UNIVERSIDAD AUTONOMA DE SAN LUIS POTOSI

ESCUELA DE INGENIERIA

" INTRODUCCION A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DEL PRIMER ORDEN PRIMER GRADO CON APLICACIONES A LA MECANICA."

TRABAJO RECEPCIONAL

JUAN JOSE MENDEZ LEURA

SAN LUIS POTOSI, S.L.P., 1985

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE SAN LUIS POTOSI

ESCUELA DE INGENIERIA

" INTRODUCCION A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DEL PRIMER ORDEN PRIMER GRADO CON APLICACIONES A LA MECANICA."

TRABAJO RECEPCIONAL

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA

P R E S E N T A :

JUAN JOSE MENDEZ LEURA

SAN LUIS POTOSI, S.L.P., 1985

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE SAN LUIS POTOSI
ESCUELA DE INGENIERIA
DR. MANUEL NAVA 8 TELEFONO
APARTADO POSTAL 569
SAN LUIS POTOSI, S. L. P., MEXICO

DIRECCION

Julio 11, 1985

Al Pasante Sr. Juan José Méndez Leura
P r e s e n t e .

En atención a su solicitud relativa me es grato indicar a usted que el H. Consejo Técnico Consultivo de la Facultad de Ingeniería ha designado como Asesor del Trabajo Recepcional que deberá desarrollar en su Examen Profesional de Ingeniero Mecánico Electricista, a la Srita. Ing. Ma. Dolores Aguillón García. Así como el Título propuesto para el mismo es:

" INTRODUCCION A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DEL PRIMER ORDEN PRIMER GRADO CON APLICACIONES A LA MECANICA "

TEMARIO:

I.- INTRODUCCION
II.- ANTECEDENTES
III.- RELACIONES ENTRE ECUACION PRIMITIVA Y ECUACION DIFERENCIAL
IV.- ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN PRIMER GRADO Y SUS SOLUCIONES BASICAS
V.- REDUCCION DE UNA ECUACION DIFERENCIAL A OTRA ECUACION CON TIPO DE SOLUCION BASICA
VI.- ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES
VII.- APLICACIONES A LA MECANICA

Ruego a usted tomar debida nota de que en cumplimiento con lo especificado por la Ley de Profesiones debe prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito indispensable para sustentar su Examen Profesional.

" MODOS ET CUNCTARUM RERUM MENSURAS AUDEBO "

EL DIRECTOR DE LA FACULTAD

ING. JAIME VALLE MENDEZ.

'mvsm.

INTRODUCCION A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN PRIMER GRADO CON APLICACIONES A LA MECANICA

A mis Padres,

Bonifacio Méndez Pérez

y

María Marcos L. de Méndez

Prólogo.

El presente trabajo es una introducción a-los conceptos y métodos básicos de solución de las ecuaciones diferenciales de primer orden primer grado.

Consideramos que el lector sabe como usar-los conceptos y técnicas elementales de la geometría analítica y el cálculo diferencial e integral, creemos que esto-es un primer intento destinado a servir de curso introductorio o de ayuda para un curso formal de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Este trabajo contiene definiciones, clasificación y ejemplos ya resueltos para cada método que se --analiza en la solución de las ecuaciones diferenciales, ordenados de tal forma que se pueda facilitar la relación ---entre la enseñanza y el aprendizaje.

El propósito de este trabajo es presentar-al lector los aspectos básicos del tema y al mismo tiempo -darle una idea general acerca de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Utilizamos en el presente un lenguaje que-consideramos sencillo y de fácil manejo para una mejor comprensión en este acercamiento con el tema.

Hemos procurado especialmente obtener un -orden en la presentación de los temas que facilite al lector la comprensión cabal de los mismos. Igualmente hemos tratado de presentar un número de problemas, debidamente graduados,-para que se pueda fijar con claridad las ideas expuestas.

Dado que las ecuaciones que nos informan -acerca de las características del movimiento de un cuerpo--contienen derivadas, consideramos que el último capítulo sea una breve exposición de la importancia que alcanzan las ecuaciones diferenciales en la mecánica. Mediante ellas realizamos una deducción de las ecuaciones generales del movimiento rectilíneo uniforme y resolvemos algunas aplicaciones de ellas en problemas prácticos.

Tenemos la satisfacción de reconocer públicamente la deuda con la Ing. María Dolores Aguillón por sus inapreciables sugestiones y el gran número de horas dedicadas a la lectura en su revisión crítica de todo el manuscrito, ya que varios cambios realizados son fruto de sus recomendaciones.

Universidad Autónoma de San Luis Potosí
Facultad de Ingeniería
Depto. de Físico-Matemáticas.

Juan José Méndez Leura.

CONTENIDO

CAPITULO I

Introducción.

