\omega \cos(\theta) \\ \omega \end{bmatrix}. \quad (3.3.2)$$

Este modelo presenta restricciones del tipo holonómicas para $a \neq 0$, las cuales no involucran variables de velocidad [30].

3.3.3 Modelo cinemático expresado en coordenadas polares

Otro modelo cinemático es presentado en [1], donde se asume que el robot móvil tipo unicycle está inicialmente posicionado a una distancia e_c diferente de cero. Ambas variables, el error

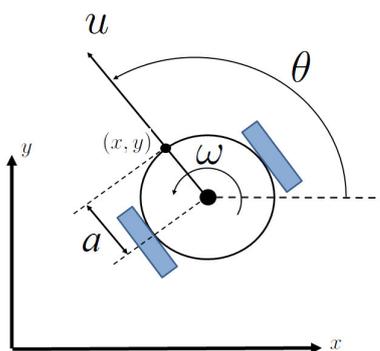


Figura 3.5: Posición del robot tipo unicycle a una distancia a .

de distancia e_c y la orientación β_c , son medidas con respecto a un sistema de referencia $\langle g \rangle$ tal como se muestra en la Figura 3.6. El modelo cinemático expresado en coordenadas polares está dado por

$$\begin{aligned} \dot{e}_c &= -u \cos(\beta_u) \\ \dot{\beta}_u &= -\omega + u \frac{\sin(\beta_u)}{e_c} , \\ \dot{\beta}_c &= u \frac{\sin(\beta_u)}{e_c} \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

que es válido para $e_c > 0$ debido a que los ángulos β_u y β_c son indefinidos cuando $e_c = 0$.

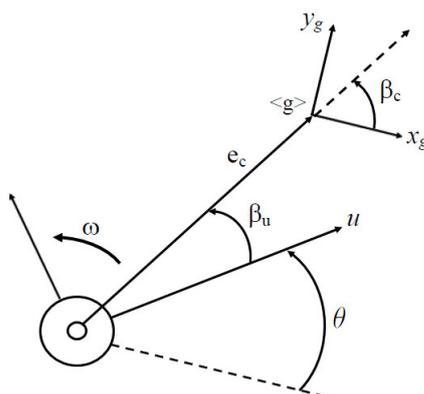


Figura 3.6: Posición del robot unicycle con respecto a un sistema de coordenadas $\langle g \rangle$.

3.4 Modelo dinámico

En esta sección, se realizara un estudio del modelo de la dinámica del robot móvil, la cual se ocupa de la relación entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo y el movimiento que en él se origina [4]. A diferencia del modelo cinemático, el modelo dinámico, además de relacionar posición y velocidad, también relaciona las fuerzas que actúan en el sistema. Por lo tanto, es posible conocer la relación entre el movimiento del robot y las fuerzas que actúan en el robot. A continuación se presentan dos modelos dinámicos de robot móvil, un modelo está basado en la formulación Euler-Lagrange y el otro modelo basado en la formulación presentada en [57].

3.4.1 Modelo dinámico estructura Euler-Lagrange

En esta sección, se presenta un modelo dinámico Euler-Lagrange para un robot móvil tipo unicycle con tracción de tipo diferencial.

A partir de la ecuación de Lagrange dada por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.4.1)$$

donde $q \in \mathfrak{R}^{1 \times n}$ es el vector coordenadas generalizadas, $\tau \in \mathfrak{R}^{1 \times n}$ es el vector de pares o fuerzas externas y $\mathcal{L}(q, \dot{q}) \in \mathfrak{R}$ corresponde a la función de Lagrange, la cual es definida como la diferencia entre la energía cinética $\mathcal{K}(q(t), \dot{q}(t))$ y la energía potencial $\mathcal{U}(q(t))$, es decir,

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{K}(q(t), \dot{q}(t)) - \mathcal{U}(q(t)). \quad (3.4.2)$$

Entonces, la estructura general del modelo dinámico es definido por

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau, \quad (3.4.3)$$

donde, la matriz de pares inerciales $M(q, \dot{q})$ es simétrica y definida positiva de dimensión $n \times n$; $C(q, \dot{q})$ es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis, que es una matriz de dimensión $n \times n$ y satisface la siguiente propiedad

$$\dot{q}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, \dot{q}) \right] \dot{q} = 0, \quad \forall q, \dot{q} \in \mathfrak{R}^n. \quad (3.4.4)$$

Finalmente, $G(q)$ denota al vector de pares gravitacionales, el cual es de dimensión $n \times 1$.

A partir de la formulación lagrangiana, el modelo dinámico no lineal de un robot tipo unicycle, donde el centro de masa se encuentra ubicado en el centro geométrico, está descrito por

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}, \quad (3.4.5)$$

donde m y I_z corresponden a la masa y el momento de inercia del robot móvil, respectivamente; \dot{u} es la aceleración lineal; $\dot{\omega}$ es la aceleración angular; $\tau = [\tau_1 \quad \tau_2]^T$ corresponde al vector de fuerzas externas.

Si la posición del robot móvil $q = [x \quad y]^T$ se encuentra a una distancia a del centro geométrico, entonces la velocidad del robot móvil en el plano coordenado está descrita por

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -a \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & a \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} \quad (3.4.6)$$

de la cual se concluye que

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\frac{1}{a} \sin(\theta) & \frac{1}{a} \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\omega \sin(\theta) & \omega \cos(\theta) \\ -\frac{\omega}{a} \cos(\theta) & -\frac{\omega}{a} \sin(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}. \quad (3.4.7)$$

Por lo tanto, sustituyendo (3.4.7) en (3.4.5), el modelo dinámico puede escribirse en función de la posición del punto $q = [x \ y]^T$ en el plano coordenado como

$$\begin{bmatrix} m \cos(\theta) & m \sin(\theta) \\ -\frac{I_z}{a} \sin(\theta) & \frac{I_z}{a} \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m\omega \sin(\theta) & m\omega \cos(\theta) \\ -\frac{I_z}{a}\omega \cos(\theta) & -\frac{I_z}{a}\omega \sin(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}, \quad (3.4.8)$$

el cual es **válido en los intervalos** $\theta \in [0 \ \frac{\pi}{2})$, de modo que $\cos(\theta) > 0$. u y ω son la velocidad lineal y la velocidad angular, respectivamente; la orientación del robot es denotado por θ ; $\dot{q} = [\dot{x} \ \dot{y}]^T$ y $\ddot{q} = [\ddot{x} \ \ddot{y}]^T$ corresponden a la velocidad y aceleración en el plano coordenado; a es una distancia que es definida a partir del centro geométrico. Nótese que el término correspondiente a los pares de fuerzas gravitacionales son nulos, esto es debido a que el robot móvil se desplaza en un plano bidimensional horizontal, donde el gradiente de la energía potencial es nulo. Por otra parte, el ángulo θ es calculado a partir de $q = [x \ y]^T$, el cual es definido para $x \neq 0$.

3.4.2 Modelo dinámico expresado en variables de estado

Otro tipo de formulación para un modelo dinámico de un robot móvil con tracción diferencial holonómico con dos ruedas accionadas y una libre es presentado en [57]. El modelo dinámico es representado por

$$\dot{X} = f(X) + g(X)\mu + \delta(X, \gamma), \quad (3.4.9)$$

siendo $\gamma = [v_s \ v_s^r \ v_s^l \ \dot{v}_s \ \dot{v}_s^r \ \dot{v}_s^l \ F_{c\dot{x}} \ F_{c\dot{y}} \ F_{e\dot{x}} \ F_{e\dot{y}} \ \tau_e]^T$ el vector de variables no medidas; $X = [x \ y \ \theta \ u \ \omega]^T$ el vector de estados, y $\mu = [\tau_u \ \tau_\omega]^T$ representa la entrada del sistema, tal como se muestra en la Figura 3.7.

En la Figura 3.7 la posición del robots definida por el punto A ; en el punto G se localiza el centro de masa; el punto E es la ubicación de alguna herramienta de trabajo; F_{ij} ($j =$

$x', y', n; i = c, e$) son las fuerzas ejercidas en los puntos C y E , donde n denota la dirección normal a la superficie de traslación; y τ_e es el momento ejercido en E . El modelo dinámico mostrado en este apartado está definido por

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \cos(\theta) - a\omega \sin(\theta) \\ u \sin(\theta) + a\omega \cos(\theta) \\ \omega \\ \frac{mbr^2}{\Theta_u} \omega^2 \\ -2\frac{bmr^2}{\Theta_\omega} u\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{2r}{\Theta_u} & 0 \\ 0 & \frac{2rd}{\Theta_\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_u \\ \tau_\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ 0 \\ \delta_u \\ \delta_\omega \end{bmatrix}, \quad (3.4.10)$$

donde $\tau_u = \frac{1}{2}(\tau_r + \tau_\omega)$ y $\tau_\omega = \frac{1}{2}(\tau_r - \tau_\omega)$ son las entradas del sistema; τ_r y τ_l son los pares aplicados a las ruedas izquierda y derecha respectivamente; I_z , m y r corresponden al momento de inercia con respecto al eje z , la masa y radio de las ruedas respectivamente; Θ_u y Θ_ω son definidos como $\Theta_u = mr^2 + 2I_e$, y $\Theta_\omega = I_e d^2 + 2r^2(I_z + mb^2)$; I_e es el momento de inercia de la combinación del rotor, reductor y rueda. Por otra parte, los elementos del vector de incertidumbres δ se definen como

$$\delta_x = -v_s \sin(\theta)$$

$$\delta_y = v_s \cos(\theta)$$

$$\delta_u = \frac{1}{\Theta_u}(mr^2\omega v_s + r^2(F_{c\dot{x}} + F_{e\dot{x}}) - B_e(2u + v_l^l + v_l^r)) - I_e(\dot{v}_l^l + \dot{v}_l^r)$$

$$\delta_\omega = \frac{1}{\Theta_\omega}(-B_e d^2 \omega - B_e d(v_l^l - v_l^r) - I_e d(\dot{v}_l^l - \dot{v}_l^r) - 2mbr^2 \dot{v}_s) + \frac{2r^2}{\Theta_\omega}((b+e)F_{e\dot{y}} + (a+b)F_{c\dot{y}} + \tau_e)$$

Nótese que en el modelo dinámico (3.4.10) se considera que la masa está a una distancia $b \neq 0$ con respecto al centro geométrico. Mientras tanto, las imprecisiones asociadas con la simplificación corresponden al vector de incertidumbres.

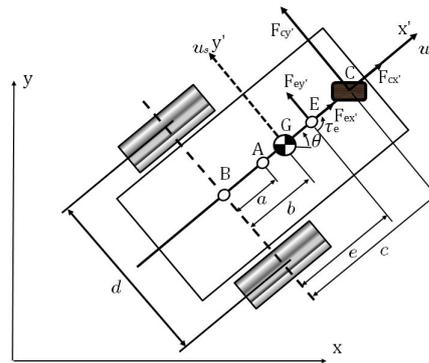


Figura 3.7: Parámetros considerados por Zhang en el modelo dinámico del robot tipo unicycle.

3.5 Algoritmos de control

A partir de los modelos presentados anteriormente, tanto dinámicos como cinemáticos, serán presentadas estrategias de control de postura, seguimiento de trayectoria, y posición para robots móviles del tipo unicycle, con la finalidad de presentar un estudio sobre el control de un solo agente.

3.5.1 Control de postura

En [8] se identifica una clase de sistemas no lineales que no pueden ser estabilizados por medio de una retroalimentación de estado suave. Debido a esta limitación no es posible posicionar y orientar al robot móvil tipo unicycle en alguna referencia de destino por una ley de control suave e invariante en el tiempo. Sin embargo, en [2] los autores sostienen que la observación de Brockett es cierta siempre y cuando el robot móvil esté localizado en un sistema de coordenadas. *"Si una diferente representación en variables de estado es adoptada, un enfoque simple puede ser usado, permitiendo directamente una propiedad de estabilización suave"* [13].

El control de postura está basado en el modelo cinemático expresado en coordenadas polares

dado por (3.3.3), que consiste en controlar la posición y la orientación del robot móvil, de tal manera que la distancia $e_c = 0$, y los ángulos $\beta_u = 0$ y $\beta_c = 0$. Sin embargo, para evitar singularidades se requiere que $e_c \neq 0$, esto debido a la estructura del modelo. Por lo tanto, cuando el robot esté aproximado a su objetivo es necesario evitar el cruce por cero, que hace que los valores de β_c y β_u sean indefinidos.

Por otra parte, en [2] se muestra que con una selección adecuada de las variables de estado en el modelo, las propiedades de estabilidad global se pueden garantizar por una ley de control suave, donde una ley de control de postura propuesta en [2] es expresada por

$$\begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \cos(\beta_u) e_c \\ k_2 \beta_u + k_1 \frac{\cos(\beta_u) \sin(\beta_u)}{\beta_u} (\beta_u + k_3 \beta_c) \end{bmatrix}, \quad (3.5.1)$$

siendo $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ y $k_3 > 0$. Por lo tanto, el sistema en lazo cerrado está dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_c \\ \dot{\beta}_u \\ \dot{\beta}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 \cos^2(\beta_u) e_c \\ -k_2 \beta_u - k_1 k_3 \frac{\cos(\beta_u) \sin(\beta_u)}{\beta_u} \beta_c \\ k_1 \cos(\beta_u) \sin(\beta_u) \end{bmatrix}. \quad (3.5.2)$$

Nótese que (3.5.2) es autónoma. A continuación se presenta un resultado, donde se muestra la estabilidad asintótica global del origen, para el sistema en lazo cerrado definido por (3.5.2).

Teorema 3.5.1. *Sea el sistema (3.3.3) en lazo cerrado con la ley de control de postura definida por (3.5.1) con $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ y $k_3 > 0$. Entonces, la trayectoria $\{e_c, \beta_u, \beta_c\}$ converge globalmente y asintóticamente a cero.*

La prueba de este teorema puede consultarse en [13].

3.5.2 Control de seguimiento de trayectoria

Ahora se presenta un control de seguimiento de trayectorias, el cual consiste en garantizar que las trayectorias del robot móvil cuyo modelo no-holonómico dado por (3.3.2) convergan a las trayectorias deseadas.

Basado en el método Líder-Seguidor, el control propuesto en [9] consiste en definir un sistema virtual como líder, el cual tiene la función de generar las trayectorias deseadas, cuya dinámica está dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{y}_d \\ \dot{\theta}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_d \cos(\theta_d) \\ u_d \sin(\theta_d) \\ \omega_d \end{bmatrix}. \quad (3.5.3)$$

Ahora, defínase el error de seguimiento como

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x_d - x \\ y_d - y \\ \theta_d - \theta \end{bmatrix}, \quad (3.5.4)$$

donde T es una matriz de transformación homogénea simétrica y definida positiva, la cual está definida como

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.5.5)$$

Derivando (3.5.4) con respecto al tiempo, resulta que

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}' \\ \dot{\tilde{y}}' \\ \dot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_d - \dot{x} \\ \dot{y}_d - \dot{y} \\ \dot{\theta}_d - \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\omega \sin(\theta) & \omega \cos(\theta) & 0 \\ -\omega \cos(\theta) & -\omega \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d - x \\ y_d - y \\ \theta_d - \theta \end{bmatrix}. \quad (3.5.6)$$

Sustituyendo (3.3.1) y (3.5.4) en (3.5.6), se tiene

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}' \\ \dot{\tilde{y}}' \\ \dot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)(\dot{x}_d - \dot{x}) + \sin(\theta)(\dot{y}_d - \dot{y}) + \dot{\theta}\tilde{y}' \\ -\sin(\theta)(\dot{x}_d - \dot{x}) + \cos(\theta)(\dot{y}_d - \dot{y}) - \dot{\theta}\tilde{x}' \\ \dot{\theta}_d - \dot{\theta} \end{bmatrix}. \quad (3.5.7)$$

Finalmente, el sistema en lazo cerrado está dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}' \\ \dot{\tilde{y}}' \\ \dot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_d \cos(\theta) \cos(\theta_d) - u + u_d \sin(\theta) \sin(\theta_d) + \dot{\theta}\tilde{y}' \\ -u_d \sin(\theta) \cos(\theta_d) + u_d \cos(\theta) \sin(\theta_d) - \dot{\theta}\tilde{x}' \\ \dot{\theta}_d - \dot{\theta} \end{bmatrix}. \quad (3.5.8)$$

Por otra parte, definiendo las siguientes variables de control auxiliar como

$$\begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_{aux} + u_d \cos(\tilde{\theta}) \\ \omega_d - \omega_{aux} \end{bmatrix}, \quad (3.5.9)$$

entonces sustituyendo (3.5.9) en (3.5.8), resulta que

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}' \\ \dot{\tilde{y}}' \\ \dot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{aux} + \dot{\theta}\tilde{y}' \\ u_d \sin(\tilde{\theta}) - \dot{\theta}\tilde{x}' \\ \omega_{aux} \end{bmatrix}, \quad (3.5.10)$$

donde u_{aux} y ω_{aux} corresponden a la ley de control definida por

$$\begin{bmatrix} u_{aux} \\ \omega_{aux} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 \tilde{x}' \\ -k_2 u_d \frac{\sin(\tilde{\theta})}{\tilde{\theta}} \tilde{y}' - k_3 \tilde{\theta} \end{bmatrix}, \quad (3.5.11)$$

con las ganancias $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ y $k_3 > 0$.

Por lo tanto, sustituyendo (3.5.11) en (3.5.10), el sistema en lazo cerrado resulta

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}' \\ \dot{\tilde{y}}' \\ \dot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \tilde{y}' - k_1 \tilde{x}' \\ u_d \sin(\tilde{\theta}) - \dot{\theta} \tilde{x}' \\ k_2 u_d \frac{\sin(\tilde{\theta})}{\tilde{\theta}} \end{bmatrix}. \quad (3.5.12)$$

Nótese que (3.5.12) es no autónoma. Ahora se establece el siguiente resultado.

Teorema 3.5.2. *Sea el sistema (3.3.2) bajo la acción del control definido por (3.5.1) con $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ y $k_3 > 0$, entonces las trayectorias del sistema $\{\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{\theta}\}$ convergen globalmente y asintóticamente a cero.*

La prueba de este teorema puede ser consultada en [13]

3.5.3 Control de posición

El control de posición consiste en llevar a las variables de posición (x, y) del robot móvil tipo unicycle a las posiciones cartesianas deseadas (x_d, y_d) . A continuación se diseñara un control proporcional derivativo (PD) a partir del modelo dinámico (3.4.8) de un robot móvil con tracción diferencial de dos ruedas accionadas y dos ruedas libres dado en forma compacta por

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = \tau_q, \quad (3.5.13)$$

donde $q = q(t) = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) \end{bmatrix}^T$ y

$$M(q) = \begin{bmatrix} m \cos(\theta) & m \sin(\theta) \\ -\frac{I_z}{a} \sin(\theta) & \frac{I_z}{a} \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -m\omega \sin(\theta) & m\omega \cos(\theta) \\ -\frac{I_z}{a}\omega \cos(\theta) & -\frac{I_z}{a}\omega \sin(\theta) \end{bmatrix}, \quad \tau_q = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix},$$

siendo m y I_z la masa y momento de inercia del robot móvil, respectivamente. El control PD es dado por

$$\tau = k_p \tilde{q} + k_v \dot{\tilde{q}}, \quad (3.5.14)$$

donde $k_p, k_v \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ son matrices definidas positivas; $\tilde{q} = q_d - q$ es el error de posición; q_d es una referencia. El sistema en lazo cerrado está dado por

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = k_p \tilde{q} + k_v \dot{\tilde{q}}. \quad (3.5.15)$$

Entonces, asumiendo que la referencia es constante, el sistema en lazo cerrado puede escribirse como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ M(q)^{-1}[K_p \tilde{q} - K_v \dot{q} - C(q, \dot{q})\dot{q}] \end{bmatrix}, \quad (3.5.16)$$

la cual tiene un único punto de equilibrio que está dado por el vector $\begin{bmatrix} \tilde{q}^T & \dot{\tilde{q}}^T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0^T & 0^T \end{bmatrix}^T$.

Teorema 3.5.3. [26]. *Sea el sistema (3.4.5) en lazo cerrado con el control PD (3.5.14) con las matrices $K_p, K_v > 0$, entonces las trayectorias $\{\tilde{q} \ \dot{\tilde{q}}\}$ tienden globalmente asintóticamente a cero.*

Prueba. Para demostrar que el punto de equilibrio es estable, considérese la siguiente función candidata de Lyapunov.

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \frac{1}{2} \tilde{q}^T K_p \tilde{q}, \quad (3.5.17)$$

la cual es definida positiva. Luego, derivando con respecto al tiempo y aplicando la propiedad dada por la ecuación (3.4.4), se tiene

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = -\dot{q}^T K_v \dot{q} \leq 0 \quad (3.5.18)$$

Luego, debido a que la función $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q})$ es uniformemente continua, por el lema de Barbalat A.2.1 se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) \rightarrow 0$$

En consecuencia, se concluye que \dot{q} tiende asintóticamente a cero. Dado lo anterior y considerando que la posición deseada q_d es constante, el sistema en lazo cerrado cuando $t \rightarrow \infty$, está dada por [35]

$$M(q) \ddot{q} = k_p \tilde{q}. \quad (3.5.19)$$

Supóngase que $\tilde{q} \neq 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, entonces $\ddot{q} \neq 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Por lo tanto, $\dot{q} \neq 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, lo cual es una contradicción. Entonces el único conjunto que satisface $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = 0$ es el origen. Por lo tanto, $\tilde{q} \rightarrow 0$. Finalmente, asumiendo que el ángulo de orientación θ es de tal forma que $\cos(\theta) > 0$, dada la definición A.1.6, se concluye que el origen

es un equilibrio globalmente asintóticamente estable.

□ □ □

Sin embargo, debido a las características del modelo dinámico (3.4.8), el control está restringido a un rango específico de valores en la orientación θ del robot móvil, esto es debido a que el modelo es válido en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2})$. Además, θ es definido para $x \neq 0$.

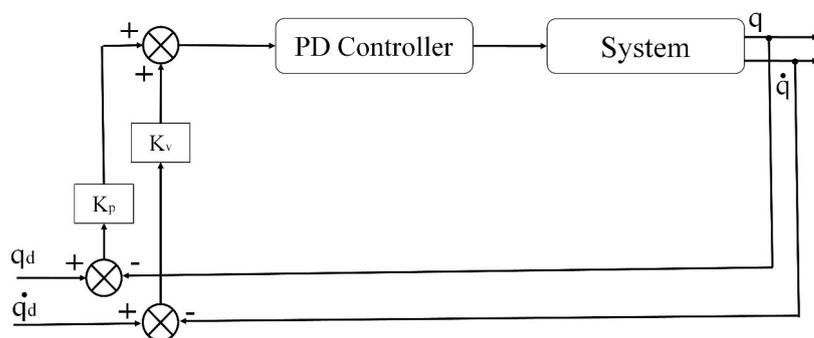


Figura 3.8: Sistema en lazo cerrado con control PD.

3.6 Conclusiones

En el presente capítulo se presentaron diferentes modelos, tanto dinámicos como cinemáticos, para un robot móvil tipo unicycle, debido a la observación de Brockett, la posición del robot es medida a una distancia a del centro geométrico, lo cual simplifica el problema de control de robots móviles basados en este concepto debido a que la cinemática se vuelve holonómica. Por

otra parte, se realizo un estudio de algoritmos de control de postura, seguimiento de trayectoria y posición y para robots móviles tipo unicycle.

Capítulo 4

Control de formación y movimiento sincronizado

4.1 Introducción

En el capítulo anterior se estudiaron estrategias de control para un sólo robot móvil, sin embargo, es sabido que existen tareas que pueden ser realizadas más eficientemente por un conjunto de robots, donde dependiendo de la formulación del problema de sincronización controlada, puede distinguirse dos tipos de sincronización: Interna y externa [35]. En la sincronización externa la sincronía es determinada por un sólo agente del conjunto, el cual es independiente del resto de los agentes, por ejemplo el método Líder-Seguidores o sistemas basados en el esquema coordinado. Mientras tanto, en la sincronización interna no se define una jerarquía entre los agentes que conforman al conjunto. Por lo tanto, la sincronización se logra a través de las interacciones entre todos los agentes del sistema multi-agente. Por ejemplo, los sistemas basados en el esquema cooperativo, como los relojes de péndulo de Christian Huygens, los cuales estaban interconectados entre sí por una barra.

Un SMA puede operar bajo los esquemas de cooperación y coordinación. Por lo tanto, es

necesario diseñar las interconexiones necesarias de tal manera que la sincronía entre los agentes pueda ser alcanzada. En esta sección se estudiarán estrategias de control de movimiento para un sistema multi-robot (multi-agente), los cuales son sistemas conformados por múltiples unidades autónomas cuyas dinámicas son no lineales. Estas estrategias de control de movimiento de un SMA pueden clasificarse como centralizadas o descentralizadas [3]. Las estrategias de control centralizadas consisten en definir un control central, el cual gobierna el movimiento de todos los robots del conjunto, y cuya ventaja radica en la simplicidad que presentan los algoritmos de control. Mientras tanto, en las estrategias de control descentralizadas el control es distribuido a todos los robots del conjunto, debido a esto proporcionan autonomía a cada robot del conjunto, no se necesita de un control global y es aplicable a grupos de robots a gran escala, ya que requiere menos esfuerzo computacional en las implementaciones de control.

En esta sección, se hará una revisión de dos estrategias de control de sincronización y dos de formación. La primera estrategia de control de sincronización está basada en el concepto de sincronización interna, y es aplicado a un sistema multi-agente conformado por robots rígidos, cuyo modelo se basa en la formulación Euler-Lagrange [35]. Basado en los métodos de Líder-Seguidores y de la teoría de grafos, se presenta un esquema de control, que es aplicado a micro redes eléctricas [5], cuya dinámica no lineal de cada agente es descompuesta en sistemas lineales de primer orden aplicando métodos geométricos. Por otra parte, siendo el control de formación una aplicación del control de movimiento coordinado, un control de formación para robots móviles holonómicos tipo unicyclo, presentado en [30], es introducido. Éste consiste en aplicar una linealización exacta para compensar las no linealidades del sistema y está basado en los métodos de comportamiento. Finalmente, se presenta una estrategia de control [14] que está basada en las técnicas de acoplamiento cruzado para minimizar el error más significativo, que en este caso corresponde al error de sincronización de un conjunto de robots móviles tipo unicyclo cuyo modelo dinámico es no-holonómico. Las topologías de interconexión de los algoritmos de control presentados en [35, 30, 14] son estáticas, mientras que en [5] la topología de interconexión

es del tipo cuasi-estática.

4.2 Control de sincronización interna

A continuación se presenta una estrategia de control de seguimiento sincronizado para robots rígidos propuesto en [35], que está basado en el concepto de sincronización interna. En este algoritmo de control, se asume que la información de los demás agentes del conjunto y la trayectoria global deseada $q_d, \dot{q}_d \in \mathbb{R}^n$ están disponibles para el i -ésimo agente, tal como se muestra en la Figura 4.1. Mientras tanto, la dinámica no lineal del i -ésimo robot está dada por el modelo dinámico (4.2.1).

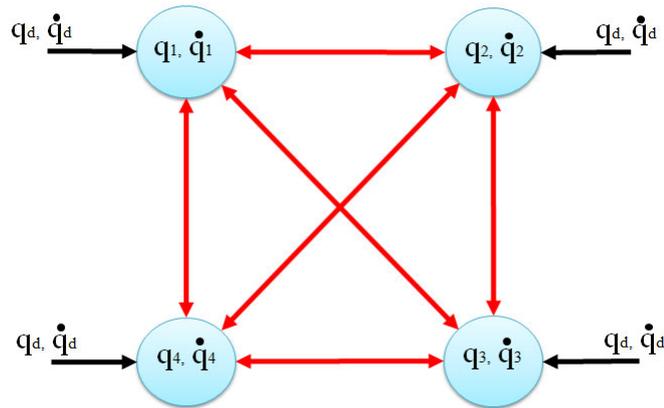


Figura 4.1: Topología de interconexión del sistema multi-agente.

$$M_i(q_i)\ddot{q}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + G_i(q_i) = \tau_i, \quad i = 1, \dots, p. \quad (4.2.1)$$

Se asume que se dispone de la información completa del vector de estado y que el modelo dinámico no presenta incertidumbres paramétricas ni errores de modelado. Por lo tanto, el

objetivo es diseñar un control que lleve a las variables de posición y velocidad angular $q_i \in \mathfrak{R}^n$ y $\dot{q}_i \in \mathfrak{R}^n$ para $i = 1, \dots, p$; respectivamente a las trayectorias globales deseadas q_d, \dot{q}_d , y además coincidan a las trayectorias de los agentes vecinos $q_j \in \mathfrak{R}^n$ y $\dot{q}_j \in \mathfrak{R}^n$ ($j = 1, \dots, p, j \neq i$) en algún instante de tiempo. Por lo tanto, la entrada de control τ_i está dada por

$$\tau_i = M_i(q_i)\ddot{q}_{ri} + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_{ri} + G_i(q_i) - K_{d,i}\dot{s}_i - K_{p,i}s_i \quad i = 1, \dots, p \quad (4.2.2)$$

donde $M_i(q_i)$, $G_i(q_i)$, y $C_i(q_i, \dot{q}_i)$ corresponden a las matriz de pares inerciales, vector de fuerzas gravitacionales, y la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis respectivamente; $K_{p,i} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ y $K_{v,i} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ son matrices diagonales definidas positivas; siendo q_{ri}, \dot{q}_{ri} las trayectorias deseadas locales para $i = 1, \dots, p$; definidas como

$$\begin{aligned} q_{ri} &= q_d - \sum_{j=1, j \neq i}^p K_{cp_i, j}(q_i - q_j), \\ \dot{q}_{ri} &= \dot{q}_d - \sum_{j=1, j \neq i}^p K_{cv_i, j}(\dot{q}_i - \dot{q}_j), \\ \ddot{q}_{ri} &= \ddot{q}_d - \sum_{j=1, j \neq i}^p K_{ca_i, j}(\ddot{q}_i - \ddot{q}_j), \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

donde las ganancias $K_{cp_i, j}, K_{cv_i, j}, K_{ca_i, j} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ $i, j = 1, \dots, p$; son matrices diagonales semidefinidas positivas, que definen las interacciones entre los elementos del sistema multi-agente. Entonces, $s_i \in \mathfrak{R}^n$ y $\dot{s}_i \in \mathfrak{R}^n$ denotan al error de sincronización y a la velocidad del error de sincronización, respectivamente dadas por

$$s_i := q_i - q_{ri}, \quad \dot{s}_i := \dot{q}_i - \dot{q}_{ri}, \quad (4.2.4)$$

Hipótesis 4.2.1. [35]. *Se asume que para todo $i, j = 1, \dots, p$; las ganancias de acoplamiento $K_{cp_i, j}, K_{cv_i, j}, K_{ca_i, j}$ satisfacen*

$$K_{cp_i,j} = K_{cv_i,j} = K_{ca_i,j} = K_{i,j}.$$

Sustituyendo la ley de control (4.2.2) en el sistema (4.2.1), se tiene el sistema en lazo cerrado en función del error de sincronización dado por

$$M_i(q_i)\ddot{s}_i = -C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{s}_i - K_{d,i}\dot{s}_i - K_{p,i}s_i, \quad i = 1, \dots, p; \quad (4.2.5)$$

cuyo único punto de equilibrio que está dado por el vector $\begin{bmatrix} \tilde{s}_i^T & \dot{\tilde{s}}_i^T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0^T & 0^T \end{bmatrix}^T$. A continuación se presenta el siguiente resultado, el cual ha sido extraído de la literatura citada en este documento.

Teorema 4.2.1. [35]. *Considere el sistema en lazo cerrado formado por el controlador (4.2.2), las señales de referencia (4.2.3) y el modelo dado por (4.2.1). Entonces el error de sincronización s_i y \dot{s}_i son globalmente asintóticamente estable si las ganancias de control $k_{d,i}$, $k_{p,i}$, $i = 1, \dots, p$; son positivas definidas.*

Prueba. Considérese la siguiente función de Lyapunov [35]

$$V(s, \dot{s}) = \sum_{i=1}^p \left\{ \begin{bmatrix} s_i \\ \dot{s}_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_{p,i} & 0 \\ 0 & M_i(q_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_i \\ \dot{s}_i \end{bmatrix} \right\},$$

la cual es definida positiva si $K_{p,i} > 0$ para $i = 1, \dots, p$. Derivando con respecto al tiempo y aplicando la propiedad (3.4.4) se tiene

$$\dot{V}(s, \dot{s}) = \sum_{i=1}^p \dot{s}_i^T K_{d,i} \dot{s}_i. \quad (4.2.6)$$

Debido a la no autonomía del sistema 4.2.5, considerando el vector $x = [s^T \quad \dot{s}^T]^T$, por el lema de Barbalat A.2.1 resulta

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(x) \rightarrow 0$$

Nótese que $\dot{V}(s, \dot{s})$ no depende del error de sincronización s_i . Sin embargo, $\dot{s}_i = 0$ cuando $t \geq 0$, lo cual implica que $\ddot{s}_i = 0$ para todo $t \geq 0$. Luego considérese el sistema en lazo cerrado (4.2.5) cuando $t \geq 0$, entonces se tiene que

$$K_{p,i}s_i = 0.$$

Por lo tanto, el origen $[s_i^T \quad \dot{s}_i^T]^T = 0 \in \mathfrak{R}^{2n}$ es el único conjunto que satisface $\dot{V}(s, \dot{s}) = 0$. Finalmente, se concluye que el origen es globalmente asintóticamente estable.

□ □ □

4.3 Control de sincronización interna y externa basada en teoría de grafos

En esta sección, se presenta un control cooperativo para micro redes eléctricas, que son aplicados en sistemas eléctricos de potencia. El enfoque de control es descentralizado y está basado en los métodos de Líder-Seguidores y teoría de grafos, el cual es presentado en [5]. Cada agente del conjunto requiere solamente la información de la referencia deseada (si está disponible) y la información de los vecinos. En este enfoque de control se hace uso de la linealización para compensar las no linealidades del sistema, el cual deberá ser de grado relativo dos $r = 2$. Considérese el sistema no lineal SISO (una entrada-una salida) libre de perturbaciones en la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= f_i(x_i) + g_i(x_i)u_i, \\ y_i &= h_i(x_i),\end{aligned}\tag{4.3.1}$$

donde x_i es el vector de estados; $f_i(x_i)$ y $g_i(x_i)$ son campos vectoriales suaves; $h(x)$ es una función escalar no lineal. Por otra parte, la entrada del sistema u_i está dada por

$$u_i = (L_{g_i}L_{f_i}h_i)^{-1}(-L_{f_i}^2h_i + \nu_i),\tag{4.3.2}$$

donde ν_i corresponde al control auxiliar; $L_{g_i}L_{f_i}h_i$ es la derivada de Lie de h_i con respecto a f_i ; y $L_{f_i}^2h_i$ es la derivada de Lie de $L_{f_i}h_i$ con respecto a f_i , es decir,

$$L_{f_i}h_i = \frac{\partial(h_i)}{\partial x_i}f_i, \quad L_{f_i}^2h_i = \frac{\partial(L_{f_i}h_i)}{\partial x_i}f_i.$$

Entonces dada (4.3.2), la dinámica no lineal de cada agente (4.3.1) del sistema multi-agente son descompuestas en sistemas dinámicos lineales de segundo orden. Por consiguiente, el sistema multi-agente es representado por

$$\dot{\gamma}_i = A\gamma_i + B\nu_i, \quad \forall i = 1, \dots, N;\tag{4.3.3}$$

donde $\gamma_i = [y_i \quad y_i^{(r-1)}]^T = [\xi_i \quad \xi_i^{(r-1)}]^T$, $B = [0 \quad 1]^T$ y $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Dado la anterior, las dinámicas lineales del sistema multi-agente puede ser expresadas como

$$\dot{\gamma} = (I_N \otimes A)\gamma + (I_N \otimes B)\nu,\tag{4.3.4}$$

siendo $\gamma = [\gamma_1^T \quad \gamma_2^T, \quad \dots, \gamma_N^T]^T$; el vector dado por $\nu = [\nu_1 \quad \nu_2, \quad \dots, \nu_N]^T$, es el vector de controles auxiliares de cada agente. Considérese una referencia constante y_0 y haciendo $\gamma_0 = [y_0 \quad \dot{y}_0]^T$, entonces la dinámica del agente líder está dada por

$$\dot{\Gamma}_0 = (I_N \otimes A)\Gamma_0, \quad (4.3.5)$$

siendo $\Gamma_0 = 1_N \otimes \gamma_0$.

El objetivo es construir un control distribuido ν_i de tal manera que $\gamma_i \rightarrow \gamma_0$, $\forall i \in \{1, \dots, N\}$. Defínase el vector de error de sincronización para el grafo dirigido como

$$e = ((\tilde{L} + G) \otimes I_2)(\gamma - \Gamma_0) = ((\tilde{L} + G) \otimes I_2)\delta, \quad (4.3.6)$$

donde $G = \text{diag}\{g_i\}$ y \tilde{L} es la matriz **laplaciana** para el conjunto de agentes seguidores (Definición (2.2.9)).

Por otra parte, la ley de control en forma global está denotada por

$$v = -c(I_N \otimes K)e = -c(I_N \otimes K)((\tilde{L} + G) \otimes I_2)\delta, \quad (4.3.7)$$

siendo $c \in \mathfrak{R}$ es una ganancia definida positiva; $K \in \mathfrak{R}^{1 \times 2}$ es la ganancia de control seleccionada a partir de un regulador cuadrático lineal (LQR) como en el Lema 4.3.2.

Sustituyendo (4.3.7) en (4.3.4), el sistema en lazo cerrado resulta

$$\dot{\delta} = \dot{\gamma} - \dot{\Gamma}_0 = (I_N \otimes A - c(\tilde{L} + G) \otimes BK)\delta = H\delta. \quad (4.3.8)$$

Por otra parte, existe una relación entre el error de sincronización y el error de consenso, dicha relación está dada por (4.3.6), cuya derivada temporal es denotada por

$$\dot{e} = ((\tilde{L} + G) \otimes I_2)\dot{\delta}. \quad (4.3.9)$$

Sustituyendo la ley de control dada por (4.3.7) en el sistema (4.3.4), el sistema en lazo cerrado (4.3.8) puede escribirse como

$$\dot{\gamma} = (I_N \otimes A)\gamma - c(I_N \otimes BK)e. \quad (4.3.10)$$

Derivando (4.3.6) con respecto al tiempo y sustituyendo las ecuaciones (4.3.10) y (4.3.8), resulta que

$$\dot{e} = ((\tilde{L} + G) \otimes I_2)[(I_N \otimes A)\delta - c(I_N \otimes BK)e] \quad (4.3.11)$$

Considerando que la matriz $((\tilde{L} + G) \otimes I_2)$ es invertible, debido a que el grafo dirigido $\dot{\mathcal{G}}$ tiene un árbol de expansión, es decir,

$$\delta = [(\tilde{L} + G)^{-1} \otimes I_2]e \quad (4.3.12)$$

Entonces, la ecuación (4.3.9) puede escribirse en términos del error de sincronización como

$$\dot{e} = [\tilde{L} + G \otimes I_2](I_N \otimes A)[(\tilde{L} + G)^{-1} \otimes I_2]e - c(I_N \otimes BK)e = He. \quad (4.3.13)$$

A continuación, se presentan algunos resultados, los cuales son herramientas fundamentales para probar la estabilidad del sistema (4.3.10).

Lema 4.3.1. [5]. Sean (A, B) estabilizables y el grafo dirigido $\dot{\mathcal{G}}$ tiene un árbol de expansión. Sean $\lambda_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$; los valores propios de la matriz $\tilde{L} + G$, entonces la matriz

$$H = (I_N \otimes A) - c(\tilde{L} + G) \otimes BK,$$

con $c \in \Re$ y $K \in \Re^{m \times n}$, es Hurwitz sí y sólo sí todas las matrices $A - c\lambda_i BK \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$; son Hurwitz.

Lema 4.3.2. [5]. Sean (A, B) estabilizables, $Q = Q^T$ y $R = R^T$ son definidas positivas. Sea la ganancia de retroalimentación de estado seleccionada como

$$K = R^{-1}B^T P \quad (4.3.14)$$

donde $P > 0$ es la única solución de la ecuación algebraica de Riccati (ARE)

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0,$$

entonces, todas las matrices $A - c\lambda_i BK, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$ son Hurwitz si

$$c \geq \frac{1}{2\lambda_{\min}}, \quad (4.3.15)$$

donde $\lambda_{\min} = \min_{i \in N} \Re(\lambda_i)$.

A continuación se presenta el siguiente resultado.

Teorema 4.3.1. [5]. Sea el digrafo $\hat{\mathcal{G}}$ con un árbol de expansión y asumiendo que la dinámica interna de cada agente es asintóticamente estable. Sea el control auxiliar dado por ν , con ganancia de control $K = R^{-1}B^T P$ y $c \geq \frac{1}{2\lambda_{\min}}$. Entonces, las soluciones $\{\delta, e\}$ tienden asintóticamente a cero.

Prueba. Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_c(\delta) = \delta^T P_2 \delta, \quad P_2 = P_2^T, P_2 > 0. \quad (4.3.16)$$

Derivando la función $V(\delta)$ con respecto a las trayectorias del sistema (4.3.8), se tiene

$$\dot{V}_c(\delta) = \delta^T (P_2 H + H^T P_2) \delta. \quad (4.3.17)$$

Por el Lema 4.3.1 y el Lema 4.3.2, se tiene que la matriz H es Hurwitz. Por lo tanto, $\dot{V}_c(\delta)$ satisface a la ecuación algebraica de Lyapunov dada por $P_2 H + H^T P_2 = -Q$, siendo Q una matriz simétrica definida positiva, entonces

$$\dot{V}_c(\delta) = -\delta^T Q \delta \leq 0. \quad (4.3.18)$$

Por lo tanto, se concluye que el error de consenso δ tiende asintóticamente a cero.

Por otra parte, considere (4.3.6) cuando $t \rightarrow \infty$, lo cual implica que el error de sincronización e tienda asintóticamente a cero. Para probar lo anterior, considere la función candidata de Lyapunov

$$V_s(e) = e^T P_2 e, \quad P_2 = P_2^T, P_2 > 0. \quad (4.3.19)$$

Asumiendo que la matriz $\tilde{L} + G$ es invertible debido a que el grafo dirigido \mathcal{G} tiene un árbol de expansión [6], entonces derivando $V_s(e)$ con respecto a las trayectorias del sistema (4.3.8) resulta

$$\dot{V}_s(e) = -e^T Q e < 0. \quad (4.3.20)$$

Entonces, se comprueba que e tiende asintóticamente a cero.