El tema de las ecuaciones diferenciales-- constituye una rama extensa y muy importante de la matemática moderna. Desde los primeros días del cálculo, este tema-- ha sido un campo importante de investigación teórica y aplicaciones prácticas. Hecha la afirmación anterior surgen de - manera natural varias interrogantes:¿ Qué es una ecuación -- diferencial y qué significa ? ¿ Dónde y cómo se originan las ecuaciones diferenciales y cuál es su utilidad ? . Cuando se encuentra una ecuación diferencial ¿ qué se debe hacer, cómo se debe hacer y cuáles son los resultados de esa actividad ? Estas preguntas señalan tres aspectos importantes del tema: teoría, método y aplicación.

Podemos construir ejemplos poniendo juntas derivadas con otros términos y factores en forma arbitraria. Las ecuaciones diferenciales no provienen, sin embargo, de - estos hechos artificiales, sino que tratan de contestar preguntas referentes a variaciones o cambios.

Los problemas que conducen a las ecuaciones diferenciales se encuentran en muchos campos, como física, - astronomía, química, las ramas de la ingeniería y las ciencias sociales, del comportamiento y biológicas, etc.

Dada la gran cantidad de variables que intervienen en un problema real, no podemos ni establecer los- problemas completamente, ni dar respuestas precisas a los -- mismos. Lo que hacemos es formular un problema matemático -- qué es más o menos parecido al problema original, pero que - lo idealiza y lo simplifica.

El propósito de este capítulo es presentar los aspectos básicos del tema como son las definiciones para la clasificación de las ecuaciones diferenciales así como la nomenclatura utilizada.

I.1 Definiciones Básicas *

Ecuación diferencial.- Ecuación diferencial es una ecuación que combina derivadas.

Ecuación diferencial ordinaria.- Es una ecuación que establece una relación entre una variable independiente, una variable dependiente y una o más derivadas de la variable dependiente con respecto a la variable independiente.

Ecuación diferencial parcial.- Es una relación entre dos o más variables independientes, una variable dependiente y una o más derivadas parciales de la variable dependiente con respecto a las variables independientes.

Orden de una ecuación diferencial.- El orden de una ecuación diferencial nos lo da la más alta derivada que aparece en la ecuación diferencial.

Grado de una ecuación diferencial.- El grado de una ecuación diferencial nos lo da la potencia a la cual está elevada la mayor derivada que aparece en la ecuación.

* El lector que desee una mayor información acerca de las definiciones aqui utilizadas, deberá consultar la bibliografía que señalamos al final de este trabajo.

Ecuación diferencial lineal.- Se denomina así a la ecuación cuya variable dependiente y sus derivadas aparecen elevadas solamente a la potencia uno y no aparece ninguna potencia mayor ni producto para ellas.

Ecuación primitiva.- Es una ecuación que contiene n constantes arbitrarias (A,B,C,...) como:

$$Y = Ae^{2x} + Be^{x}$$

o

$$Y = Ax^2 + Bx + C$$

en cuyos casos las denominamos constantes esenciales si no podemos substituirlas por un número menor de constantes.

I.2 Nomenclatura utilizada

Los diferentes tipos de notación que utilizaremos en el presente trabajo para expresar la derivada son:

$\frac{dy}{dx}$, Dy , Y', para la primera derivada

$\frac{d^2y}{dx^2}$, D^2y , Y", para la segunda derivada

$\frac{d^3y}{dx^3}$, D^3y , Y" , etc...

I.3 Ejercicio de aplicación

A continuación clasificamos por orden y grado las siguientes ecuaciones diferenciales.

a). $\frac{dy}{dx} - \frac{xy}{x+y} = 0$ (primer orden, primer grado) b). $\frac{d^3y}{dx^3} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \text{sen}y = 0$ (tercer orden, primer grado)

c). $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{x^2}{xy - y^3} = 0$ (primer orden, segundo grado

d). $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + y = 0$ (primer orden tercer grado)

e). $x^2y'' + 2xy' + 3y = \text{sen}x$ (segundo orden, primer grado)

CAPITULO II

ANTECEDENTES

II.1 Notas históricas.

La teoría de las ecuaciones diferenciales se originó en los principios del cálculo con Isaac Newton -- (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716) en el siglo XVII.

Todos nuestros vagos conocimientos sobre el nacimiento y desarrollo de la teoría de las ecuaciones -- diferenciales se resumen en una fecha importante, el 11 de noviembre de 1675, cuando por primera vez, Leibnitz asentó en un papel la ecuación:

$$\int y\,dy = \frac{y^2}{2}$$

no resolviendo con esto una simple ecuación diferencial, lo que era en sí trivial o secundario, sino que constituyó un acto de gran trascendencia, pues creó un símbolo muy útil($\int$) el signo de integración.

Aún cuando Newton realizó, relativamente poco trabajo en la teoría de las ecuaciones diferenciales, su desarrollo del cálculo y la aclaración de los principios básicos de la mecánica proporcionaron una base para el desarrollo de sus aplicaciones en el siglo XVIII, con mayor alcance, por parte de Euler.