□ □ □

4.4 Control de formación basado en métodos basados en comportamiento

A continuación se presenta un esquema de control descentralizado para un sistema cooperativo conformado por P robots móviles tipo unicycle, el cual es basado en los **métodos basados en comportamiento**, los cuales consisten en prescribir los comportamientos deseados para cada agente, donde el i -ésimo agente es sincronizado con dos agentes vecinos, tal como se muestra en la Figura 4.2 (ver [30]). En esta estrategia de control pueden distinguirse los siguientes objetivos de control:

1. Mover la formación de una posición a otra.
2. Mantener una formación rígida durante la transición de un punto a otro.

Considérese un sistema multi-agente conformado por múltiples robots móviles no-holonómicos de configuración diferencial tal como el que se muestra en la Figura 3.5, cuya dinámica no lineal está denotada por

$$\begin{pmatrix} \dot{r}_{xi} \\ \dot{r}_{yi} \\ \dot{\theta}_i \\ \dot{v}_i \\ \dot{\omega}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_i \cos(\theta_i) \\ v_i \sin(\theta_i) \\ \omega_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_i} & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_i \\ \tau_i \end{pmatrix}, \quad (4.4.1)$$

siendo $r_i = (r_{xi}, r_{yi})^T$ la posición inercial del i -ésimo robot, la cual está ubicada en centro geométrico; θ_i es el ángulo de orientación; v_i es la velocidad de traslación; ω_i es la velocidad angular; $u_i = [F_i \quad \tau_i]^T$ es la entrada del sistema cuyos elementos son la fuerza aplicada y el torque aplicado, respectivamente; m_i es la masa del i -ésimo agente; I_i es el momento de inercia. Además, la ecuación de salida está dada por

$$\Pi_i = r_i + L_i \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) \end{pmatrix}. \quad (4.4.2)$$

Luego, con el objetivo de aplicar la linealización por retroalimentación entrada-salida, se deriva la salida con respecto al tiempo hasta que la entrada de control aparezca explícitamente, lo cual resulta

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}_i &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -L_i \sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & L_i \cos(\theta_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_i \\ \omega_i \end{pmatrix}, \\ \ddot{\Pi}_i &= \begin{pmatrix} -u_i \omega_i \sin(\theta_i) - L_i \omega_i^2 \cos(\theta_i) \\ u_i \omega_i \cos(\theta_i) - L_i \omega_i^2 \sin(\theta_i) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \frac{1}{m_i} \cos(\theta_i) & -\frac{L_i}{J_i} \sin(\theta_i) \\ \frac{1}{m_i} \sin(\theta_i) & \frac{L_i}{J_i} \cos(\theta_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_i \\ \tau_i \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

Dado lo anterior, puede concluirse que el sistema (4.4.1) con la salida (4.4.2) tiene grado relativo dos. Luego, debido a que

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1}{m_i} \cos(\theta_i) & -\frac{L_i}{J_i} \sin(\theta_i) \\ \frac{1}{m_i} \sin(\theta_i) & \frac{L_i}{J_i} \cos(\theta_i) \end{pmatrix} \neq 0,$$

el sistema puede ser linealizado por una retroalimentación de entrada-salida. Por otra parte, sea el difeomorfismo $\varphi : \mathfrak{R}^5 \rightarrow \mathfrak{R}^5$ definido como

$$\zeta_i = \varphi(X_i) = \begin{pmatrix} r_{xi} + L_i \cos(\theta_i) \\ r_{yi} + L_i \sin(\theta_i) \\ v_i \cos(\theta_i) - L_i \omega_i \sin(\theta_i) \\ v_i \sin(\theta_i) + L_i \omega_i \cos(\theta_i) \\ \theta_i \end{pmatrix}. \quad (4.4.4)$$

Mientras que la inversa de (4.4.4) dada por

$$X_i = \varphi^{-1}(\zeta_i) = \begin{pmatrix} \zeta_{1i} - L_i \cos(\zeta_{5i}) \\ \zeta_{2i} - L_i \sin(\zeta_{5i}) \\ \zeta_{5i} \\ \frac{1}{2} \zeta_{3i} \cos(\zeta_{5i}) + \frac{1}{2} \zeta_{4i} \sin(\zeta_{5i}) \\ -\frac{1}{2L_i} \zeta_{3i} \sin(\zeta_{5i}) + \frac{1}{2L_i} \zeta_{4i} \cos(\zeta_{5i}) \end{pmatrix}. \quad (4.4.5)$$

Finalmente, modelo dinámico dado por las ecuaciones (4.4.1) y (4.4.2), puede ser expresado como

$$\begin{pmatrix} \dot{\zeta}_{1i} \\ \dot{\zeta}_{2i} \\ \dot{\zeta}_{3i} \\ \dot{\zeta}_{4i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_{3i} \\ \zeta_{4i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -u_i \omega_i \sin(\theta_i) - L_i \omega_i^2 \cos(\theta_i) \\ u_i \omega_i \cos(\theta_i) - L_i \omega_i^2 \sin(\theta_i) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{m_i} \cos(\theta_i) & -\frac{L_i}{J_i} \sin(\theta_i) \\ \frac{1}{m_i} \sin(\theta_i) & \frac{L_i}{J_i} \cos(\theta_i) \end{pmatrix} u_i$$

$$\dot{\zeta}_{5i} = \frac{-1}{2L_i} \zeta_{3i} \sin(\zeta_{5i}) + \frac{1}{2L_i} \zeta_{4i} \cos(\zeta_{5i}). \quad (4.4.6)$$

Por lo tanto, el control linealizante se diseña como

$$\begin{aligned}
u_i &= \begin{pmatrix} \frac{1}{m_i} \cos(\theta_i) & -\frac{L_i}{J_i} \sin(\theta_i) \\ \frac{1}{m_i} \sin(\theta_i) & \frac{L_i}{J_i} \cos(\theta_i) \end{pmatrix}^{-1} \\
&\times \left[\nu_i - \begin{pmatrix} -v_i \omega_i \sin(\theta_i) & -L_i \omega_i^2 \cos(\theta_i) \\ v_i \omega_i \cos(\theta_i) & -L_i \omega_i^2 \sin(\theta_i) \end{pmatrix} \right].
\end{aligned} \tag{4.4.7}$$

Sustituyendo (4.4.7) en (4.4.6), se tiene

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{\zeta}_{1i} \\ \dot{\zeta}_{2i} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \zeta_{3i} \\ \zeta_{4i} \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} \dot{\zeta}_{3i} \\ \dot{\zeta}_{4i} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \nu_{1i} \\ \nu_{2i} \end{pmatrix}. \\
\dot{\zeta}_{5i} &= -\frac{1}{2L_i} \zeta_{3i} \sin(\zeta_{5i}) + \frac{1}{2L_i} \zeta_{4i} \cos(\zeta_{5i}),
\end{aligned} \tag{4.4.8}$$

donde $\nu_i = [\nu_{1i} \ \nu_{2i}]^T$ corresponde al control auxiliar.

Por otra parte, la última línea de la ecuación (4.4.6) corresponde a la dinámica interna, la cual implica que el ángulo θ_i será constante cuando $(\zeta_{3i}, \zeta_{4i})^T = (0, 0)^T$. Además, es no controlable y no observable. Mientras tanto, desde que $\zeta_{1i} = \dots = \zeta_{4i} = 0$, entonces se tiene que la dinámica cero es estable [30].

Considérese el sistema multi-agente con dinámicas lineales homogéneas dada por

$$\dot{\gamma} = (I_N \otimes A)\gamma + (I_N \otimes B)\nu, \tag{4.4.9}$$

donde el vector $\nu \in \mathfrak{R}^N$ es el control auxiliar, cuyos elementos para $i = 1, 2, \dots, N$; están definidos por

$$\begin{aligned}
\nu_i &= -K_g \tilde{\Pi}_i - D_g \dot{\tilde{\Pi}}_i \\
&\quad - K_f (\tilde{\Pi}_i - \tilde{\Pi}_{i+1}) - D_f (\dot{\tilde{\Pi}}_i - \dot{\tilde{\Pi}}_{i+1}) \\
&\quad - K_f (\tilde{\Pi}_i - \tilde{\Pi}_{i-1}) - D_f (\dot{\tilde{\Pi}}_i - \dot{\tilde{\Pi}}_{i-1}),
\end{aligned} \tag{4.4.10}$$

el cual corresponde a la ley de control de formación propuesta en [30], donde $\tilde{\Pi}_i = \Pi_i - \Pi_{id}$ es el error de seguimiento; las matrices K_f y D_f son simétricas y semidefinidas positivas; K_g y D_g son matrices simétricas definidas positivas. Luego, debido a que las referencias deseadas son constantes, se tiene que $\dot{\tilde{\Pi}}_i = \dot{\tilde{\Pi}}_i$. Entonces el control auxiliar (4.4.10) puede escribirse en forma global como

$$\nu = -[I_N \otimes \psi_g + C \otimes \psi_f]\xi, \quad (4.4.11)$$

siendo $\psi_g = [k_g \quad D_g]$, $\psi_f = [k_f \quad D_f]$; $\xi = [\tilde{\gamma}_1^T, \tilde{\gamma}_2^T, \dots, \tilde{\gamma}_N^T]^T$ es un vector cuyos elementos $\tilde{\gamma}_i = [\tilde{\Pi}_i^T \quad \dot{\tilde{\Pi}}_i^T]^T$ corresponden al error de posición; $C \in \mathfrak{R}^{N \times N}$ denota a la matriz Hankel, la cual es definida como $C = \hat{C}^T \hat{C}$, donde $\hat{C} = [\hat{c}_{ij}]$

$$\hat{c}_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ -1 & j = i + 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es claro que \hat{C} es de rango completo, por lo tanto, C es simétrica y definida positiva [30]. Sustituyendo (4.4.11) en (4.4.9), el sistema en lazo cerrado está dado por

$$\dot{\gamma} = (I_N \otimes A)\gamma - (I_N \otimes B)[I_N \otimes \psi_g + C \otimes \psi_f]\xi. \quad (4.4.12)$$

Por otra parte, sea $P_j = \{\Pi_{1d}, \dots, \Pi_{Nd}\}$ para P_j , $j = 1, \dots, K$; las secuencias de patrones de formación, los cuales son definidos como referencias deseadas constantes. Entonces, las referencias deseadas para cada agente pueden ser expresadas como

$$\dot{\gamma}_d = (I_N \otimes A)\gamma_d, \quad (4.4.13)$$

siendo $\gamma_d = [\gamma_{1d}^T, \gamma_{2d}^T, \dots, \gamma_{Nd}^T]^T$, siendo $\gamma_{id} = [\Pi_{id}^T \quad \dot{\Pi}_{id}^T]^T = [\Pi_{id}^T \quad 0^T]^T$. Entonces, el sistema en lazo cerrado puede escribirse en función del error global como

$$\dot{\xi} = \dot{\gamma} - \dot{\gamma}_d = \left[(I_N \otimes A) - (I_N \otimes B)[I_N \otimes \psi_g + C \otimes \psi_f] \right] \xi, \quad (4.4.14)$$

la cual es autónoma debido a que las referencias deseadas son constantes.

Lema 4.4.1. [30]. Sean las matrices $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ y $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ estabilizables, y sea la matriz H definida como:

$$H = (I_N \otimes A) - (I_N \otimes B)[I_N \otimes \psi_g + C \otimes \psi_f],$$

donde $C \in \mathfrak{R}^{N \times N}$ es una matriz de Hankel simétrica y definida positiva. Si $\psi_f = [k_f^T \quad D_f^T]^T$ siendo $k_f^T \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$ y $D_f^T \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$ matrices simétricas semidefinidas positivas, y $\psi_g = [k_g^T \quad D_g^T]^T$ siendo $k_g^T \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$ y $D_g^T \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$ matrices simétricas definidas positivas. Entonces, la matriz H es Hurwitz también.

A continuación, con el fin de probar la estabilidad del sistema (4.4.9) bajo la acción de la ley de control (4.4.11), se presenta el siguiente resultado.

Teorema 4.4.1. Sea el sistema multi-agente con dinámicas lineales homogéneas expresado por (4.4.9) en lazo cerrado con la ley de control dada por (4.4.11), si las matrices $k_g > 0$, $D_g > 0$, $k_f > 0$ y $D_f > 0$. Entonces, ξ tiende asintóticamente y globalmente a cero.

Prueba. Considere la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\xi) = \frac{1}{2} \xi^T P_2 \xi, \quad P_2 = P_2^T, P_2 > 0. \quad (4.4.15)$$

Derivando $V(\xi)$ con respecto al tiempo se tiene

$$\dot{V}(\xi) = \xi^T H^T P_2 \xi + \xi^T P_2 H \xi. \quad (4.4.16)$$

Posteriormente por el Lema 4.4.1 la matriz H es Hurwitz, luego considerando $P_2 H + H^T P_2 = -Q$, se tiene

$$\dot{V}(\xi) = -\xi^T Q \xi < 0. \quad (4.4.17)$$

Por lo tanto, por el teorema de LaSalle (A.2.2), ξ converge asintóticamente y globalmente a un conjunto invariante $M = \{0, 0, 0\}$.

□ □ □

4.5 Control de formación basado en acoplamiento cruzado (cross-coupling)

A continuación, presenta un esquema de control cooperativo descentralizado basado en la técnica del acoplamiento cruzado, la cual es aplicada para minimizar el error más significativo, que en este caso corresponde al error de sincronización de robots diferenciales no-holonómicos (ver [14]). El problema de control de formación es formulado como un problema de sincronización. El algoritmo de control presentado en este apartado requiere de la información de dos robots vecinos, tal como se muestra en la Figura 4.2. Además, el algoritmo requiere una retroalimentación de la posición y del error de sincronización. En este algoritmo, pueden distinguirse los siguientes objetivos de control que compiten simultáneamente:

1. Control de seguimiento: Consiste en llevar al i -ésimo robot a lo largo de las trayectorias

deseadas.

2. Sincronización: Consiste en sincronizar el movimiento del robot con los robots inmediatos.

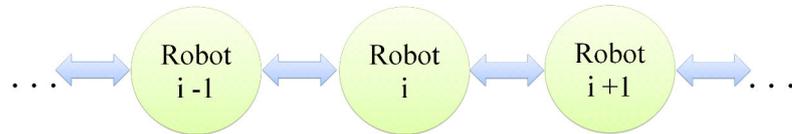


Figura 4.2: Topología de interconexión del i -ésimo robot con los robots vecinos.

Denote $S(\rho, t)$ como una formación deseada variable en el tiempo para cada robot, que es una función implícita que se genera interpolando a partir de varios puntos de restricción seleccionados por el usuario [11], donde ρ denota al vector de estados en forma general y t es el tiempo. Se asume que la cota o límite de la formación deseada $S(\rho, t)$ es denotado por $\partial S(\rho, t) = 0$ (el cual es una curva planar bidimensional).

Por otra parte, el objetivo es determinar las entradas de control apropiadas τ_{q_i} y τ_{θ_i} , tal que el i -ésimo robot converga a la posición deseada q_{id} mientras mantiene esta posición en la formación deseada $S(q_i, t)$, esto es, $\partial S(q_i, t) = 0$. De modo que $\partial S(\rho, t) = 0$ es una restricción común para todos los agentes del conjunto. **Tal restricción es posible que tenga diferentes formulaciones dependiendo de la tarea de sincronización.**

En lo que respecta a los estados deseados q_{id} , éstos deben ser definidos de tal forma que estén ubicados en la curva deseada $\partial S(q_{id}, t) = 0$. Nótese que sólo la posición q_i es explícitamente controlada en la formación, mientras que la orientación afecta implícitamente a la formación. Por lo tanto, la orientación deseada θ_{id} del i -ésimo agente es definida a partir de los estados de formación q_i . Entonces θ_{id} cambia constantemente durante el movimiento.

Debido a que el centro de masa está ubicado en el centro geométrico del robot móvil, el robot puede ser simplificado como una masa que se desplaza en un plano bidimensional, cuya

dinámica está dada por

$$M_i \ddot{q}_i = \tau_{qi}, \quad I_i \ddot{\theta}_i = \tau_{qi}. \quad (4.5.1)$$

Donde M_i y I_i corresponden a la matriz de pares inerciales y al momento de inercia, respectivamente, mientras que $q_i = [x_i \quad y_i]^T$ es un vector de posición en el plano coordenado. Por otra parte, la restricción del vector de coordenadas q_i del i -ésimo robot está dada por

$$\partial S(q_i, t) = 0 \quad : \quad \left\{ q_i(t) = A_i(t)C(t) + B_i(t) \right\}, \quad (4.5.2)$$

donde $A_i(t)$ es una matriz de restricción que depende de las características del i -ésimo agente; $C(t)$ es un vector común para todos los agentes; y $B(t)$ es un conjunto individual para cada agente. Por otra parte, desde que la matriz $A_i(t)$ es diseñada de modo que ésta sea invertible, se tiene

$$C(t) = A_i^{-1}(t)q_i(t). \quad (4.5.3)$$

Considérese que N robots son requeridos para mantener una curva elíptica durante el movimiento, entonces

$$A_i^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos \varphi_i(t)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin \varphi_i(t)} \end{bmatrix}, \quad C(t) = \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \end{bmatrix}, \quad B_i(t) = 0,$$

donde a y b denota a los radios de la elipse; $\varphi_i(t) = \tanh\left(\frac{b \sin \alpha_i}{a \cos \alpha_i}\right)$; y $\alpha_i = \tanh \frac{y_i}{x_i}$ denota el ángulo del robot en la elipse con respecto al centro de la elipse. Mientras tanto, q_{id} debe estar localizado en la curva de tal forma que $\partial S(q_{id}, t) = 0$. Entonces, definiendo el error de posición como $e = q_{id} - q_i$ y haciendo $c_i = A_i^{-1}$ se tiene

$$c_1 e_1 = c_2 e_2 = \dots = c_N e_N. \quad (4.5.4)$$

Nótese que (4.5.4) representa de manera implícita al objetivo de control de formación. Dado lo anterior, se define el error de sincronización como un vector dado por $\xi = [\xi_1^T \ \xi_2^T, \dots, \xi_N^T]^T$ para $i = 1, 2, \dots, N$, donde el error de sincronización del i -ésimo robot ξ_i se define como

$$\begin{aligned} \xi_1 &= c_1 e_1 - c_2 e_2 \\ \xi_2 &= c_2 e_2 - c_3 e_3 \\ &\vdots \\ \xi_N &= c_N e_N - c_N e_N. \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

Ley de control τ_{qi} está dada por

$$\tau_{qi} = M_i c_i^{-1} (\dot{u}_i - \dot{c}_i \dot{q}_i) + K_{ri} c_i^{-1} r_i + c_i^T K_\varepsilon (\xi_i - \xi_{i-1}), \quad (4.5.6)$$

con la que es posible controlar la traslación de cada robot, donde K_{ri} y K_ε son ganancias definidas positivas; E_i corresponde al error total, y es la suma del error de posición y al error de sincronización, esto es,

$$E_i = c_i e_i + \beta \int_0^t (\xi_i - \xi_{i-1}) d\zeta, \quad (4.5.7)$$

siendo β una matriz diagonal definida positiva; los vectores \dot{u}_i y r_i son definidos como

$$\dot{u}_i = \dot{r}_i + \frac{d}{dt}(c_i \dot{q}_i) \quad r_i = \dot{E}_i + \Lambda E_i, \quad (4.5.8)$$

respectivamente, donde Λ es una matriz diagonal definida positiva.

El controlador de formación y sincronización (4.5.6) es diseñado tal que r_i converge a cero, por lo tanto, el error global y su derivada convergen a cero.

Sustituyendo (4.5.6) en (4.5.1), el sistema en lazo cerrado resulta

$$M_i c_i^{-1} \dot{r}_i + K_{ri} c_i^{-1} r_i + c_i^T K_\varepsilon (\xi_i - \xi_{i-1}) = 0. \quad (4.5.9)$$

El control de formación (4.5.6) es formulado a partir del siguiente resultado.

Teorema 4.5.1. [14].

La ley de control (4.5.6) conduce a una convergencia asintótica del error de posición y el error de sincronización a cero, es decir, $e_i \rightarrow 0$ y $\varepsilon_i \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, bajo la condición de que la ganancia de control K_{ri} es suficientemente grande como para satisfacer $\lambda_{\min}(K_{ri}) \geq \lambda_{\max}(M_i \frac{d}{dt}(c_i^{-1})c_i)$, donde $\lambda_{\min}(\cdot)$ y $\lambda_{\max}(\cdot)$ el valor propio máximo y el mínimo de una matriz, respectivamente.

La prueba de este teorema puede consultarse en [14].

Por otra parte, para controlar el ángulo de orientación se úsa un control de par computado, que es definido como

$$\tau_{i\theta} = I_i \left(\ddot{\theta}_{id} + k_{vi} \dot{\tilde{\theta}}_i + k_{pi} \tilde{\theta}_i \right), \quad (4.5.10)$$

entonces, $\tilde{\theta}_i = 0$ y $\dot{\tilde{\theta}}_i = 0$ convergen globalmente y asintóticamente a cero.

Los pares para la rueda derecha y rueda izquierda son denotados por τ_{ri} y τ_{li} respectivamente, donde θ_i es definido alrededor de los ángulos 0° y 180° se tiene

$$\tau_{ri} = \frac{1}{2} \left(\frac{\tau_{qi}(x)}{\cos \theta_i} + \frac{\tau_{\theta_i}}{R} \right), \quad \tau_{li} = \frac{1}{2} \left(\frac{\tau_{qi}(x)}{\cos \theta_i} - \frac{\tau_{\theta_i}}{R} \right). \quad (4.5.11)$$

Mientras que, para valores de θ_i alrededor de 90° y 270° los pares para las ruedas están definidos por

$$\tau_{ri} = \frac{1}{2} \left(\frac{\tau_{qi}(y)}{\sin \theta_i} + \frac{\tau_{\theta_i}}{R} \right), \quad \tau_{li} = \frac{1}{2} \left(\frac{\tau_{qi}(y)}{\sin \theta_i} - \frac{\tau_{\theta_i}}{R} \right). \quad (4.5.12)$$

La importancia de la adecuada selección de los pares de las ruedas dadas por (4.5.11) o (4.5.12), radica en la necesidad de evitar singularidades en las entradas de control de las ruedas. Debido a las características no holonómicas del sistema (4.5.1), es necesario acotar el ángulo de orientación θ_i alrededor de los ángulos 0° y 180° o alrededor de 90° y 270° dependiendo de la entrada de control seleccionada para ruedas denotadas por (4.5.11) o (4.5.12).

4.6 Comentarios

En este capítulo, se revisaron leyes de control de formación y de sincronización, esto con la finalidad de realizar un estudio de técnicas existentes para el control de movimiento de un SMA. Se mostró la ley de control de sincronización propuesta en [35], la cual está restringida a que la trayectoria deseada global y la información de todos los robots del conjunto estén disponibles para el i -ésimo robot. La topología de interconexión es estática, y la implementación puede ser compleja debido a que el número de interconexiones entre los agentes aumenta conforme el número de elementos del sistema multi-agente aumenta.

Por otra parte, se presenta una ley de control de sincronización basada en los métodos de Líder-Seguidores y teoría de grafos [5]. En este esquema de control, la topología de intercone-

xión es cuasi-estática, esto es, que la topología de interconexión puede ser redefinida fuera de línea. Sin embargo, la estabilidad no está garantizada para trayectorias variables en el tiempo. Mientras tanto, en [6] se probó la estabilidad asintótica del algoritmo considerando trayectorias deseadas variables en el tiempo para un sistema SISO. En dicho esquema de control el error puede ser acumulativo para conjuntos grandes de agentes, por lo que es necesario ajustar las ganancias para reducir el error con respecto al líder.

Además, se presentó un control de formación basado en métodos de comportamiento [30], el cual sólo requiere de la información de dos robots vecinos y las propiedades de estabilidad asintótica y global están garantizadas. Sin embargo, el control está restringido a referencias constantes en el tiempo, debido a que la estabilidad no está garantizada para trayectorias variables en el tiempo. Por otra parte, el movimiento relativo entre los robots puede presentar oscilaciones en la transición de un punto a otro, esto debido a la ausencia de información de la velocidad relativa. Dicho problema es resuelto en [30] introduciendo el enfoque de pasividad.

Finalmente, se revisó un control de formación para sistemas multi-agente del tipo unicycle basado en técnicas de acoplamiento cruzado [14]. Esta estrategia de control consiste en controlar los estados de formación $q_i = [x_i \ y_i]^T$ simultáneamente, entonces la orientación deseada es seleccionada a partir de los estados de formación. Mientras tanto, se asume que el término correspondiente a las fuerzas centrífugas y de coriolis son nulos. Por otra parte, debido a que el algoritmo de control está basado en el modelo no-holonómico, el ángulo de orientación es restringido para evitar las singularidades en las entradas de control de las ruedas.

Capítulo 5

Diseño de controles de formación y seguimiento coordinado

5.1 Introducción

El control de formación y movimiento coordinado, consiste en mantener un conjunto de robots móviles bajo una formación rígida mientras siguen una trayectoria generada por un agente líder. Por lo tanto, si el digrafo $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \hat{\varepsilon}, \mathcal{A}\}$ es conexo, entonces

Definición 5.1.1. [20]. Una *formación* es un conjunto de N unidades autónomas ordenadas en un espacio coordinado de manera estratégica bajo estructuras geométricas regulares (triángulo, rectángulo, etc) o irregulares (que no tienen una estructura definida), donde no existen conflictos en las distancias relativas deseadas, en el sentido de que si $c_{ij}, c_{ji} \in \hat{\varepsilon}$, entonces $c_{ij} = -c_{ji}$, mientras que si $c_{oj} + c_{ji}, c_{om} + c_{mi} \in \hat{\varepsilon}$, entonces $c_{oj} + c_{ji} = c_{om} + c_{mi}$, donde "o" denota al agente líder, "i" denota al i -ésimo robot, y los subíndices " $m = j + 1$ " y " j " denotan a dos agentes vecinos.

Una formación es rígida si las distancias entre cada par de agentes no cambian en el tiempo, al menos bajo condiciones ideales [50]. Por otra parte, el movimiento coordinado requiere que

todos los agentes del conjunto estén sincronizados entre sí, de modo que el líder juega un papel importante en el consenso del sistema multi-agente, **entendiendo por consenso como los medios para llegar a un acuerdo con respecto a una cantidad de interés que depende de los estados de los agentes**. Por lo tanto, si el error de consenso es igual a cero se dice que el comportamiento sincronizado entre los agentes es alcanzado.

En este capítulo, se presentan tres enfoques de control de formación para robots móviles tipo unicycle holonómicos, cuya posición está definida a partir del centro geométrico del robot. Dichos enfoques están basados en los resultados presentados en la bibliografía citada al final de este trabajo de tesis. La primera estrategia de control, es diseñada a partir del algoritmo presentado en [30], el cual es combinado con el enfoque Líder-Seguidores y es adaptado al control de seguimiento coordinado. La segunda estrategia de control está basada en el algoritmo presentado en [35], la cual es una extensión del algoritmo de sincronización presentado en [58, 6] al control de seguimiento coordinado, esto debido a que dichas estrategias de control no pueden ser aplicadas directamente al control de formación. Además, se presentan condiciones suficientes de estabilidad basadas en el Método directo de Lyapunov. Finalmente, para proveer robustez al sistema multi-agente ante perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas, se introduce un enfoque de control basado en el Algoritmo Super-Twisting Adaptativo.

5.2 Control de formación basado en sincronización externa y métodos de comportamiento

En esta sección, se muestra una ley de control basada en la sincronización externa, donde la sincronía es determinada por el agente líder. Considérese un grupo de N robots seguidores tipo unicycle, los cuales deberán mantener una formación rígida mientras siguen una trayectoria generada por el robot líder. En este enfoque pueden distinguirse los siguientes objetivos de

control que compiten simultáneamente:

1. Llevar a los robots seguidores a lo largo de las trayectorias generadas por el agente líder.
2. Mantener la formación rígida entre los agentes seguidores.

Este enfoque de control descentralizado requiere de la información del error de seguimiento de dos robots vecinos y del error de seguimiento del i -ésimo agente con respecto al líder. Por otra parte, la formación está definida por las distancias relativas con respecto al líder de modo que **no existan colisiones entre los agentes seguidores**. Considérese un SMA conformado por N robots seguidores con dinámicas no lineales e idénticas dado por

$$\dot{x} = F(x, (t)) + (I_N \otimes g(x_i, t))u \quad (5.2.1)$$

donde $F(x, (t)) = [f(x_1, t)^T \quad f(x_2, t)^T \quad \dots \quad f(x_N, t)^T]^T$ con $f(x_i, t) \in \mathfrak{R}^n$ y $g(x_i, t) \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ se dice que son continuas, y $x = [x_1 \quad x_2 \dots x_N]$ con $x_i \in \mathfrak{R}^n$, el cual denota al vector de estados del i -ésimo agente. Los elementos del vector $\dot{x} \in \mathfrak{R}^N$ están dados por

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{\theta}_i \\ \dot{v}_i \\ \dot{\omega}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_i \cos(\theta_i) - L_i \omega_i \sin(\theta_i) \\ v_i \sin(\theta_i) + L_i \omega_i \cos(\theta_i) \\ \omega_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_i} & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_i \\ \tau_i \end{pmatrix} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}; \quad (5.2.2)$$

$$\Pi_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

donde el vector $\Pi_i \in \mathfrak{R}^p$ denota la salida del sistema. **En este apartado, y en lo que resta del capítulo, la dinámica no lineal para cada robot estará representada por (5.2.2).**

La linealización por retroalimentación de entrada-salida es usada para encontrar una relación directa entre las dinámicas de la salida $\Pi_i \in \mathfrak{R}^p$ y de la entrada de control $u_i \in \mathfrak{R}^m$. El vector de entrada $u \in \mathfrak{R}^N$ está dado por

$$u = \begin{bmatrix} u_1^T & u_2^T & \dots & u_N^T \end{bmatrix}^T \quad (5.2.3)$$

siendo $u_i = [F_i \quad \tau_i]^T$ definido como

$$u_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_i} \cos(\theta_i) & -\frac{L_i}{I_i} \sin(\theta_i) \\ \frac{1}{m_i} \sin(\theta_i) & \frac{L_i}{I_i} \cos(\theta_i) \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \nu_i - \begin{pmatrix} -v_i \omega_i \sin(\theta_i) & -L_i \omega_i^2 \cos(\theta_i) \\ v_i \omega_i \cos(\theta_i) & -L_i \omega_i^2 \sin(\theta_i) \end{pmatrix} \end{bmatrix}. \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}; \quad (5.2.4)$$

Por otra parte, sea una transformación de coordenadas dada por (4.4.8), la dinámica interna se vuelve no controlable y no observable, mientras que la dinámica cero es estable [30], entonces es de fase mínima débil.

Sustituyendo (5.2.3) en (5.2.1) se tiene que las dinámicas no lineales de cada agente (5.2.2) son separadas en sistemas dinámicos lineales homogéneos de primer orden, es decir, que las dinámicas lineales son idénticas, las cuales están definidos como

$$\dot{\gamma} = (I_N \otimes A)\gamma + (I_N \otimes B)\nu, \quad (5.2.5)$$

donde el vector $\gamma = [\gamma_1^T \quad \gamma_2^T, \dots, \gamma_N^T]^T$; $\gamma_i = [\zeta_{1i} \quad \zeta_{2i}, \dots, \zeta_{ni}]^T$ corresponde al vector de estados del i -ésimo agente; $\nu = [\nu_1^T \quad \nu_2^T, \dots, \nu_N^T]^T$ es un vector cuyos elementos ν_i corresponden control auxiliar del i -ésimo agente para $i = 1, 2, \dots, N$; $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ y $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ se definen respectivamente como

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por otra parte, la trayectoria deseada para el i -ésimo agente está definida como

$$\Pi_{id} = \Pi_o + c_{oi}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N; \quad (5.2.6)$$

siendo Π_o la trayectoria generada por el agente líder, la cual es una referencia común para cada agente del grupo. Mientras tanto, c_{oi} denota la distancia relativa entre el agente líder y el i -ésimo agente. Las trayectorias deseadas para cada agente son expresadas como

$$\dot{\gamma}_d = (I_N \otimes A)\gamma_d + (I_N \otimes B)\Pi_d^{(r)}, \quad (5.2.7)$$

donde $\gamma_d = [\gamma_{1d}^T \ \gamma_{2d}^T, \dots, \gamma_{Nd}^T]^T$; los elementos del vector γ_d están dados por el vector $\gamma_{id} = [\Pi_{id} \ \dot{\Pi}_{id}, \dots, \Pi_{id}^{(r-1)}]^T$, donde Π_{id} está dado por (5.2.6); el vector $\Pi_d^{(r)} = [\Pi_{1d}^{(r)T} \ \Pi_{2d}^{(r)T}, \dots, \Pi_{Nd}^{(r)T}]^T$, siendo $\Pi_{id}^{(r)}$ la r -ésima derivada de la trayectoria deseada Π_{id} del i -ésimo.

El objetivo es construir un control descentralizado en (5.2.5) tal que γ_i converga asintóticamente a γ_{id} .

Para lograr tal objetivo, un control auxiliar de trayectoria basado en [30] está denotado por

$$\nu = -[(I_N \otimes \psi_g) + (C \otimes \psi_f)]\xi + \Pi_d^r, \quad (5.2.8)$$

siendo el error de formación ξ un vector definido como

$$\xi = \gamma - \gamma_d = [\xi_1^T \ \xi_2^T, \dots, \xi_N^T]^T, \quad (5.2.9)$$

cuyos elementos corresponden al error de seguimiento del i -ésimo robot. Por lo tanto, se dice que el objetivo de seguimiento coordinado es alcanzado si ξ converge a cero. Sustituyendo (5.2.8) en (5.2.5), resulta que el sistema en lazo cerrado en función del error de formación está dado por

$$\dot{\xi} = [(I_N \otimes A) - (I_N \otimes B) [(I_N \otimes \psi_g) + (C \otimes \psi_f)]] \xi, \quad (5.2.10)$$

la cual es no autónoma. A continuación, se presenta el siguiente resultado.

Teorema 5.2.1. *Sea un sistema multi-agente, cuyas dinámicas no lineales homogéneas (5.2.1), bajo la acción del control (5.2.3) y la ley de control auxiliar (5.2.8), donde $C \in \mathfrak{R}^{N \times N}$ es una matriz de Hankel simétrica y definida positiva; si las ganancias de control*

$$\psi_g = [k_g^T \quad D_g^T]^T \in \mathfrak{R}^{m \times n}, \quad \psi_f = [k_f^T \quad D_f^T]^T \in \mathfrak{R}^{m \times n}$$

con las matrices $k_g, k_f \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ y $D_g, D_f \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ definidas positivas, entonces el error de formación ξ y su derivada $\dot{\xi}$ tienden asintóticamente a cero.

Prueba. Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov.

$$V(\xi) = \xi^T P_2 \xi, \quad P_2 = P_2^T, P_2 > 0. \quad (5.2.11)$$

La derivada temporal de $V(\xi)$ a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado (5.2.10) está dada por

$$\dot{V}(\xi) = \xi^T P_2 \dot{\xi} + \dot{\xi}^T P_2 \xi = \xi^T [P_2 H + H^T P_2] \xi, \quad (5.2.12)$$

siendo $H = [(I_N \otimes A) - (I_N \otimes B) [(I_N \otimes \psi_g) + (C \otimes \psi_f)]]$. Luego, dados los argumentos presentados en [30], puede concluirse que la matriz H es Hurwitz. Por lo tanto, $\dot{V}(\xi)$ satisface la ecuación algebraica de Lyapunov dada por $P_2 H + H^T P_2 = -Q$. Entonces, resulta que

$$\dot{V}(\xi) = -\xi^T Q \xi, \leq 0. \quad (5.2.13)$$

Dado que la matriz Q es simétrica y definida positiva, por el lema de Barbalat A.2.1 $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(\xi) \rightarrow 0$, entonces puede concluirse que ξ converge asintóticamente a cero. Por lo tanto los elementos del vector ξ también convergen asintóticamente a cero.

□ □ □

Adicionalmente, considerando la definición 2.2.1 se dice que objetivo de sincronización externa es alcanzado, desde que el error de formación ξ tiende asintóticamente a cero, lo cual implica que $\dot{\xi}$ converga asintóticamente a cero. Si las distancias relativas son constantes, es decir, $\dot{c}_{oi} = 0$, entonces las velocidades de todos los agentes convergen a la velocidad del líder, esto es,

$$\dot{\Pi}_1 = \dot{\Pi}_2 = \dots = \dot{\Pi}_N \longrightarrow \dot{\Pi}_o \quad t \rightarrow \infty. \quad (5.2.14)$$

Este algoritmo de formación y de seguimiento coordinado requiere solamente de la información de dos agentes vecinos y del líder. Sin embargo, debido a que la topología de interconexión es estática, el algoritmo de control está restringido a una misma topología de interconexión. Por lo tanto, la información del líder deberá estar disponible para todos los agentes del conjunto, lo cual no siempre es posible. Dado lo anterior, se presentará en la siguiente sección un enfoque basado en teoría de grafos y método de Líder-Seguidor, donde es posible establecer una

jerarquía entre los agentes seguidores, debido a que la topología es del tipo cuasi-estática, es decir, la topología puede ser redefinida fuera de línea, y permanece constante mientras siguen la trayectoria deseada.

5.3 Control de formación basado en métodos de Líder-Seguidores y Teoría de grafos

En este apartado, se muestra un algoritmo de control basado en teoría de grafos y métodos de Líder-Seguidores. Sea un sistema multi-agente representado por un **digrafo de formación** $\dot{\mathcal{G}} = \{\mathcal{V}, \dot{\varepsilon}, \dot{\mathcal{A}}\}$ (ver definición 2.2.7), el cual es bien definido si cumple las condiciones presentadas en la definición 5.1.1. Entonces, las interacciones entre los agentes seguidores son representadas a través de la matriz **laplaciana** $\tilde{L}(\dot{\mathcal{G}})$. Por otra parte, igual que en la sincronización externa, en este enfoque la sincronización es llevada a cabo por el agente líder, quien gobierna el movimiento de los demás agentes del conjunto. Sin embargo, la información de la trayectoria generada por el agente líder puede no estar disponible para todos los agentes. Por lo tanto, existen agentes seguidores en el conjunto que obtienen la trayectoria deseada de forma indirecta a través de la posición los agentes vecinos. Por consiguiente, los agentes seguidores también deberán mantener las distancias relativas entre los agentes vecinos.

En este enfoque de control pueden distinguirse los siguientes objetivos de control que compiten simultáneamente:

1. Llevar a los robots seguidores a lo largo de las trayectorias generadas por el agente líder.
2. Mantener la formación rígida entre los agentes seguidores.

Considérese un grupo de $P = 1 + N$ robots móviles tipo unicycle conformado por un líder y N

robots seguidores. Las interacciones entre los robots seguidores son representados por el grafo dirigido $\tilde{\mathcal{G}}$, mientras que las dinámicas lineales homogéneas de los robots móviles seguidores están dadas en forma global por

$$\dot{\gamma} = (I_N \otimes A)\gamma + (I_N \otimes B)\nu, \quad (5.3.1)$$

siendo $\gamma = [\gamma_1^T \ \gamma_2^T, \dots, \gamma_N^T]^T$, cuyos elementos $\gamma_i = [\zeta_{1i} \ \zeta_{2i}, \dots, \zeta_{ni}]^T$ corresponden al vector de estados del i -ésimo agente; el vector $\nu = [\nu_1^T \ \nu_2^T, \dots, \nu_N^T]^T$ está conformado por los controles auxiliares ν_i del i -ésimo agente. Finalmente, $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ y $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ se definen respectivamente como

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por otra parte, la dinámica del líder está dado por

$$\dot{\gamma}_o = A\gamma_o + B\Pi_o^{(r)}, \quad (5.3.2)$$

siendo γ_o una trayectoria común para todo el conjunto.

Por lo tanto, las trayectorias deseadas para cada agente pueden ser expresadas como

$$\dot{\gamma}_d = (I_N \otimes A)\gamma_d + (I_N \otimes B)\Pi_d^{(r)}, \quad (5.3.3)$$

siendo el vector de estados $\gamma_d = [\gamma_{1d}^T \ \gamma_{2d}^T, \dots, \gamma_{Nd}^T]^T$, donde los elementos γ_{id} están dados por $\gamma_{id} = [\Pi_{id} \ \dot{\Pi}_{id}, \dots, \Pi_{id}^{(r-1)}]^T$ con

$$\Pi_{id} = \Pi_o + c_{oi} \quad (5.3.4)$$

donde el término c_{oi} es una referencia dada por

$$c_{oi} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{oi} \\ y_{oi} \end{bmatrix}, \quad (5.3.5)$$

las coordenadas x_{oi} y y_{oi} corresponden a la distancia relativa deseada entre el i -ésimo agente y el líder; φ es el ángulo deseado de la formación con respecto al agente líder, la cual es una referencia angular común para todo el conjunto; el vector $\Pi_d^{(r)}$ es un vector definido como $\Pi_d^{(r)} = [\Pi_{1d}^{(r)T} \ \Pi_{2d}^{(r)T}, \dots, \Pi_{Nd}^{(r)T}]^T$, siendo el superíndice r la r -ésima derivada. Entonces, el error de consenso es denotado por

$$\delta = \gamma - \gamma_d, \quad (5.3.6)$$

donde, la formación deseada está dada de manera implícita por el vector γ_d . Por otra parte, la distancia del i -ésimo robot con respecto al sistema inercial de referencia Π_{id} , está dado por

$$\Pi_{id} = \frac{1 - g_i}{d_i} \left[\sum_{j=1}^N a_{ji} (\Pi_j + c_{ji}) \right] + g_i (\Pi_o + c_{oi}) \simeq \Pi_o + c_{oj}, \quad (5.3.7)$$

siendo d_i y a_{ji} elementos de la matriz **laplaciana** $\tilde{L}(\tilde{\mathcal{G}})$ (ver definición 5.1.1); Π_o es la posición del robot líder; c_{oi} es una referencia deseada del i -ésimo agente con respecto al líder dada por (5.3.5); c_{ji} es una referencia deseada medida del i -ésimo agente con respecto al agente j definida como

$$c_{ji} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ji} \\ y_{ji} \end{bmatrix}, \quad (5.3.8)$$

donde x_{ji} y y_{ji} corresponden a las coordenadas de la distancia relativa deseada del i -ésimo agente con respecto al agente j .

Por otra parte, en (5.3.7) si la posición del líder está disponible para el i -ésimo agente, es decir, $g_i = 1$, entonces el primer término se elimina. Si por el contrario, la posición del líder no está disponible para el i -ésimo agente, esto es $g_i = 0$, entonces se tiene que el segundo término queda anulado. Por consiguiente, la posición del líder es obtenida de forma indirecta a partir de las distancias relativas y posiciones de los agentes adjuntos.

El objetivo es construir un control descentralizado en (5.3.1) tal que la norma del vector de error de consenso $|\delta|$ converga asintóticamente a cero respectivamente. Para dar solución a este problema, en este apartado se propone un control de formación basado en [58, 6, 35]. Las leyes de sincronización presentadas en las referencias citadas han sido extendidas para resolver el problema de control de formación y seguimiento coordinado. Dada la ecuación (5.3.7), defínase el control auxiliar para el i -ésimo robot como

$$\nu_i = -K e_i + \Pi_{di}^{(r)}, \quad (5.3.9)$$

donde el error de sincronización e_i está dado por

$$e_i = \sum_{j=1}^N a_{ji}(\gamma_i - \gamma_j - C_{ji}) + g_i(\gamma_i - \gamma_o - C_{o1}). \quad (5.3.10)$$

Por otra parte, la ganancia de retroalimentación de estado $K_i \in \mathfrak{R}^{p \times n}$ es denotada por

$$K = [k_p \quad k_v], \quad k_p, k_v \in \mathfrak{R}^{p \times p} \quad (5.3.11)$$

donde k_p y k_v son simétricas y definidas positivas.

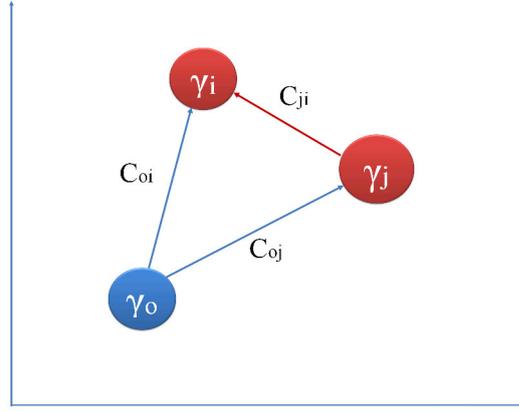


Figura 5.1: Topología de interconexión del i -ésimo robot con un robot vecino y el líder.

Por otra parte, desde que $d_i = \sum_{j \in N} a_{ji}$ y que $C_{oj} + C_{ji} = C_{oi}$ (ver Figura 5.1), entonces el control puede ser expresado en forma global como

$$\nu = -(I_N \otimes K)e + \Pi_d^{(r)}, \quad (5.3.12)$$

donde el error global e es dado por

$$e = \left[(\tilde{L} + G) \otimes I_n \right] \delta, \quad (5.3.13)$$

con $G = \text{diag}\{g_i\}$. Luego $\Pi_d^{(r)}$ es definido en forma global como

$$\Pi_d^{(r)} = (I_N - G)D^{-1} \left[\dot{\Lambda} \Pi^{(r)} + C^{(r)} \right] + G \Pi_d^{(r)}. \quad (5.3.14)$$

Siendo $\Pi^{(r)} = [\Pi_1^{(r)T} \quad \Pi_2^{(r)T}, \dots, \Pi_N^{(r)T}]^T$; $\Pi_d^{(r)} = [\Pi_{1d}^{(r)T} \quad \Pi_{2d}^{(r)T}, \dots, \Pi_{Nd}^{(r)T}]^T$; $\Pi_{id}^{(r)} = \Pi_o^{(r)} + c_{oi}^{(r)}$. Además, $C^{(r)}$ es un vector definido por

$$C^{(r)} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N a_{j1} c_{j1}^{(r)} \\ \sum_{j=1}^N a_{j2} c_{j2}^{(r)} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^N a_{jN} c_{jN}^{(r)} \end{bmatrix}. \quad (5.3.15)$$

A continuación se presenta el siguiente resultado.