Newton clasificó las ecuaciones de primer orden de acuerdo con las formas:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\ ,\ \frac{dy}{dx} = f(y)\ ,\ y:\ \frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

Para la última forma, desarrolló un método de solución, usando series infinitas, cuando $f(x,y)$ es un polinomio en x e y. Era muy sensible a las críticas y, como consecuencia, tardó bastante en publicar muchos de sus descubrimientos.

Leibnitz llegó a los resultados del cálculo independientemente, aunque un poco más tarde, que Newton. Nuestra notación moderna para la derivada $\frac{dy}{dx}$ y el signo ($\int$) integral se deben a Leibnitz. Descubrió el método de separación de variables así como procedimientos para resolver las ecuaciones homogéneas de primer orden y las ecuaciones lineales de primer orden. Sostuvo una prolífica correspondencia con otros matemáticos, especialmente con los hermanos Bernoulli. En el curso de esta correspondencia se resolvieron muchos problemas en ecuaciones diferenciales, durante las últimas décadas del siglo XVII.

A Newton y Leibnitz, siguieron los hermanos Bernoulli, Jakob (1645-1705) y Johann (1667-1748) y, el hijo de Johann, Daniel (1700-1782). Justamente, éstos son tres de los ocho miembros de la familia Bernoulli, quienes, en su tiempo, fueron prominentes matemáticos y hombres de ciencia. Con ayuda del cálculo, formularon y resolvieron las ecuaciones diferenciales de muchos problemas de mecánica. Un problema (1696-1697) al cual contribuyeron ambos hermanos, fue el de la braquistócrona. Este es uno de los problemas famosos en la historia de las matemáticas y consiste en encontrar la curva a lo largo de la cual una partícula se deslizará sin rozamiento en el tiempo mínimo desde un punto dado P hasta otro Q. Estando el segundo punto abajo del primero pero no directamente debajo de él (ver figura 1.1).

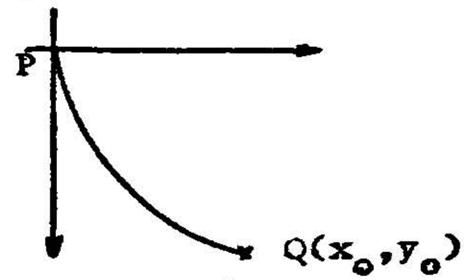

Fig. 1.1 Gráfica de la curva a lo largo de la cual una partícula se deslizará sin rozamiento en un tiempo mínimo.

Este problema fué propuesto por Johann Bernoulli en 1696 como un reto para los matemáticos de su tiempo.

Las soluciones correctas fueron encontradas por el propio Johann Bernoulli y también por su hermano Jakob Bernoulli, Isaac Newton, Gottfried Leibnitz y el Marqués de L' Hospital.

En 1690 Jakob Bernoulli publicó la solución de la ecuación diferencial, que se escribe así:

$$(b^2y^2 - a^3)^{\frac{1}{2}}dy = (a^3)^{\frac{1}{2}}dx$$

donde a y b son constantes.

Actualmente esta ecuación se toma como un ejercicio, pero en aquel tiempo, pasar de la ecuación

$$y' = \left[\frac{a^3}{b^2y^2 - a^3}\right]^{\frac{1}{2}}$$

a la forma diferencial y, entonces afirmar que las integrales en ambos lados de la ecuación deberian ser iguales, excepto por una constante, constituyó ciertamente un avance trascendental. así por ejemplo, mientras que Johann Bernoulli sabía que

$$ax^p dx = d \; \frac{ax^{p+1}}{p + 1}$$

no es válido para $p = -1$, no sabía que

$$\frac{dx}{x} = d(\mathrm{Ln}\ x)$$

Sin embargo pudo demostrar que la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{ax}$$

que podemos resolver escribiéndola como

$$a \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

tiene la solución $y^a = xC$ donde C es una constante de integración.

A finales del siglo XVIII, muchos de los métodos elementales de solución para ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden se conocían y la atención se dirigió hacia las ecuaciones diferenciales parciales. Jacobo Riccati (1676-1754), matemático italiano, consideró ecuaciones de la forma $f(y,y',y'')=0$. También consideró una importante ecuación no lineal, conocida como ecuación de Riccati,

$$\frac{dy}{dx} = a_o(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2$$

aunque no en forma tan general.