Teorema 5.3.1. *Asumiendo que \mathcal{G} es un **digrafo** conexo, sea un SMA (5.2.1), bajo la acción del control (5.2.3) y el control auxiliar (5.3.12), con $K = [k_p \quad k_v]$ siendo $k_p, k_v > 0$. Entonces, le error de consenso δ converge asintóticamente a cero.*

Prueba. Sustituyendo (5.3.12) en (5.3.1), se tiene que el sistema en lazo cerrado en función del error de consenso resulta

$$\dot{\delta} = \dot{\gamma} - \dot{\gamma}_0 = (I_N \otimes A - (\tilde{L} + G) \otimes BK) \delta = H \delta. \quad (5.3.16)$$

Dado lo anterior, considérese la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\delta) = \delta^T P_2 \delta, \quad P_2 = P_2^T, P_2 > 0. \quad (5.3.17)$$

Derivando $V(\delta)$ con respecto a las trayectorias del sistema en lazo cerrado (5.3.16), resulta

$$\dot{V}(\delta) = \delta^T [P_2 H + H^T P_2] \delta. \quad (5.3.18)$$

Luego por el Lema 4.3.1 y $K = [k_p \quad k_v]$ siendo $k_p, k_v > 0$ de modo que la matriz H es Hurwitz [58], entonces $\dot{V}(\delta)$ satisface a la ecuación algebraica de Lyapunov dada por $P_2 H + H^T P_2 = -Q$, entonces

$$\dot{V}(\delta) = -\delta^T Q \delta \leq 0. \quad (5.3.19)$$

dado que Q es una matriz simétrica y definida positiva, entonces el Lema de Barbalat A.2.1, puede concluirse que el error de consenso δ converge asintóticamente a cero.

□ □ □

Este algoritmo de control permite redefinir las topologías de interconexión bajo ciertas condiciones para el **digrafo de formación** \mathcal{G} . Sin embargo, la estabilidad del sistema no está garantizada ante incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas. Por lo tanto, en el siguiente apartado, para proporcionar robustez al sistema multi-agente, se presenta un enfoque de control basado en el Algoritmo Super-Twisting Adaptativo.

5.4 Control de formación basado en métodos geométricos y modos deslizantes

En la mayoría de los algoritmos de control presentados en este documento se utiliza la linealización entrada-salida para establecer una relación entre las dinámicas de la entrada y la salida. Sin embargo, con el objetivo de proveer robustez y garantizar los objetivos de control de formación y movimiento coordinado, se presenta un enfoque de control basado en técnicas de linealización por retroalimentación de estado y el Algoritmo Super-Twisting Adaptativo (ASTA) [45]. El esquema de control se muestra en la Figura 5.2.

El ASTA es seleccionado debido a que posee las siguientes propiedades:

- El controlador es robusto a perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas.

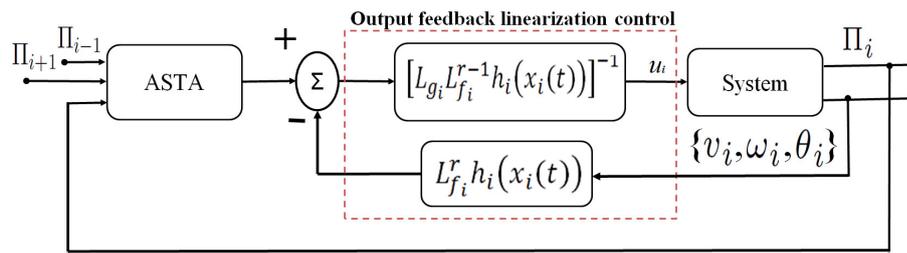


Figura 5.2: Estructura de control.

- La adaptación garantiza no sobreestimar las ganancias de control.
- Asegura la convergencia en tiempo finito.
- Reduce el fenómeno del chattering.

Bajo este enfoque, los objetivos de control son formulados para dos casos diferentes. El primer caso la topología de interconexión se muestra en la Figura 4.2. Los objetivos de control son planteados como

1. Mover la formación de una posición a otra.
2. Mantener la formación definida durante la transición de un punto a otro.
3. Mantener la formación ante perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas.

El segundo caso está basado en [58] y [6], donde los objetivos de control son

1. Llevar al robot a lo largo de las trayectorias deseadas.
2. Mantener la formación deseada a través de las distancias relativas definidas.
3. Mantener la formación y trayectoria ante perturbaciones externas.

Entonces, la superficie deslizante es definida de forma diferente en cada caso. El objetivo es diseñar un control continuo sin sobre estimar las ganancias, de tal forma que la variable deslizante s y su derivada \dot{s} convergan a cero en tiempo finito, esto bajo perturbaciones acotadas del tipo aditivas y multiplicativas. Considérese un conjunto de N robots móviles seguidores, donde la dinámica no lineal del i -ésimo robot está dada por

$$\dot{x}_i = f(x_i, t) + g(x_i, t)u_i, \quad (5.4.1)$$

donde la función $f(x, t) \in \mathfrak{R}^n$ se dice que es continua, mientras que $u_i \in \mathfrak{R}^m$ denota a la entrada de control y $x_i \in \mathfrak{R}^n$ denota al vector de estados. Luego, considérese el Algoritmo Super-Twisting Adaptativo presentado en [33], el cual está dado por

$$\begin{aligned} u_i &= -K_{1,i}|s_i|^{1/2}\text{sign}(s_i) + \Phi_i, \\ \dot{\Phi}_i &= -K_{2,i}\text{sign}(s_i). \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

Siendo u_i la señal de control, $K_1(t, s, \dot{s})$ y $K_2(t, s, \dot{s})$ son las ganancias de control adaptativas y s_i es la variable deslizante.

Por simplicidad, se obviará el subíndice i de modo que $s_i = s$, $u_i = u$, y de la misma manera para las demás variables. Considérese las siguientes hipótesis

Hipótesis 5.4.1. *La variable deslizante $s = s(x, t) \in \mathfrak{R}^p$ es diseñada de tal manera que las dinámicas son compensadas en el sistema (5.4.1), de modo que $s = s(x, t) = 0$.*

Hipótesis 5.4.2. *El grado relativo del sistema (5.4.1), considerando la variable deslizante $s(x, t)$, con respecto a u es igual a uno. Además las dinámicas internas son estables.*

La dinámica de la variable deslizante s está dada por

$$\dot{s} = a(x, t) + b(x, t)u, \quad (5.4.3)$$

donde $a(x, t) = \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x}f(x, t)$, $b(x, t) = \frac{\partial s}{\partial x}g(x)$.

Hipótesis 5.4.3. *La función $b(x, t) \in \Re$ es conocida y diferente de cero $\forall x$ y $t \in [0, \infty)$. Además, $b(x, t) = b_0(x, t) + \Delta b(x, t)$, donde $b_0(x, t)$ es la parte nominal de $b(x, t)$, la cual es conocida. Además existe una constante positiva desconocida δ_1 , tal que $\Delta b(x, t)$ satisface*

$$\left| \frac{\Delta b(x, t)}{b_0(x, t)} \right| \leq \delta_1.$$

Hipótesis 5.4.4. *Existe una constante positiva desconocida δ_s tal que la derivada de la función $a(x, t)$ es acotada,*

$$|\dot{a}(x, t)| \leq \delta_2. \quad (5.4.4)$$

Entonces, el sistema en lazo cerrado (5.4.3) se escribe como

$$\begin{aligned} \dot{s} &= a(x, t) - K_1 b(x, t) |s|^{1/2} \text{sign}(s) + b(x, t) \Phi, \\ \dot{\Phi} &= -K_2 \text{sign}(s). \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

Además, considérese el siguiente cambio de variables

$$\varsigma = (\varsigma_1, \varsigma_2)^T = (|s|^{1/2} \text{sign}(s), b(x, t) \Phi + a(x, t))^T. \quad (5.4.6)$$

Entonces, el sistema (5.4.3) puede escribirse como

$$\dot{\varsigma} = \tilde{A}(\varsigma_1)\varsigma + \tilde{g}(\varsigma_1)\varrho(x, t). \quad (5.4.7)$$

En donde

$$\tilde{A}(\varsigma_1) = \frac{1}{2|\varsigma_1|} \begin{pmatrix} -2b(x, t)K_1 & 1 \\ -2b(x, t)K_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{g}(\varsigma_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

siendo $\bar{\varrho}(x, t) = \dot{b}(x, t)\Phi + \dot{a}(x, t) = 2\varrho(x, t)\frac{\varsigma_1}{|\varsigma_1|}$. Para probar la estabilidad local del sistema en lazo cerrado ante dichas perturbaciones, considérese que

Hipótesis 5.4.5. $\dot{b}(x, t)\Phi$ es acotado, cuya cota es dada por δ_3 la cual es desconocida, esto es, $|\dot{b}(x, t)v| < \delta_3$.

Entonces el sistema puede ser expresado como

$$\dot{\varsigma} = \bar{A}(\varsigma_1)\varsigma, \quad \bar{A}(\varsigma_1) = \frac{1}{|\varsigma_1|} \begin{pmatrix} -\frac{b}{2}(x, t)K_1 & \frac{1}{2} \\ \varrho(x, t) - b(x, t)K_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.4.8)$$

donde $|\varsigma_1| = |s|^{1/2}$. Luego, considérese la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_0 = \varsigma^T \tilde{P}_2 \varsigma, \quad \tilde{P}_2 = \tilde{P}_2^T, P_2 > 0. \quad (5.4.9)$$

Donde \tilde{P}_2 es constante, y corresponde a la solución de la ecuación algebraica de Lyapunov, definida por

$$\bar{A}^T \tilde{P} + \tilde{P} \bar{A} = -\tilde{Q}. \quad (5.4.10)$$

Dada la derivada temporal de la función candidata de Lyapunov (5.4.9) a lo largo de las trayectorias de (5.4.14), y desde que \bar{A} es Hurwitz para $b(x, t)K_1 > 0$, $2b(x, t)K_2 + 2\rho(x, t) > 0$, para todo $\tilde{Q} = \tilde{Q}^T > 0$, entonces existe una única solución $\tilde{P} = \tilde{P}^T$. Por lo que se tiene

$$\dot{V}_0 = -|s|^{-1/2} \varsigma^T \tilde{Q} \varsigma. \quad (5.4.11)$$

Entonces \dot{V}_0 es continua pero no localmente Lipschitz. La estabilidad del equilibrio $\varsigma = 0$ de (5.4.7) depende de las propiedades de la matriz \tilde{A} . Por lo tanto, es posible mostrar las propiedades de convergencia del origen por medio del teorema de Zubov's [37].

Dadas las hipótesis (5.3.4) y (5.3.5) se tiene que

$$0 < \rho(x, t) < \delta_2 + \delta_3 = \delta_4.$$

Por lo tanto, debido a que ς_1 y ς_2 convergen a cero en tiempo finito, entonces $s \rightarrow 0$ y $\dot{s} \rightarrow 0$ en tiempo finito.

El diseño del control basado en el enfoque ASTA es formulado en el siguiente teorema

Teorema 5.4.1. [45]. *Considerando el sistema (5.4.3), y satisfaciendo las hipótesis (5.3.3), (5.3.4) y (5.3.5), para $\delta_1, \delta_2 > 0$ los cuales son desconocidos. Entonces, para cualquier condición inicial $x(0)$ y $s(0)$, existe un tiempo finito $0 < t_f$ y un parámetro μ , por lo tanto*

$$K_1 > \frac{\delta_1 (\lambda + 4\epsilon_*^2) + \epsilon_*}{\lambda} + \frac{[2\epsilon_*\delta_1 - \lambda - 4\epsilon_*^2]^2}{4\epsilon_*\lambda},$$

si $|s(0)| > \mu$, tal que $|s| \leq \eta_1$ y $|\dot{s}| \leq \eta_2$ es estabilizado $\forall t \geq t_F$ bajo la acción del control ASTA con las ganancias adaptivas

$$\begin{aligned} \dot{K}_1 &= \begin{cases} \omega_1 \sqrt{\frac{\gamma_1}{2}} \text{sign}(|s| - \mu), & \text{si } K_1 > K_*, \\ K_*, & \text{si } K_1 \leq K_*, \end{cases} \\ K_2 &= 2\epsilon_* K_1, \end{aligned} \quad (5.4.12)$$

donde ϵ_* , λ , γ_1 , ω_1 , μ son constantes arbitrarias definidas positivas, y $\eta_1 \geq \mu$, $\eta_2 > 0$.

La prueba del Teorema 5.4.1 puede consultarse en [45].

Considere (5.4.1), donde la entrada de control u_i es definida por (5.2.4) y está dada como

$$\begin{aligned} u_i &= \begin{pmatrix} \frac{1}{m_i} \cos(\theta_i) & -\frac{L_i}{I_i} \sin(\theta_i) \\ \frac{1}{m_i} \sin(\theta_i) & \frac{L_i}{I_i} \cos(\theta_i) \end{pmatrix}^{-1} \\ &\times \left[\nu_i - \begin{pmatrix} -v_i \omega_i \sin(\theta_i) & -L_i \omega_i^2 \cos(\theta_i) \\ v_i \omega_i \cos(\theta_i) & -L_i \omega_i^2 \sin(\theta_i) \end{pmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (5.4.13)$$

Donde $\nu_i = [\nu_{ix} \quad \nu_{iy}]^T$ corresponde al control auxiliar, no obstante ν_{ix} y ν_{iy} son definidos en (5.4.14).

$$\begin{aligned} \nu_{i_l} &= -K_{1,i_l} |s_{i_l}|^{1/2} \text{sign}(s_{i_l}) + \Phi_{i_l}, \\ \dot{\Phi}_{i_l} &= -K_{2,i_l} \text{sign}(s_{i_l}), \quad l \in \{x, y\}. \end{aligned} \quad (5.4.14)$$

Mientras tanto, las superficies deslizantes han sido definidas para dos casos en particular, los cuales han sido mencionados al principio de este apartado. El caso uno, está basado en métodos de comportamiento y se asume que las trayectorias deseadas son constantes. Entonces, la superficie deslizante para el i -ésimo agente se define como

$$s_i = [\tilde{\Pi}_i + \psi_i(2\tilde{\Pi}_i - \tilde{\Pi}_{i-1} - \tilde{\Pi}_{i+1})] \\ + \lambda_i[\dot{\Pi}_i + \psi_i(2\dot{\Pi}_i - \dot{\Pi}_{i-1} - \dot{\Pi}_{i+1})], \quad (5.4.15)$$

donde $\psi_i > 0$ es una matriz simétrica, $\tilde{\Pi}_i \in \mathfrak{R}^2$ y $\dot{\Pi}_i \in \mathfrak{R}^2$ corresponden al error de posición, y la velocidad del i -ésimo robot respectivamente.

Mientras tanto, el segundo caso corresponde a los métodos de Líder-Seguidores, donde las trayectorias deseadas son variantes con el tiempo. Sea \mathcal{G} un grafo bien definido, entonces la superficie deslizante es seleccionada a partir de (5.3.10), entonces se tiene

$$s_i = \left[\sum_{j=1}^N a_{ji}(\Pi_i - \Pi_j - c_{ji}) + g_i(\Pi_i - \Pi_o - c_{o1}) \right] \\ + \lambda_i \left[\sum_{j=1}^N a_{ji}(\dot{\Pi}_i - \dot{\Pi}_j - \dot{c}_{ji}) + g_i(\dot{\Pi}_i - \dot{\Pi}_o - \dot{c}_{o1}) \right], \quad (5.4.16)$$

donde $\Pi_j \in \mathfrak{R}^2$ y $\Pi_o \in \mathfrak{R}^2$ denotan a la posición del agente vecino j y la posición del agente líder.

Finalmente, se concluye que para ambos casos el control de formación está garantizado ante perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas. Sin embargo, la complejidad de este algoritmo radica en la selección de los parámetros del ASTA debido a que no existe un método de sintonía. Por consiguiente, los parámetros son definidos de manera heurística para cada robot del conjunto dependiendo de las interconexiones entre ellos.

5.5 Conclusiones

En este capítulo se propusó tres enfoques para dar solución al problema de formación y seguimiento coordinado. Se diseñó un control basado en métodos de comportamiento y métodos de Líder-Seguidores. En este algoritmo de control, se asume que la topología de interconexión es estática y que la posición y velocidad del agente líder está disponible para todos los agentes

seguidores. Sin embargo, la estabilidad ante perturbaciones e incertidumbres paramétricas no está garantizada.

Además, se propuso un algoritmo de control de formación basado en métodos de Líder-Seguidores y teoría de grafos. En este enfoque de control, no es necesario que la información del líder esté disponible para todos los agentes. Sin embargo, es necesario que la topología de interconexión sea conexa y que el único nodo aislado sea el líder. Al igual que en el primer enfoque, la estabilidad no está garantizada ante perturbaciones e incertidumbres paramétricas.

Finalmente, se presentó un enfoque de control basado en el Algoritmo Super-Twisting Adaptativo, el cual es robusto ante perturbaciones e incertidumbres externas desconocidas pero acotadas, donde se presentaron dos casos de estudio, el primer caso está basado en métodos de comportamiento y se asume que las trayectorias deseadas son constantes; mientras tanto, el segundo objetivo es definido a partir de los métodos de Líder-Seguidores, donde las trayectorias deseadas son variables con el tiempo. Debido a que no existe un método de sintonía, los parámetros del ASTA son definidos de manera heurística para cada robot del conjunto dependiendo de las interconexiones entre ellos.

Capítulo 6

Resultados

6.1 Introducción

En el presente capítulo se presentan los resultados obtenidos en las simulaciones de los algoritmos del capítulo 5. Los cuales fueron comparados con algunas leyes de control citadas en este trabajo. Las simulaciones son realizadas en el ambiente de Matlab/Simulink. Por simplificación, se referirá al control de formación basado en sincronización externa y métodos de comportamiento (5.2.8) como control 1; mientras que al controlador de formación basado en teoría de grafos y métodos de Líder-Seguidores (5.3.12) como control 2; finalmente, se referirá como control, 3 al control de formación basado en técnicas por retroalimentación de estado y Algoritmo Super-Twisting Adaptivo (5.4.14). Dichos controladores serán comparados con otros controladores presentes en la literatura. Por otra parte, las gráficas de las simulaciones son presentadas al final de este capítulo.

6.2 Simulación: Control 1

En este apartado se presentan los resultados de las simulaciones del control 1, los cuales son comparados con los resultados obtenidos en las simulaciones del algoritmo presentado en [6]. En el control 1 se asume que las distancias relativas son seleccionadas de tal modo que no existen coaliciones entre los robots. Por lo tanto, el algoritmo no garantiza la no coalición, ésta característica será usada para fines ilustrativos, de modo que se harán nulas las distancias relativas con la finalidad de revisar los aspectos de sincronía y visualizar la convergencia de la posición y velocidad de cada seguidor a la posición y velocidad del robot líder. Esto se realizará también en apartados posteriores.

Considérese un conjunto de tres robots seguidores, los cuales siguen una trayectoria circular generada por un robot líder. **Las dinámicas no lineales del i -ésimo agente son definidas por (5.2.2)**, donde la entrada de control $u_i = [F_m \quad T_m]^T$ está dada por (5.2.4). Entonces, las dinámicas no lineales de cada agente son reducidas a sistemas dinámicos lineales de primer orden. Por lo tanto, se tiene un conjunto sistema multi-agente con dinámicas lineales homogéneas dadas por (5.3.1). Mientras tanto, la topología de interconexión entre los agentes está definida en la Figura 6.1, donde la matriz **laplaciana** $L(\mathcal{G})$ tiene un valor propio cero con multiplicidad uno correspondiente al vector propio 1, y todos los demás valores propios tienen parte real positiva igual a 4. Nótese que todos los agentes tienen acceso al estado completo del líder.

Considérese el control auxiliar presentado en [6], que será referido como CLSG, en donde la ganancia de control K fue calculada a partir de un regulador cuadrático lineal (LQR), con $Q = I_4$ y $R = I_2$, resulta que

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1.7321 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1.7321 \end{bmatrix}, \quad c = 50.$$

Por otra parte, el control 1 está definido por la ecuación (5.2.8) como

$$\nu = -[(I_N \otimes \psi_g) + (C \otimes \psi_f)] \xi + \Pi_d^r.$$

Entonces las ganancias son definidas por

$$\psi_g = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 86.6050 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 86.6050 \end{bmatrix}, \quad \psi_f = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 86.6050 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 86.6050 \end{bmatrix}.$$

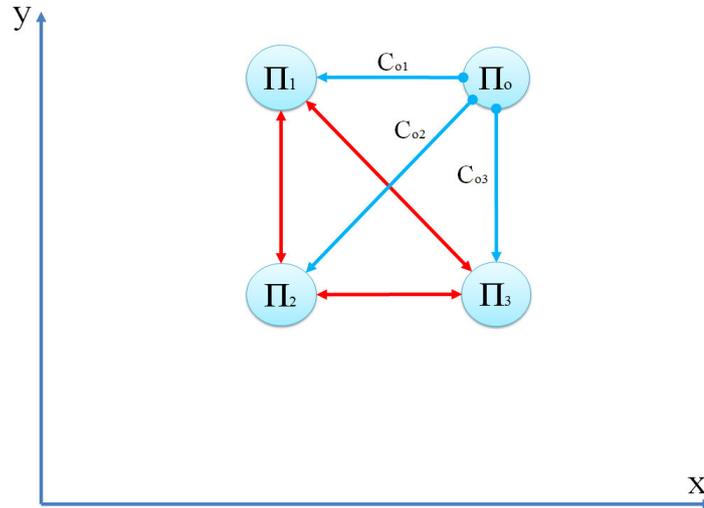


Figura 6.1: Topología de interconexión de cuatro agentes aplicado en la Simulación 1.

En base lo anterior se obtuvieron lo siguiente; en las Figuras (6.4) y (6.5) se muestran las entradas de control $u_i = [Fm_i \quad Tm_i]^T$ para $i = 1, 2, 3$; con los controladores mencionados, cuya diferencia es mínima entre ambas señales de control. Mientras tanto, en la Figura (6.6) se tiene el error de posición de los robots seguidores con respecto al líder. Por lo tanto, se puede concluir que el error es menor empleando el control 1 como control auxiliar.

En la Figura 6.7, se muestra el error de sincronización entre los agentes, nótese que para

ambos casos la sincronía entre los agentes seguidores está garantizada. Por último, en la Figura 6.8 se muestran las trayectorias con respecto al tiempo para una formación cuadrada cuyas distancias entre los agentes son igual a $2m$. Por otra parte, las velocidades de los agentes con respecto al tiempo se muestran en la Figura 6.9, nótese que la velocidad de cada agente converge a la velocidad del líder, entonces se garantiza el objetivo de sincronización externa. De esta manera se prueba la eficacia del algoritmo.

Por lo tanto, el control 1 demuestra mejor desempeño que el algoritmo presentado en [58, 6], ya que el error con respecto al líder converge a cero. Sin embargo, a diferencia del control 1, el algoritmo propuesto en [58, 6] está basado en el LQR, lo cual es una ventaja al momento de definir las ganancias de control K .

6.3 Simulación: Control 2

Los resultados de la simulación del segundo presentado en el capítulo 5 son presentados en este apartado. El algoritmo de control (5.3.12) será denominado control 2, el cual está dado por

$$\nu = - \left[(\tilde{L} + G) \otimes K \right] \delta + (I_N - G)D^{-1} \left[\dot{\lambda}\Pi^{(r)} + C^{(r)} \right] + G\Pi_d^{(r)}.$$

No obstante, se requiere que un grupo de tres robots seguidores mantengan una formación cuadrada a un ángulo $\alpha = 0$ con respecto al líder, mientras siguen la trayectoria circular generada por el agente líder. Supóngase que la información del agente líder no está disponible para todos los agentes tal como se muestra en la Figura 6.2.

Considérese el algoritmo de control presentado en [6], en donde las ganancias de control

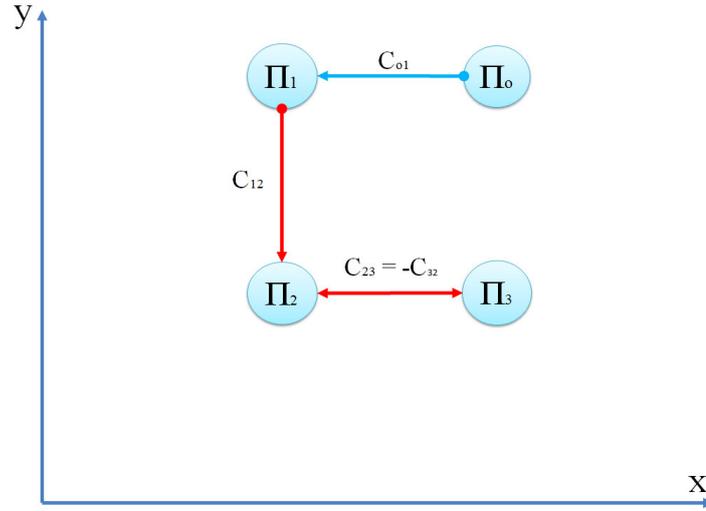


Figura 6.2: Topología de interconexión de cuatro agentes aplicado en la Simulación 2.

(para ambos controladores) son definidas como

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1.7321 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1.7321 \end{bmatrix}, \quad c = 20.$$

De la misma manera que en la simulación 1, las distancias relativas se hacen nulas para visualizar aspectos de convergencia de los estados de los agentes seguidores con los estados del agente líder. En la Figura 6.10 se muestran las entradas de control $u_i = [Fm_i \quad Tm_i]^T$ para $i = 1, 2, 3$; mientras que en la Figura 6.11 se presenta el error de posición del i -ésimo agente con respecto al robot líder. Nótese que el error es menor con el control 2. Por último, en la Figura 6.12 se muestran las trayectorias de los robots con respecto al tiempo ante una formación cuadrada, cuyas distancias relativas son igual a 2. Luego de la Figura 6.12 es posible verificar que las velocidades de todos los agentes convergen a la velocidad del líder. Por lo tanto, se dice que el objetivo de sincronización externa es cumplido. Por lo tanto, la ventaja radica en que la sincronización externa converge a cero en mayor medida que en el algoritmo propuesto en

[5]. Una desventaja de este algoritmo de control (según los resultados en la simulación) es que puede presentar transitorios muy altos en un lapso de tiempo corto (tal como se presenta en las simulaciones de [35]), lo cual pudiera ser una limitación en la implementación del algoritmo.

6.4 Simulación: Control 3

En este apartado se muestran los resultados obtenidos en la simulación del enfoque planteado en la última parte del capítulo 5, esto para un tiempo de muestreo de 0.009 segundos. Considérese el ASTA como control auxiliar, cuya superficie deslizando está dada por

$$s_i = [\tilde{\Pi}_i + \psi_i(2\tilde{\Pi}_i - \tilde{\Pi}_{i-1} - \tilde{\Pi}_{i+1})] \\ + \lambda_i[\dot{\Pi}_i + \psi_i(2\dot{\Pi}_i - \dot{\Pi}_{i-1} - \dot{\Pi}_{i+1})].$$

Se requiere que un conjunto de cuatro robots mantengan una formación triangular mientras pasan de un punto a otro tal como se muestra en la Figura 6.3. La topología de interconexión se muestra en la Figura 6.1, y las referencias están dadas por la siguiente secuencia de patrones de formación

$$\mathcal{P}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4.5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \\ \mathcal{P}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 3.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \right\}. \\ \mathcal{P}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 3.5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3.5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}. \\ \mathcal{P}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 4.5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4.5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}. \\ \mathcal{P}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 5.5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5.5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

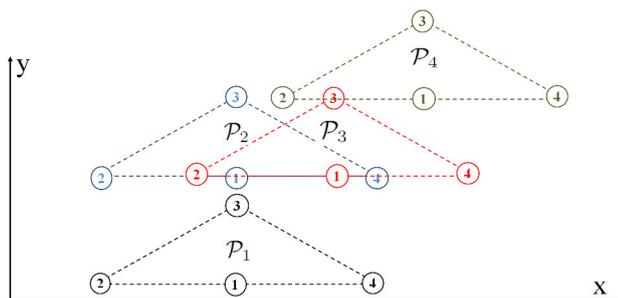


Figura 6.3: Secuencia de patrones de formación.

Los resultados para el caso nominal se muestran en la Figura 6.14, nótese que los robots convergen a la posición deseada. Considérese una variación de la masa y la inercia en un 50% sobre el valor nominal. Además, se aplican desviaciones en las trayectorias en sus respectivas coordenadas x_i y y_i para $i = 1, \dots, 3$; como perturbaciones externas. Los resultados se muestran en la Figura 6.15, de tal modo que cuando una perturbación está presente, ésta es contrarrestada. Los parámetros utilizados se muestran en las Tablas 6.1 y 6.2.

Tabla 6.1: Caso 1: ASTA control en el eje x

i	ω_{xi}	λ_{xi}	μ_{xi}	γ_{xi}	ϵ_{*xi}
1	1.15	1	0.009	0.1	0.2
2	1.8	1	0.009	0.1	0.2
3	10	1	0.009	0.002	1.1
4	1.8	1	0.009	0.2	0.35

Tabla 6.2: Caso 1: ASTA control en el eje y

i	ω_{yi}	λ_{yi}	μ_{yi}	γ_{yi}	ϵ_{*yi}
1	1.2	1	0.009	0.1	0.2
2	1.8	1	0.009	0.1	0.2
3	10	1	0.009	0.002	1.1
4	1.8	1	0.009	0.2	0.2

Por otra parte, se requiere que un grupo de cuatro robots sigan la trayectoria de un robot líder mientras mantienen una formación cuadrada. Por lo tanto, se define la superficie deslizante como

$$s_i = \left[\sum_{j=1}^N a_{ji} (\Pi_i - \Pi_j - c_{ji}) + g_i (\Pi_i - \Pi_o - c_{o1}) \right] + \lambda_i \left[\sum_{j=1}^N a_{ji} (\dot{\Pi}_i - \dot{\Pi}_j - \dot{c}_{ji}) + g_i (\dot{\Pi}_i - \dot{\Pi}_o - \dot{c}_{o1}) \right].$$

Considerando la topología mostrada en la Figura 6.2 y definiendo los parámetros como

Tabla 6.3: Caso 2: ASTA control en el eje x

i	ω_{xi}	λ_{xi}	μ_{xi}	γ_{xi}	ϵ_{*xi}
1	20.2	1	0.001	0.01	0.7
2	20.2	1	0.001	0.01	1
3	20.2	1	0.001	0.01	0.4
4	20.2	1	0.001	0.01	0.45

Tabla 6.4: Caso 2: ASTA control en el eje y

i	ω_{yi}	λ_{yi}	μ_{yi}	γ_{yi}	ϵ_{*yi}
1	20.2	1	0.001	0.01	0.7
2	20.2	1	0.001	0.01	1
3	20.2	1	0.001	0.01	0.4
4	20.2	1	0.001	0.01	0.45

Entonces, se tienen los siguientes resultados; en la Figura 6.16 se muestra el error de seguimiento de los robots seguidores con respecto al robot líder para el caso nominal. Luego, en la Figura 6.17 se muestran las trayectorias con respecto al tiempo para el caso perturbado con distancias relativas nulas. Nótese que la posición de los agentes seguidores convergen a la posición del líder. Entonces se muestra la eficacia del control 3 para el segundo caso.

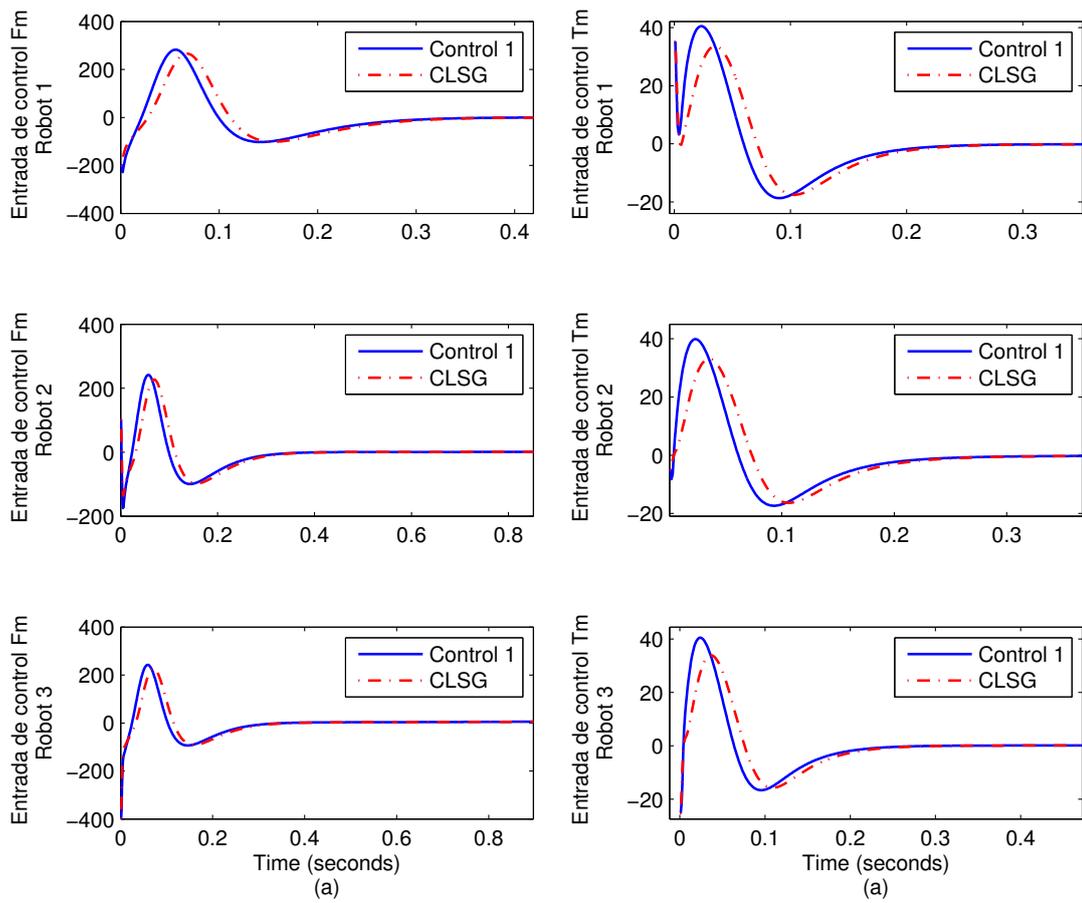


Figura 6.4: Simulación 1.1: Transitorio en la entrada de control u_i con distancias relativas nulas, (a) fuerza aplicada para la traslación y (b) par aplicado para la orientación.

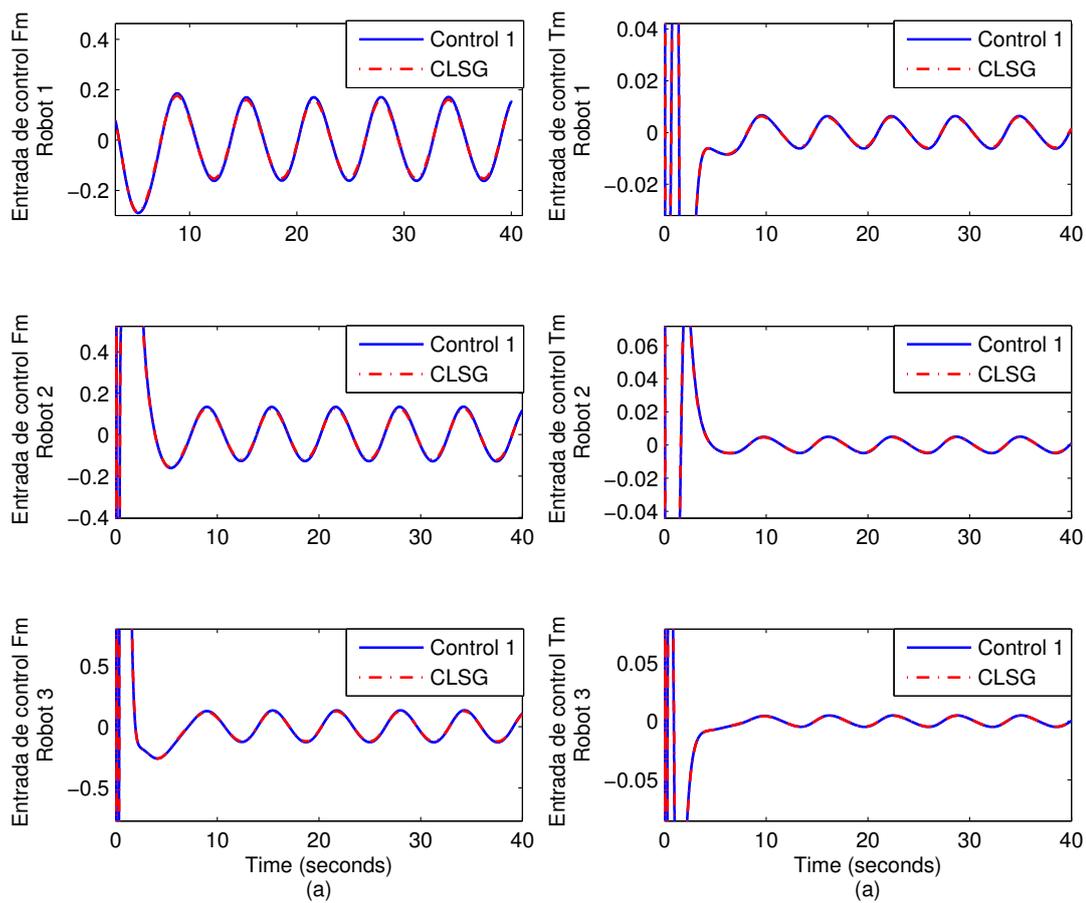


Figura 6.5: Simulación 1.1: Entrada de control u_i con distancias relativas nulas, (a) fuerza aplicada para la traslación y (b) par aplicado para la orientación.

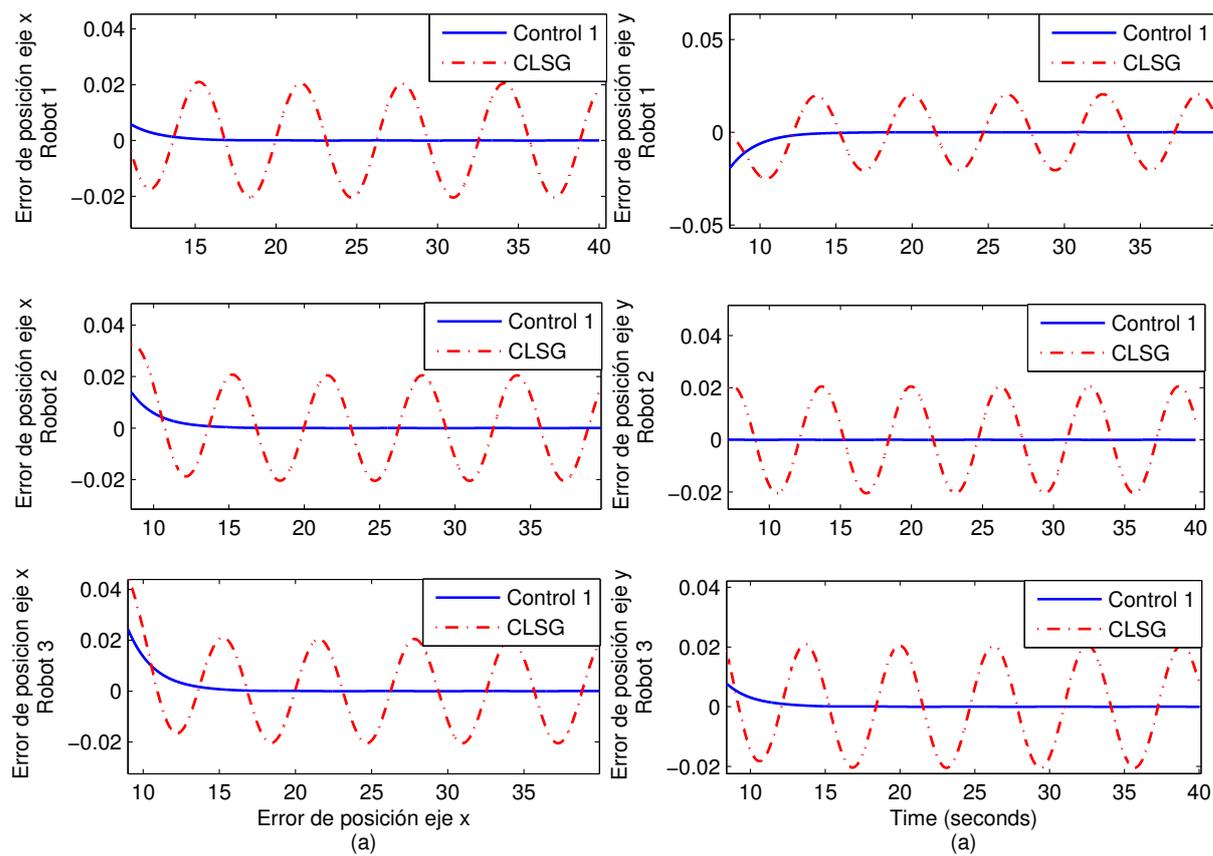


Figura 6.6: Simulación 1.1: Error de posición con respecto al líder con distancias relativas nulas, (a) error de posición en el eje x y (b) error de posición en el eje y .

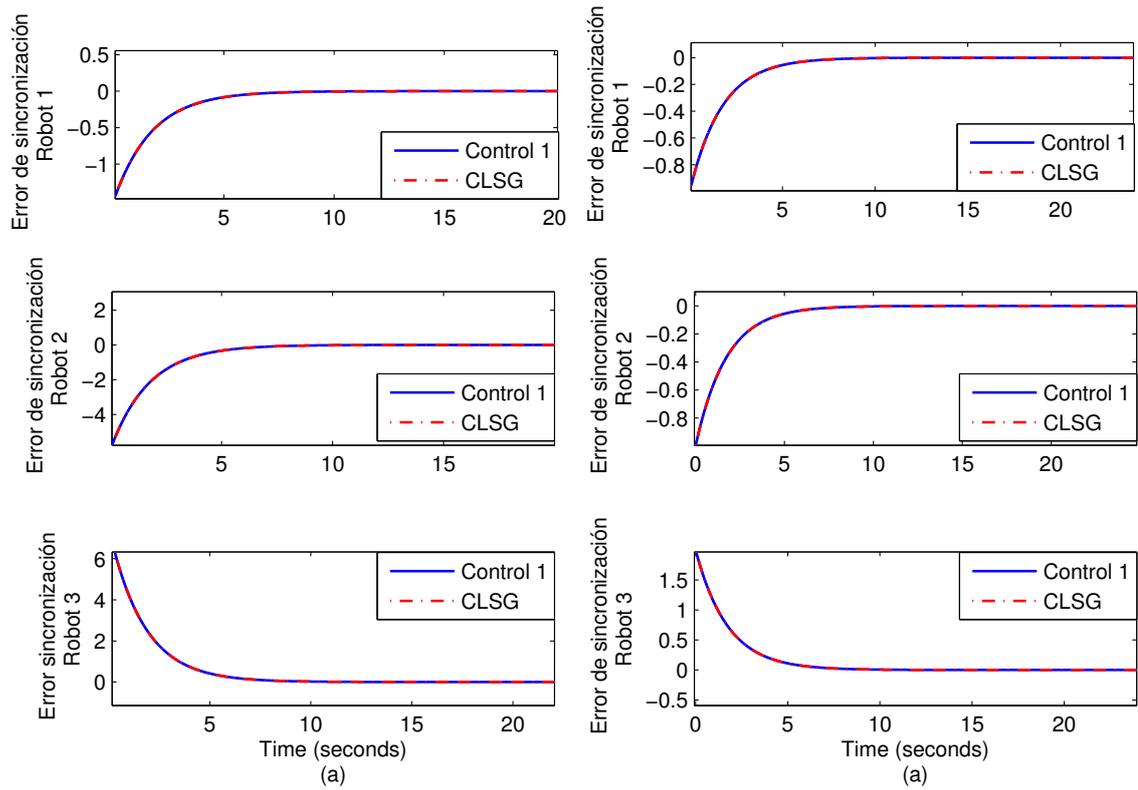


Figura 6.7: Simulación 1.1: Error de sincronización con distancias relativas nulas, (a) error de sincronización en el eje x y (b) error de sincronización en el eje y .