Leonhard Euler, uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos, también vivió en el siglo XVII. Fué un gran matemático; sus trabajos reunidos llenan más de setenta volúmenes. Aunque quedó ciego, durante los últimos diecisiete años de su vida, su trabajo no disminuyó. De particular interés es su trabajo sobre planteamineto de los problemas de la mecánica y su desarrollo de métodos de solución para estos problemas matemáticos. Refiriendose al trabajo de Euler en la mecánica, Lagrange dijo que era "el primer gran trabajo en el que se aplica el análisis a la ciencia del movimiento". Euler también consideró la posibilidad de reducir ecuaciones de segundo orden a ecuaciones de primer orden, mediante un cambio adecuado de variable; creó el concepto de factor integrante, en 1739 dió un tratamiento general de las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias con coeficientes constantes, contribuyó al método de la solución en serie depotencias y dió un procedimiento numérico para resolver ecuaciones diferenciales. También hizo contribuciones importantes a la teoría de las series de Fourier y creó la primera discusión sistemática del cálculo de las variaciones.

Posteriormente en el siglo XVIII los grandes matemáticos franceses Joseph Louis Lagrange (1736-1813) y Pierre Simón Laplace (1749-1827), hicieron importantes aportaciones a la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias y, además, dieron por primera vez un tratamiento a las ecuaciones diferenciales parciales. Posiblemente sea la ecuación de Laplace, la ecuación diferencial parcial más conocida en la física matemática, la ecuación del potencial que se presenta en dinámica de los fluídos, en elasticidad, en la teoría de la conducción del calor, etc..

$$U_{xx} + U_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

donde los subíndices indican derivadas parciales. El trabajo monumental de Lagrange, Mecanique Analytique, contiene las ecuaciones generales del movimiento de un sistema dinámico, conocidas actualmente como ecuaciones de Lagrange.

El trabajo de cinco volúmenes de Laplace, Traité de Mécanique Céleste, le ganó el título de "Newton de Francia". Los últimos Volúmenes se publicaron en el período de 1789-1825 e incluyeron toda la mecánica de esa época. Las posturas de Lagrange y Laplace compendiaron dos filosofías de las matemáticas. Para Laplace la naturaleza era esencial y las matemáticas eran su herramienta en el aprendizaje de sus secretos; para Lagrange las matemáticas eran un arte que justificaba su propio ser. Sin embargo ambos hombres realizaronavances de gran alcance tanto en la teoría como en las aplicaciones de las matemáticas.

En los últimos años algunos matemáticos dedicados al estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales han tratado de elaborar una teoría sistemática (pero general) rigurosa. La finalidad no es crear métodos de solución para ecuaciones diferenciales particulares, sino desarrollar técnicas apropiadas para el tratamiento de diferentes clases de ecuaciones.

Concluimos este corto esquema histórico con una observación que posiblemente le proporcione cierto placer al lector que ha observado, con desaliento, la frecuencia con la que aparecen en los textos de matemáticas frases como, "Es obvio que...", o bien "Facilmente puede demostrarse que....". Nathaniel Bowditch (1733-1838), matemático y astrónomo americano, al traducir la Mécanique Céleste de Laplace, a principios del siglo XIX, afirmó: "No puedo encontrar una afirmación de Laplace, así, es evidente, sin tener la seguridad de que deberé emplear horas de trabajo intenso, para cubrir el abismo y averiguar y demostrar lo evidente que es".

II.2 Propiedades de los logaritmos más usadas en la solución de las ecuaciones diferenciales.

En las ecuaciones diferenciales al simplificar las soluciones se hace a menudo un uso intenso de los logaritmos. En este trabajo usaremos el símbolo Ln para representar al logaritmo natural o logaritmo de base "e".

A continuación señalamos las propiedades más importantes:

$$\operatorname{Ln}(uv) = \operatorname{Ln}u + \operatorname{Ln}v$$

$$\operatorname{Ln} \frac{u}{v} = \operatorname{Ln} u - \operatorname{Ln} v$$

$$\operatorname{Ln} u^{1/n} = (1/n)\operatorname{Ln} u$$

$$\operatorname{Ln} 1 = 0$$

$$\operatorname{Ln} \frac{1}{v} = - \operatorname{Ln} v$$

$$u = e^{\operatorname{Ln} u}$$

$$u = \operatorname{Ln} e^{u}$$

Si $\operatorname{Ln} w = \operatorname{Ln} u + \operatorname{Ln} v$ esto puede escribirse como $w = uv$.

Puesto que cualquier constante es el logaritmo de otra constante, a menudo es conveniente escribir Ln c en lugar de C únicamente como constante de integración en la solución de las ecuaciones diferenciales, la cual dependerá de la forma que se le quiera dar al resultado.

CAPITULO III

RELACIONES ENTRE ECUACIONES PRIMITIVAS Y ECUACIONES DIFERENCIALES

III.1 Relación entre una ecuación primitiva y una ecuación diferencial.

En general, de una ecuación primitiva que contenga n constantes arbitrarias esenciales se puede deducir una ecuación diferencial de orden n libre de constantes arbitrarias. Esto nos da a entender que la solución de una ecuación diferencial es lo que se denomina ecuación primitiva.