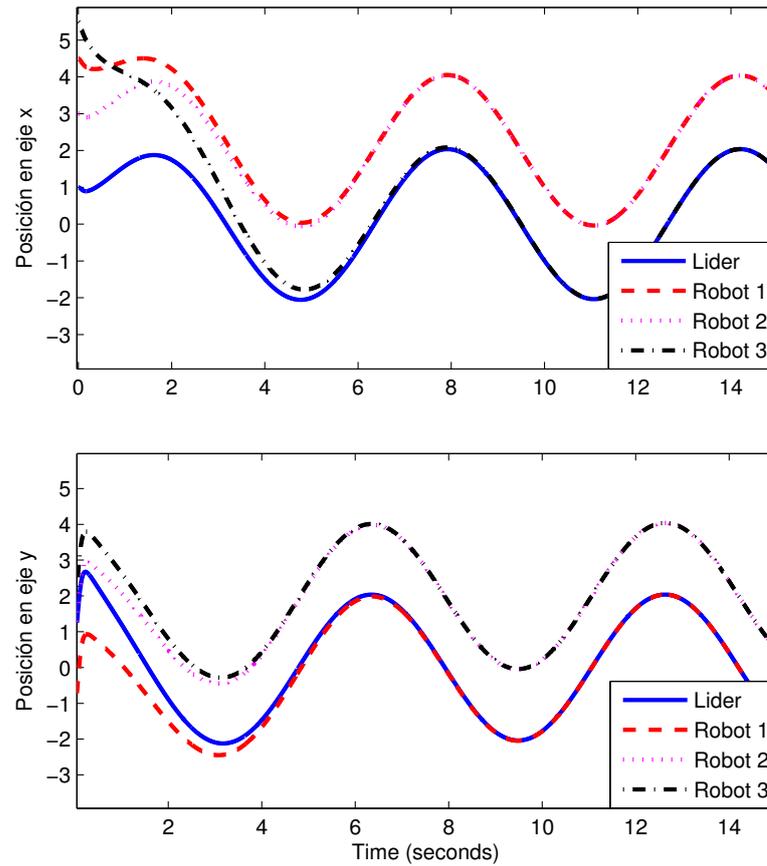


Figura 6.8: Simulación 1.1: Trayectorias de tres robots y un líder tipo unicycle con respecto al tiempo con una formación cuadrada.

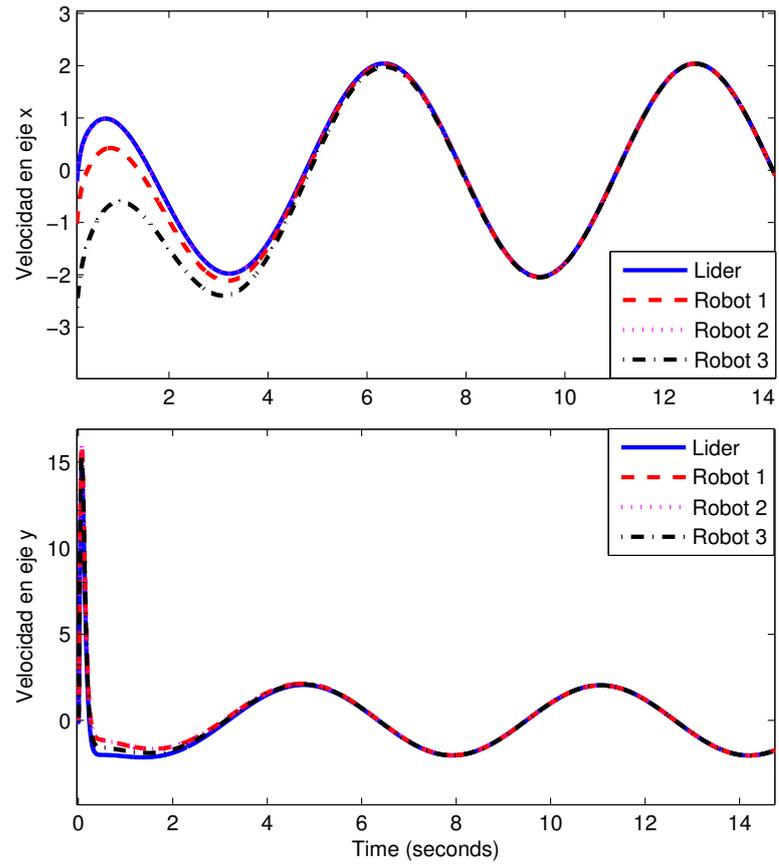


Figura 6.9: Simulación 1.1: Velocidades de cuatro robots tipo unicycle con respecto al tiempo con una formación cuadrada.

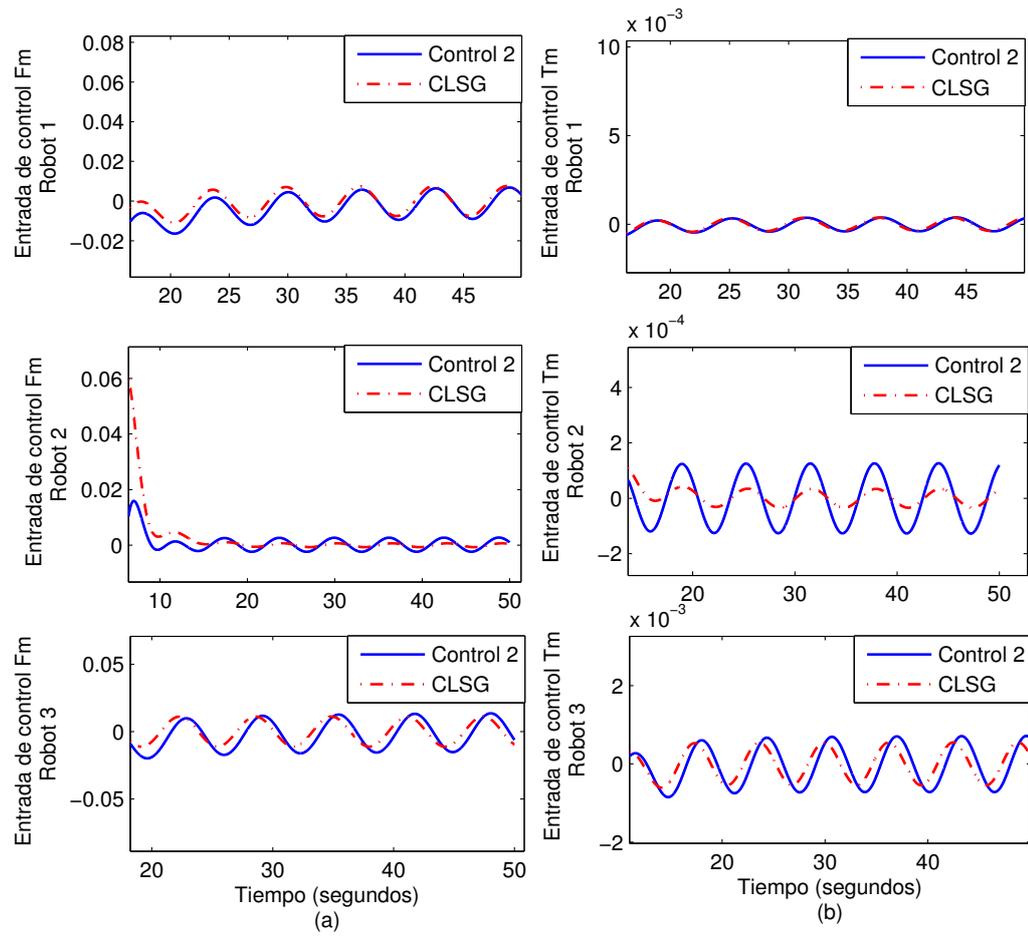


Figura 6.10: Simulación 2.1: Entrada de control u_i , (a) fuerza aplicada para la traslación y (b) par aplicado para la orientación.

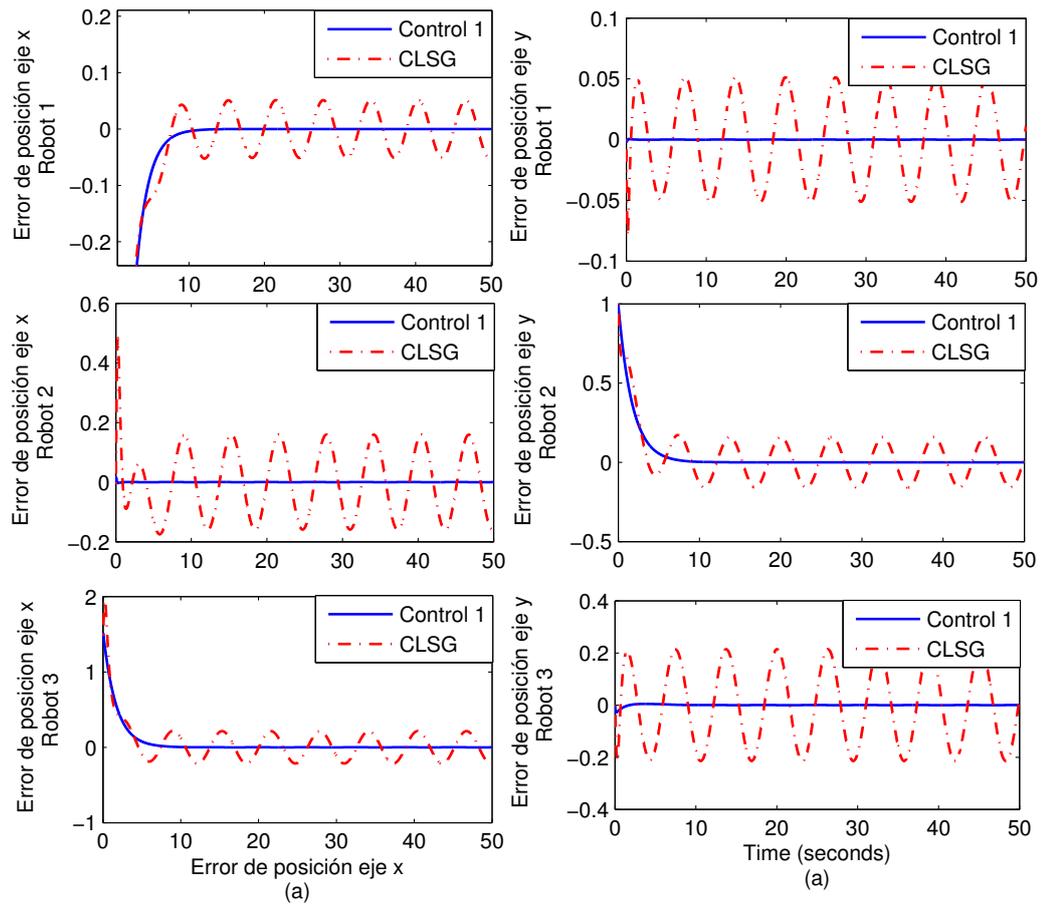


Figura 6.11: Simulación 2.1: Error de posición con respecto al líder, (a) error de posición en el eje x y (b) error de posición en el eje y .

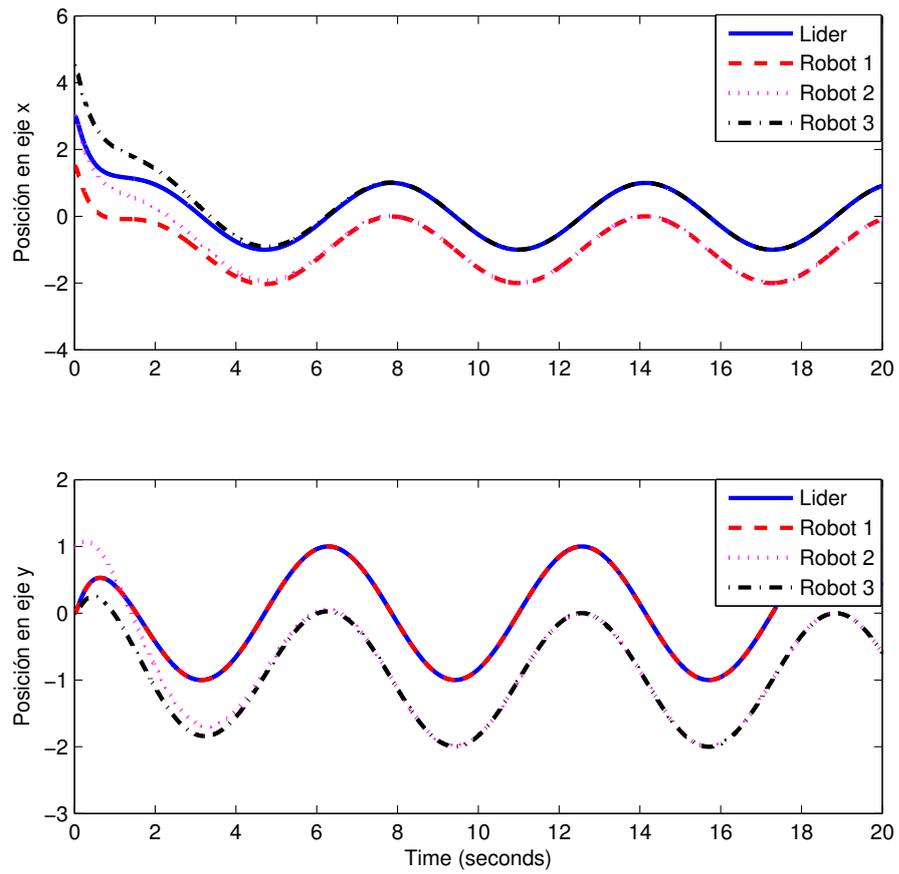


Figura 6.12: Simulación 2.1: Trayectorias de tres robots y un líder tipo unicycle con respecto al tiempo.

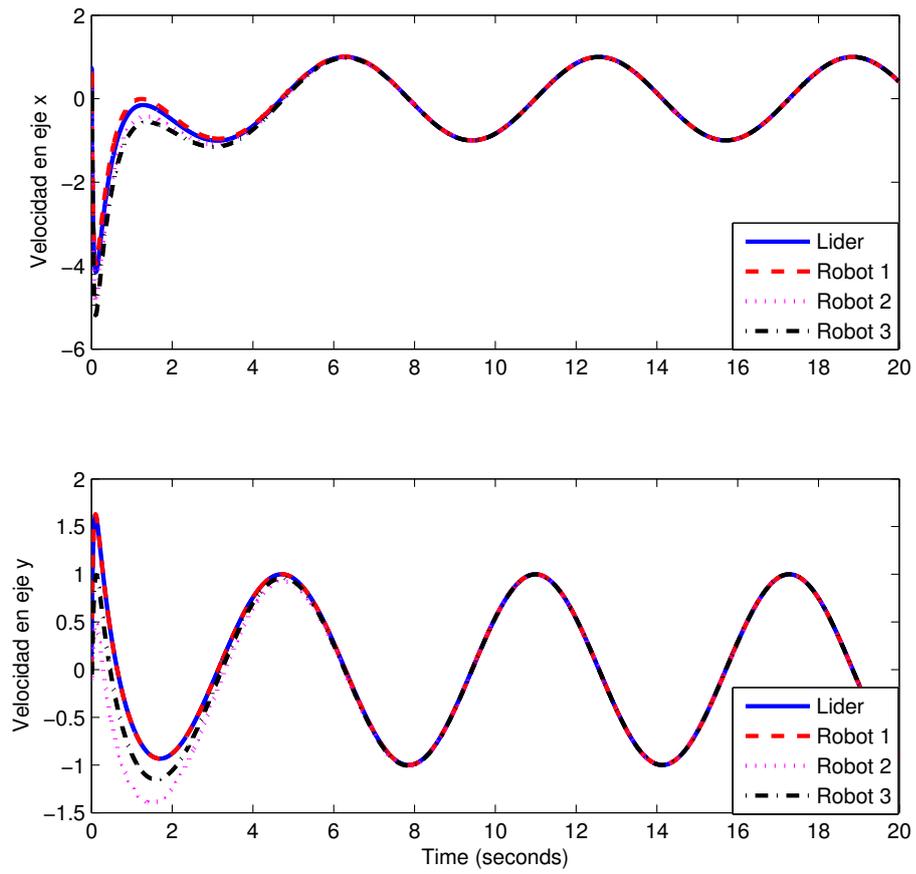


Figura 6.13: Simulación 2.1: Velocidades de cuatro robots tipo unicycle con respecto al tiempo.

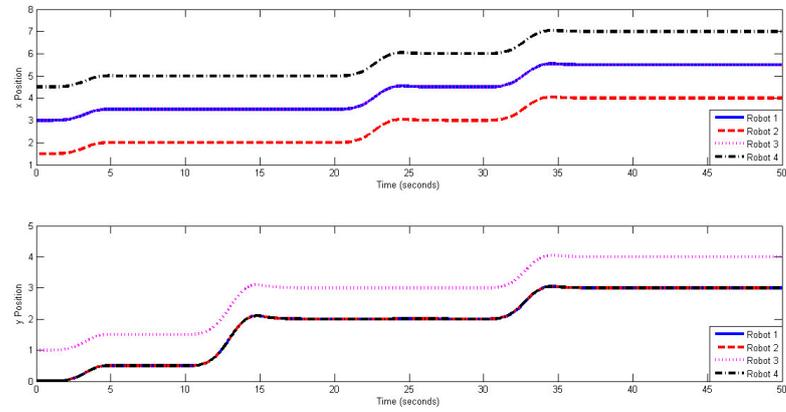


Figura 6.14: Simulación 3.1: Trayectorias de cuatro robots móviles en el caso nominal.

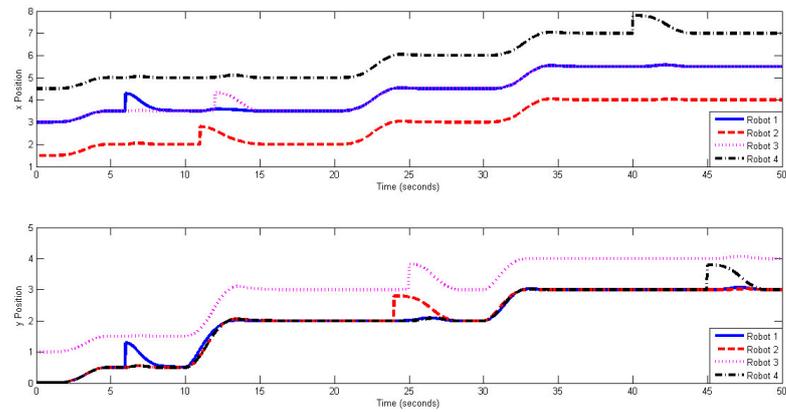


Figura 6.15: Simulación 3.1: Trayectorias de cuatro robots móviles ante incertidumbre paramétrica y perturbaciones externas.

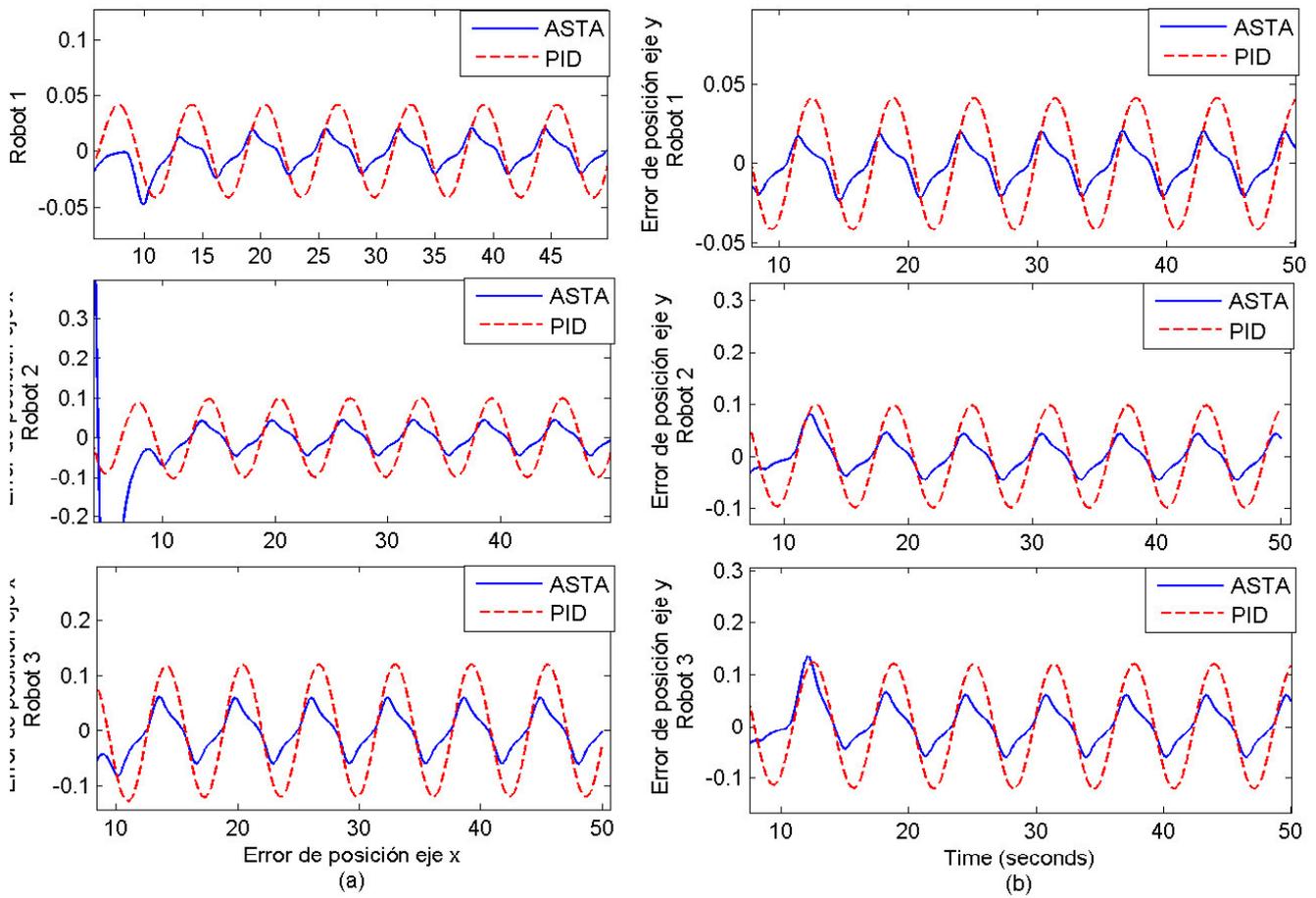


Figura 6.16: Simulación 3.2: Error de seguimiento con respecto al líder para distancias relativas nulas.