De lo anteriormente expuesto podemos establecer el siguiente diagrama de relaciones

$$\begin{tikzcd} & \text{Derivación} \arrow[dl] & \\ \text{Ecuación diferencial} \arrow[dr] & & \text{Ecuación primitiva} \arrow[ul] \\ & \text{Solución} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

o sea:

$$\begin{array}{c} \text{Ecuación} \\ \text{Diferencial} \end{array} \rightleftarrows \begin{array}{c} \text{Ecuación} \\ \text{Primitiva} \end{array}$$

Que es el ciclo que nos establece la relación entre las ecuaciones primitivas y las ecuaciones diferenciales.

III.2 Obtención de una ecuación diferencial a partir de una ecuación primitiva.

Al presentarse una ecuación primitiva los pasos a seguir para obtener su ecuación diferencial asociada son los siguientes:

1). Analizar si todas las constantes que la componen son necesarias, en caso contrario reducirlas.

2). Derivar tantas veces como constantes esenciales quedaron en la primitiva.

3). Combinar las ecuaciones obtenidas de tal forma que se logren desaparecer las constantes hasta quedar exclusivamente derivadas en la expresión final.

Hagamos un ejemplo en donde la primitiva es $y = Ae^{x} + Be^{2x} + Ce^{x}$ y tratemos de encontrarle la ecuación diferencial de donde proviene.

1). Si $y = Ae^{x} + Be^{2x} + Ce^{x}$

podemos reducirla a

$$y = (A + C)e^{x} + Be^{2x}$$

en donde

$$y = Qe^{x} + Be^{2x} \qquad \text{si} \qquad Q = A + C$$

2). Derivamos tantas veces como constantes esenciales nos quedaron en la ecuación.

como

$$y = Qe^{x} + Be^{2x}$$
$$y' = Qe^{x} + 2Be^{2x}$$
$$y'' = Qe^{x} + 4Be^{2x}$$

3). Combinemos las ecuaciones obtenidas hasta desaparecer las constantes.

$$(1) \qquad y' - y = Be^{2x}$$

$$(2) \qquad y'' - y' = 2Be^{2x}$$

si a la ecuación (2) le restamos la ecuación (1) multiplicada por dos obtenemos.

$$y'' - y' - 2(y' - y) = 0$$

$$y'' - y' - 2y' + 2y = 0$$

entonces la ecuación diferencial que buscamos es:

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

La ecuación primitiva analizada anteriormente tiene la forma $y = C_1y_1 + C_2y_2$. A las ecuaciones que tienen dicha forma se les puede obtener su ecuación diferencial asociada mediante un determinante de las siguientes características:

$$D = \begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ y' & y_1' & y_2' \\ y'' & y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = 0$$

Si aplicamos el determinante a la ecuación primitiva $y = Ae^{x} + Be^{2x}$ en donde $y_1 = e^{x}$ y; $y_2 = e^{2x}$ obtenemos:

$$D = \begin{vmatrix} y & e^{x} & e^{2x} \\ y' & e^{x} & 2e^{2x} \\ y'' & e^{x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = e^{3x}(y'' - 3y' + 2y) = 0$$

o bien

$y'' - 3y' + 2y = 0$ que es la ecuación diferencial obtenida anteriormente.

III.3 Campo de direcciones.

La forma general de una ecuación diferencial de primer orden es:

$f(x,y,y') = 0$ la cual puede escribirse también

$$y' + f(x,y) = 0$$

Como la derivada de una función es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva representativa de la función dada, en el punto (x_o,y_o) debe tener allí pendiente $f(x_o,y_o)$. Dibujemos en el plano xy las curvas de pendientes constantes de $y' = f(x,y)$. Dichas pendientes (o isóclinas) tienen la ecuación $f(x,y) = K$. Donde K es una constante arbitraria.

De lo anterior decimos que una curva a lo largo de la cual la pendiente $f(x,y)$, tiene un valor constante K se llama isóclina de la ecuación diferencial. Es decir, las isóclinas son las curvas $f(x,y) = K$, para diferentes valores del parámetro K.

Sobre la isóclina que corresponde al valor K, dibujemos elementos lineales, es decir pequeños segmentos de recta de pendiente K realizando lo mismo para cada isóclina a la totalidad de los pequeños elementos lineales se les denomina campo de direcciones o campo direccional de la ecuación diferencial $y' = f(x,y)$.

Empezando en un punto dado, dibujemos la curva al elemento lineal tangente que corresponda. Así obtenemos la forma aproximada de la solución.

Por ejemplo si consideramos a la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 2x$ o bien $dy - 2xdx = 0$ como una ecuación cuya solución no pudiera obtenerse por métodos conocidos, entonces para obtener la información gráfica aproximada de la solución tendremos que hacer uso de los campos de direcciones.

si $\frac{dy}{dx} = 2x = m$ tenemos que si $x = o$ $m = o$

Lo cual nos dice que para todos los lugares donde $x = 0$ el segmento tangente vale cero.

La información anterior la representamos en la gráfica de la fig. 1.2

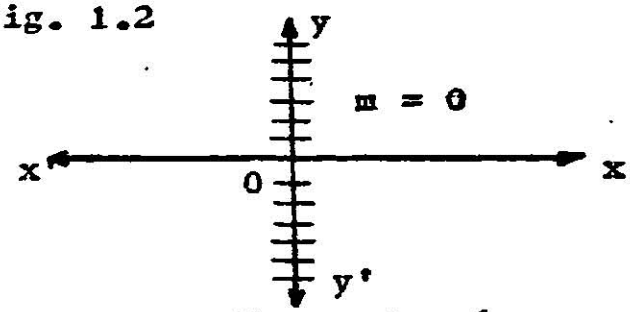

Fig. 1.2 Gráfica de los lugares donde las $m = 0$

Si $x = \frac{1}{2}$ $m = 1$ es decir para aquel lugar donde $x = \frac{1}{2}$ las pendientes tienen una inclinación igual con uno o bien de 45°. Si graficamos lo anterior obtenemos la fig. 1.3

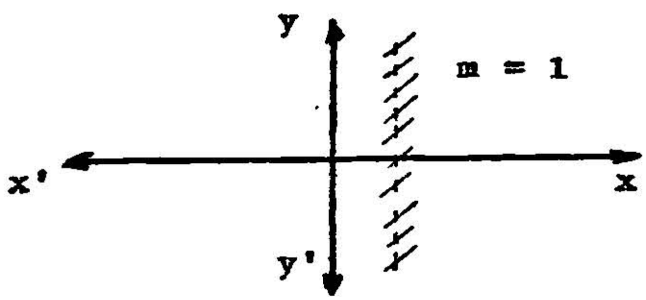

Fig. 1.3 Gráfica de los lugares donde las $m = 1$

Si graficamos ahora para $x = -\frac{1}{2}$ $m = -1$ obtenemos la fig. 1.4

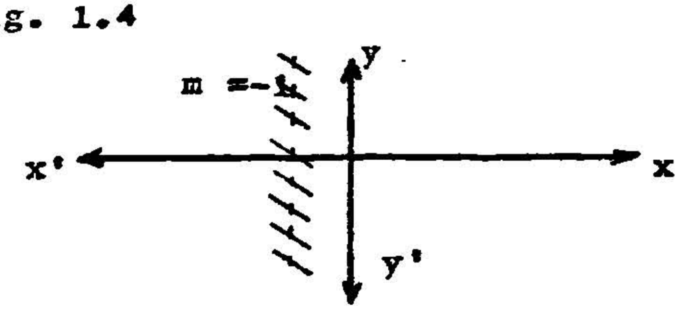

Fig. 1.4 Gráfica de los lugares donde $m = -1$

Si x = 1 m = 2 y si x = -1 m = -2 lo cual tiene el grafo dado en la fig. 1.5

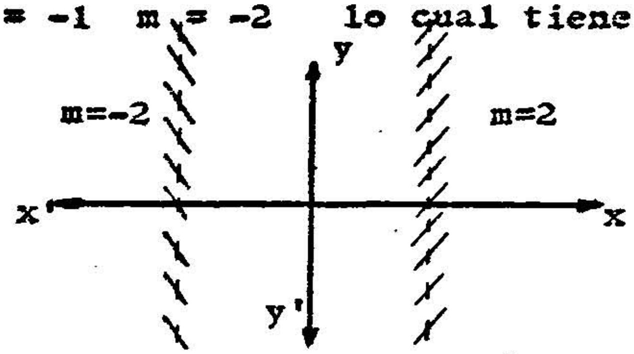

Fig. 1.5 Gráfica de los lugares donde m = -2 y m = 2

Reuniendo todas las gráficas obtenidas anteriormente en una sola, obtenemos el campo de direcciones que corresponde a la familia de curvas que representa la primitiva o solución de la ecuación diferencial.

Entonces siguiendo las direcciones de los elementos marcados se forma la estructura del grafo de la solución.