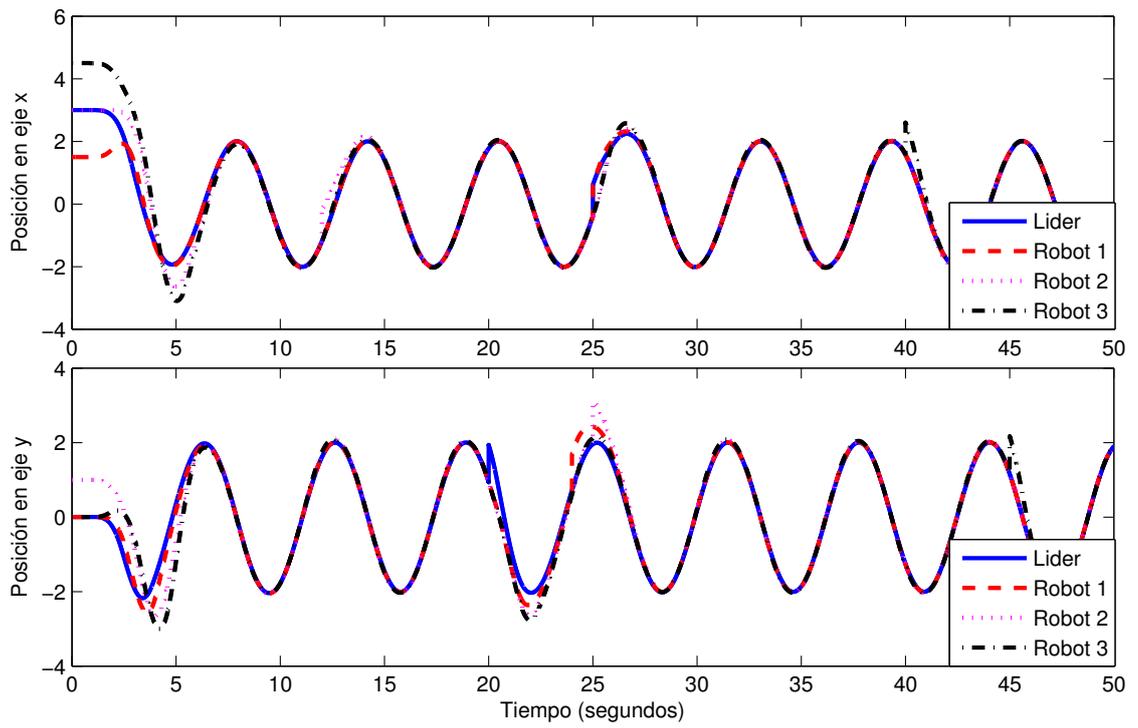


Figura 6.17: Simulación 3.2: Resultado de la Simulación del caso perturbado.

Conclusiones

El problema a resolver en este trabajo de tesis de maestría se enmarca en el control de formación y seguimiento coordinado. **Se requiere que un grupo de N robots del tipo unicycle mantengan una formación rígida mientras siguen una trayectoria generada por un robot líder.**

En esta tesis **se propusieron tres enfoques de control descentralizado para dar solución al problema de control de formación y seguimiento coordinado**, los cuales están basados a partir de otros trabajos presentados en la literatura. Los cuales han sido modificados para lograr los objetivos de control presentados en el capítulo 1. La estabilidad para los primeros dos enfoques se demuestra a partir del método directo de Lyapunov. Sin embargo, la estabilidad no está garantizada ante incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas.

El primer controlador está construido a partir de los métodos de Líder-Seguidores y métodos de comportamiento. El control de cada robot requiere de la información de dos agentes vecinos y el líder. Por otra parte, la topología de interconexión para este enfoque de control es estática. Dicho control está basado a partir de los resultados presentados en [30], el cual fue extendido al control de seguimiento coordinado. Dicho control garantiza la estabilidad asintótica y global ante trayectorias variables con el tiempo.

El segundo controlador es basado en los métodos de Líder-Seguidores y teoría de grafos, en el cual, la topología de interconexión es cuasi-estática. El control del i -ésimo agente requiere sólo la información de los agentes vecinos. El control propuesto está basado un control de sincronización presentado en [6, 58], el cual fue extendido a partir de [35] al control de formación y seguimiento coordinado. A diferencia del control propuesto en [6, 58], el segundo esquema de control garantiza la estabilidad asintótica y global ante trayectorias variables con el tiempo.

Sin embargo, el control de sincronización [6, 58] está basado en un regulador cuadrático lineal, lo cual es una ventaja sobre el segundo esquema propuesto, al momento de seleccionar las ganancias de control.

Sin embargo, los objetivos de control podrían no ser alcanzados debido a la presencia de variaciones no contempladas en los parámetros y perturbaciones en el sistema. Por lo tanto, se propuso un tercer esquema de control basado en los métodos de líder seguidor y el enfoque del Algoritmo Super-Twisting Adaptativo, lo cual, proporciona robustez ante incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas. Por otra parte, se presentó la demostración de estabilidad local para cada agente bajo la condición de que las perturbaciones e incertidumbres son acotadas y desconocidas.

Por otra parte, se presentaron las simulaciones que muestran la efectividad de los algoritmos mostrados. Las simulaciones fueron realizadas en el ambiente de Matlab\Simulink para diferentes topologías de interconexión. Se encontró que, a diferencia del controlador [6], los controladores propuestos garantizaban la convergencia del error de sincronización externa a cero. Mientras que aspectos de robustez ante incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas del ADTA fueron comparados con un controlador PID, donde se logra reducir el error de sincronización con respecto al líder con el ASTA respecto al PID. Finalmente, se concluye que los objetivos de control de formación y movimiento coordinado planteados en esta tesis han sido logrados.

Apéndice A

Sistemas no lineales: Definiciones y teoremas

Ahora se presentan definiciones y algunos resultados sobre estabilidad de sistemas lineales y no lineales, que son utilizados en apartados posteriores.

A.1 Definiciones

Considérese el conjunto de los números reales de dimensión \mathfrak{R}^n , y sea U un subconjunto abierto de \mathfrak{R}^n , entonces se tiene la siguiente

Definición A.1.1. [26]. *Sea un sistema dinámico descrito por la ecuación diferencial de la siguiente forma:*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) \in \mathfrak{R}^n \quad \forall t \geq 0, \quad (\text{A.1.1})$$

en donde la función f es una función continua, si la función f no depende explícitamente del tiempo, esto es, $f(t, x(t)) = f(x(t))$ entonces se dice que la ecuación (A.1.1) es autónoma.

Definición A.1.2. [26]. *Una función continua $V : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ es una función radialmente no acotada si*

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) \rightarrow \infty.$$

Definición A.1.3. [43]. *Un campo vectorial es un mapeo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que asigna un vector de \mathbb{R}^n a cada punto de x de U , si todas las derivadas de f existen, entonces se dice que es un campo vectorial suave.*

Definición A.1.4. *El grado relativo de un sistema dinámico se define como el número de veces que la salida $y(t)$ se debe derivar con respecto al tiempo para que aparezca explícitamente la entrada u_i . Se dice que el sistema SISO dado por*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

tiene grado relativo r en un punto x_0 , si se satisfacen las siguientes condiciones.

- $L_g L_f^k h(x) = 0 \quad \forall x$ en una vecindad de x_0 y $\forall k < r - 1$.
- $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$.

Definición A.1.5. [32]. *Una matriz H es Hurwitz si todos sus valores propios tienen parte real negativa.*

Definición A.1.6. [26]. *El origen $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio es asintóticamente estable en forma global de (A.1.1) si el origen es estable, y es atractivo globalmente, es decir,*

$$\|x(t)\| \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty, \quad \forall x(0) \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{A.1.2})$$

A.2 Teoremas

Lema A.2.1 (Lema de Barbalat). *Sea una función $V(x)$ con límite finito para $t \rightarrow \infty$ cuya derivada $\dot{V}(x)$ es uniformemente continua, entonces $\dot{V}(x) \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$.*

Teorema A.2.1 (Estabilidad y acotamiento de soluciones). [26]. *El origen $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio estable, y las soluciones $x(t)$ están acotadas para toda condición inicial $x(0) \in \mathbb{R}^n$, si existe una función candidata de Lyapunov $V(t, x)$ que es definida positiva globalmente, radialmente desacotada, tal que su derivada temporal satisfaga*

$$\dot{V}(t, x) \leq 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Para ver a detalle la demostración del Teorema A.2.1, puede revisarse [26].

Teorema A.2.2 (LaSalle). [26]. *Considérese la ecuación diferencial autónoma dada por*

$$\dot{x} = f(x),$$

cuyo origen $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio. Supóngase que existe una función candidata de Lyapunov $V(x)$ definida positiva y radialmente no acotada, de tal manera que su derivada sea definida negativa, esto es, $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$. Defínase el conjunto Ω como

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\}.$$

Si el equilibrio $x(0) = 0$ es la única condición inicial en Ω para el cual $x(t) \in \Omega$ para $t \geq 0$, entonces el origen $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio asintóticamente estable en forma global.

Teorema A.2.3. [26]. *Considérese la ecuación diferencial autónoma:*

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) \in \mathfrak{R}^n, \quad \forall t \geq 0.$$

La existencia de un único estado de equilibrio es una condición necesaria, para que éste sea asintóticamente estable en forma global.

Bibliografía

- [1] M. Aicardi, G. Casalino, y A. Bicchi (1994). "*Closed Loop Smooth Steering of Unicycle-Like Vehicles*". *Conference on Decision and Control*, pp. 2455-2458.
- [2] M. Aicardi, G. Casalino, A. Bicchi y A. Balestrino (1995). "*Closed Loop Steering of Unicycle-Like Vehicles via Lyapunov Techniques*". *IEEE Robotics and Automation Magazine*, pp. 27-35.
- [3] Alexandre Santos B., Mário Sarcinelli-Filho, Ricardo Carelli, y Teodiano Freire Bastos-Filho (2009). "*Decentralized control of Leader-Follower formations mobile robots with obstacle avoidance*". *IEEE International conference on Mechatronics*, Vol.37, pp. 4244-4195.
- [4] Antonio Barrientos, Luis Felipe Peñin, Carlos Balaguer, y Rafael Aracil (1997). "*Fundamentos de Robotica*". *McGraw-Hill, España*, Vol.1.
- [5] Ali Bidram, Ali Davoudi, Frank L. Lewis, y Josep M. Guerrero(2013). "*Distributed Cooperative Secondary Control of Microgrids Using Feedback Linearization*". *IEEE transactions*, Vol.99, pp. 1-9.
- [6] Ali Bidram, Ali Davoudi, y Josep M. Guerrero(2013). "*Distributed Cooperative Control of Nonlinear and Non-identical Multi-agent Systems*". *21st Mediterranean Conference on Control and Automation, 2013*
- [7] Blekhman, I.I., Landa, P. S., y Rosenblum, M. G. (1995). "*Synchronization and Chaotization in interacting dynamical systems*". *ASME Applied Mechanical Review*, Vol.48, pp. 733-752.
- [8] Brockett, R. W. (1983). "*Asymptotic stability and feedback stabilization*". *Differential Geometric Control Theory*, Boston, Birkhauser
- [9] Canudas de Wit, C., B. Siciliano, y G. Bastin (1997). "*Theory of Robot Control*". *Springer-Verlag, Inglaterra*.
- [10] Chai Wah Wu (2005). "*Synchronization in networks of nonlinear dynamical systems coupled via directed graph*". *Nonlinearity*. Institute of PHYSICS Publishing.

- [11] Chaimowicz, L. , Michael N. , Kumar, V. (2005). "*Controlling Swarms of Robots Using Interpolated Implicit Functions*". *IEEE International Conference on Digital Object Identifier*. University of Pennsylvania. Philadelphia, USA.
- [12] Fan R. K. Chung (1997). "*Spectral Graph Theory*". *Regional Conference Series in Mathematics*.
- [13] C. de la Cruz (2006). "*Control de Formación de Robots Móviles*". Para obtener el grado de Doctor en Ingeniería. San Juan, Argentina. Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de San Juan. 2006, pp. 31.
- [14] Dong Sun (2011). "*Synchronization and Control of Multiagent Systems*". *Automation and Control Engineering Series*.
- [15] Fei Zhang, Weidong Chen, y Yugeng Xi (2006). "*Motion Synchronization in Mobile Robot Networks: Robustness*". *International Conference on intelligent Robots and Systems*, pp. 5570-5575.
- [16] J. Alexander Fax y Richard M. Murray (2004). "*Information Flow and Cooperative Control of Vehicle Formations*". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.37, pp. 1465-1476.
- [17] J. Bang-Jensen y Gregory Gutin (2006). "*Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*". *Springer. Great Britain*.
- [18] S.S. GE y Y.J. CUI (2002). "*Dynamic motion planning for mobile robots using potential field method*". *Kluwer academic publishers*, Vol.37, pp. 207-222.
- [19] Guoguang WEN (2012). "*Distributed Cooperative Control for Multi-Agent Systems*". Para obtener el grado de Doctor en Automática, Ingeniería Informática, SeÑales e Imágenes. Villeneuve d'Ascq, France. Escuela central de Lille. 2012, pp. 21.
- [20] Eduardo G. Hernández-Martínez y Eduardo Aranda-Bricaire (2011). "*Convergence and Collision Avoidance in Formation Control: A Survey of the Artificial Potential Functions Approach*". *INTECH*, Vol.37, pp. 103-127.
- [21] Hernandez R. Salas O. y De Leó-Morales J. (2013). "*Formation Maneuvers Via Adaptive Super-Twisting Approach*". *PHISCON 2013*, San Luis Potosí, México.
- [22] Hernández Fregoso D. A. (2011). "*Sincronización de Sistemas Mecánicos, un estudio experimental*". *Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada*. Ensenada, Baja California, México.
- [23] Huygens, C. (1673). "*Horologium Oscilatorium*". *Paris, France*.
- [24] Jin Fan, Xiang Li, y Xiao Fan Wang (2005). "*On Synchronous Preference of Complex Dynamical Networks*". *ELSEVIER, PHYSICA A*, pp. 657-666.
- [25] John W. Hill y Joel F. Jensen (1998). "*Telepresence Technology in Medicine: Principles and Applications*". *IEEE*, pp. 569-580.

- [26] Rafael Kelly, & Victor Santibáñez (2003). "*Control de Movimiento de Robots Manipuladores*". Pearson, Prentice Hall. Madrid, España, Vol.1.
- [27] Erik Kyrkjebo (2007). "*Motion Coordination of Mechanical Systems, Leader-Follower Synchronization of Euler-Lagrange Systems using Feedback Control*". Norwegian University of Science and Technology.
- [28] Elisa Perez, Carlos Soria, Oscar Nasisi, y Vicente Mut (2007). "*Interfaz Basada en Visión Para Comandar un Robot Móvil*". Instituto de Automática. Universidad Nacional de San Juan.
- [29] Lazea (2001). "*Aspects on path planning for mobile robots*". Reporte interno de la Technical University of Cluj-Napoca.
- [30] Lawton, J. R. T., R. W. Beard, y B. J. Young (2003). "*A Decentralized Approach to Formation Maneuvers*". *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol.19, pp. 933-941.
- [31] Alan J. Laub (2005). "*Matrix Analysis for Scientists and Engineers*". SIAM, University City Science Center, Philadelphia, United States of America.
- [32] F. L. Lewis y V. L. Syrmos (1995). "*Optimal Control*", New York.
- [33] Levant A. (2003). "*High-order sliding modes, differentiation and output-feedback control*", *International Journal of Control*, Vol. 76, pp. 924 - 941.
- [34] Thomas W. Malone y Kevin Crowston (1994). "*The Interdisciplinary Study of Coordination*". *ACM Computing Surveys*, Vol.26, pp. 87-119.
- [35] Nijmeijer, y H.Rodriguez Angeles, A. (2003). "*Synchronization of Mechanical Systems*". *Series Editor: Leon O. Chua*, Vol.46.
- [36] Norman H. M. Li y Hugh H. T. Liu (2008). "*Formation UAV flight control using virtual structure and motion synchronization*". *American control conference*, Vol.37, pp. 1782-1787.
- [37] Pozniak A. S., (2008). "*Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Engineers*". Elsevier, Deterministic Techniques, Amsterdam, The Netherlands Vol.1, p. 774.
- [38] R. Quintero Torres, M.A. Ocampo, B. Millán, y J.L. Aragón (2007). "*Oscilaciones, armonía y simpatía*". *Revista mexicana de física*, Vol.53, pp. 67-81.
- [39] Reinhard Diestel (2000). "*Graph Theory*". Springer-Verlag. New York.
- [40] W.J. Dong, Yi Guo, y J.A. Farrell (2006). "*Formation Control of Nonholonomic Mobile Robots*". *American Control Conference*, Vol.19, pp. 5602-5607.
- [41] Wei Ren y Randal W. Beard (2004). "*Formation Feedback control for multiple spacecraft via virtual structures*". *IEEE Control Theory Appl*, Vol. 37, pp. 357-368.

- [42] Wei Ren y Randal W. Beard (2005). "*Consensus Seeking Multiagent Systems Under Dynamically Changing Interaction Topologies*". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.50, pp. 655-661.
- [43] Luis A. Rodriguez Garcia (1995). "*Control de Seguimiento de Trayectorias en Sistemas no Lineales con Incertidumbre, Aplicación a Robots Manipuladores*". *Universidad Autónoma de Nuevo León*.
- [44] Rodriguez Angeles, A., y Nijmeijer, H. (2003). "*Mutual synchronizing of robots via estimated state feedback: a cooperative approach*". *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol.12, pp. 542-554.
- [45] Shtessel Y., Taleb M., Plestan F. (2012). "*A novel Adaptive-Gain supertwisting Sliding mode controller: Methodology and application*". *Automatica* Vol.48, pp. 759-769.
- [46] Roland Siegwart y Illah R. Nourbakhsh (2004). "*Introduction to Autonomous Mobile Robots*". *A Bradford Book*. Cambridge, Massachusetts, United States of America.
- [47] J. H. Soletta, F. D. Farfán, y G. Ruiz (2011). "*Aplicación de la Teoría de Grafos al Análisis de la Actividad Eléctrica del Cerebro*". *XVIII Congreso Argentino de Bioingeniería*.
- [48] Dong Sun, H.N. Dong, y S.K. Tso (2002). "*Tracking Stabilization of Differential Mobile Robots Using Adaptive Synchronized Control*". *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 2638-2643.
- [49] T. I. James Tsay, M. S. Hsu, y R. X. Lin (2003). "*Development of a mobile robot for visually guided handling of material*". *IEEE International conference on robotics and automation*, Vol.37, pp. 1397-3402.
- [50] Tolga Eren, Brian D. O. Anderson, A. Stephen Morse, Walter Whiteley, y Peter N. Belhumeur (2004). "*Operations On Rigid Formations Of Autonomus Agents*". *Communications in Information and Systems*, Vol.3, pp. 223-258.
- [51] Jovani Alberto Jimenez Builes, Demetrio Arturo Ovalle Carranza y John Fredy Ochoa Gómez (2008). "*SMART: Multi-Agent Robotic System*". *Dyna*, Nro. 154, pp. 179-186.
- [52] Madeleine Udell (2011). "*Introduction to Spectral Graph Theory*". www.stanford.edu/~udell/doc/udell11_spectralnotes.pdf
- [53] Wei Ren, Randal W. Beard y Ella M. Atkins (2005). "*A Survey of Consensus Problems in Multi-agent Coordination*". *American Control Conference*. Portland, OR, USA, pp 1859-1864.
- [54] Robin J. Wilson (1996). "*Introduction to Graph Theory*". *Prentice Hall, Cuarta edición*. Londres, Inglaterra. Capitulo 7, pp 109-110.
- [55] Yannis Dimopoulos y Pavlos Moraitis. "*Multi-Agent Coordination and Cooperation through Classical Planning*". pp. 1-6.

- [56] Yuan Fu-cai, Sun Hai-lian, Hu Shi-jian, y Wang Li-zhu (2011). "*Design of Cleaning Robot for Swimming Pools*". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.37, pp. 1175–1178.
- [57] Yulin Zhang, Daehie Hong, Jae H. Chung, y Steven A. Velinske (1998). "*Dynamic Model Based Robust Tracking control of a Differentially Steered Mobile Robot*". *INTECH*, Vol.37, pp. 103-127.
- [58] Hongwei Zhang, Frank L. Lewis, Fellow, IEEE, y Abhijit Das (1998). "*Optimal Design for Synchronization of Cooperative Systems: State Feedback, Observer and Output Feedback*". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.56, pp. 1948-1952.
- [59] Michael M. Zavlanos, Magnus B. Egerstedt, y George J. Pappas (2011). "*Graph Theoretic Connectivity Control of Mobile Robot Networks*". *Proceedings of the IEEE*, Vol.37, pp. 1-12.
- [60] Xiu-Juan Zheng, Huai-yu Wu, Lei Cheng y Yu-li Zhang (2011). "*Multiple nonholonomic mobile robots formation coordinated control in obstacles enviroment*". *International conference on modelling, identification and control*, Vol.37, pp. 122-127.