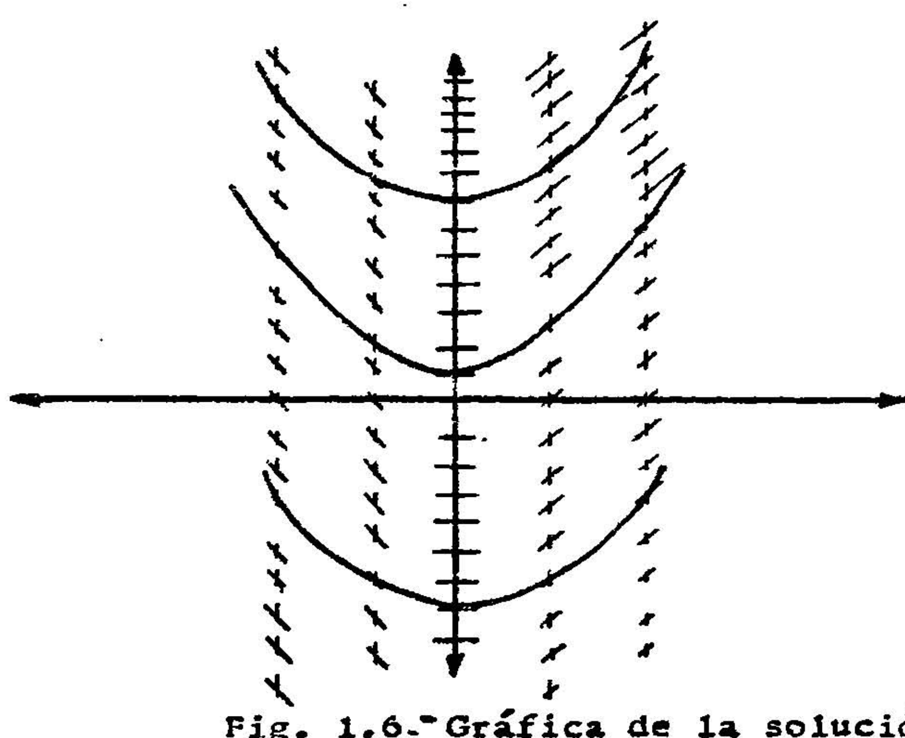

Fig. 1.6.- Gráfica de la solución de la ecuación diferencial dy = 2x dx

Construyamos ahora las curvas integrales aproximadas de

$$\frac{dy}{dx} = 2x + y$$

Para trazar las isóclinas de la ecuación diferencial hacemos:

$$2x + y = C \qquad \text{o bien} \qquad y = -2x + C$$

Construimos rectas entonces para $C = -2, -3/2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 3/2, 2$. Sobre cada una de éstas construimos a continuación un cierto número de elementos lineales que tengan la inclinación adecuada $Ø$ = arc. tang. C. Señalados en la fig. 1.7

Como $\frac{dy}{dx} = m = \text{tang } Ø$ y, $\frac{dy}{dx} = C = 2x + y$

entonces $C = \text{tang. } Ø$ o sea $Ø$ = arc. tang. C.

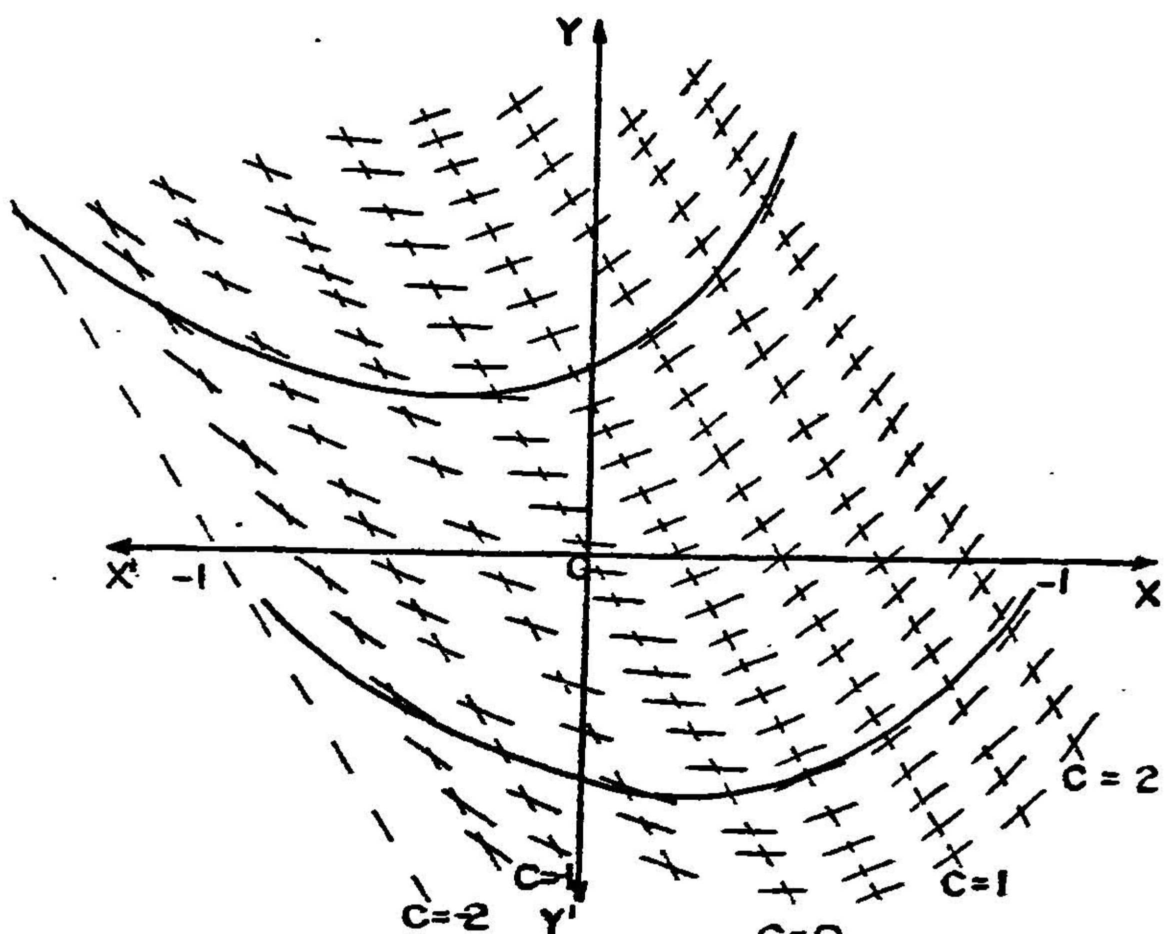

Fig. 1.7 Grafo aproximado de la solución de la ecuación-diferencial $dy = (2x + y)dx$

CAPITULO IV

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN PRIMER GRADO Y SUS SOLUCIONES BASICAS

IV. 1 Ecuaciones diferenciales de variable separable.

La forma de una ecuación diferencial ordinaria es $f(x,y,y') = 0$. La cual puede tener también la forma:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

o bien

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

si esta ecuación se pudiera expresar como;

$$\left[f_1(x)g_1(y)\right]dx + \left[f_2(x)g_2(y)\right]dy = 0$$

entonces se le denomina de variable separable.

La solución de dicha ecuación será de la manera siguiente.

$$\left[f_1(x)g_1(y)\right]dx + \left[f_2(x)g_2(y)\right]dy = 0$$

la dividimos entre $f_2(x)$

$$\left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,g_1(y)\right]dx + g_2(y)dy = 0$$

si dividimos entre $g_1(y)$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}\,dy = 0$$

que es la forma que debe tener una ecuación de variable separable para su solución.

Integrando la ecuación

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}\,dy = 0$$

resulta

$$F(x) + G(y) = C$$

que es la solución que buscamos.

Encontremos la solución de la ecuación diferencial.

$$e^{a-b}\,da + e^{b-a}\,db = 0$$

la cual podemos expresar como

$$\frac{e^a}{e^b}\,da + \frac{e^b}{e^a}\,db = 0$$

separando nos queda

$$e^a e^a\,da + e^b e^b\,db = 0$$

$$e^{2a}da + e^{2b}db = 0$$

integrando

$$\int e^{2a}da + \int e^{2b}db = 0$$

$$\frac{e^{2a}}{2} + \frac{e^{2b}}{2} = C$$

$$e^{2a} + e^{2b} = 2C$$

nos queda como solución final

$$e^{2a} + e^{2b} = Q$$

IV.2 Solución por ecuaciones homogéneas.

Si una ecuación diferencial dada no es de variable separable, se puede considerar la posibilidad de -

reducirla a dicha forma separable mediante un cambio de variable. Un caso de esta reducción es el de las ecuaciones homogéneas.

Un polinomio en X e Y es homogéneo de grado n cuando a todos sus términos se les identifica con el mismo grado n. O bien una $f(x,y) = 0$ es homogénea si y solo si: A $f(x,y)$ le asignamos una J tal que $f(Jx,Jy) = 0$ si logramos expresarla como $f(Jx,Jy) = J^n f(x,y)$ entonces decimos que es una ecuación homogénea de grado n.

Por ejemplo si analizamos a $f(x,y)= x^2-xy+y^2$ encontramos que.

$$
\begin{aligned}
f(Jx,Jy) &= (Jx)^2 - (Jx)(Jy) + (Jy)^2 \\
&= J^2x^2 - J^2xy + J^2y^2 \\
&= J^2(x^2 - xy + y^2) \\
&= J^2f(x,y)
\end{aligned}
$$

es J^2 afectando a la función original.

Por lo anterior podemos señalar que la ecuación es homogénea de grado dos.

Si aplicamos los conceptos anteriores a las ecuaciones diferenciales de primer orden primer grado tenemos que, dada

$$A(x,y)\, dx + B(x,y)\, dy = 0$$

si le asignamos una J

$$A(Jx,Jy)\, dx + B(Jx,Jy)\, dy = 0$$

$$J^n\left[A(x,y)dx + B(x,y)dy\right] = 0$$

Entonces es una ecuación diferencial homogénea de grado n.

Pero si

$$A(x,y)dx + B(x,y)dy = 0$$

toma la forma

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{A(x,y)}{B(x,y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{A(Jx,Jy)}{B(Jx,Jy)}$$

$$= -\frac{J^n A(x,y)}{J^n B(x,y)} = -\frac{A(x,y)}{B(x,y)}$$

entonces $\frac{dy}{dx} = -J^0 \frac{A(x,y)}{B(x,y)}$

es una ecuación diferencial homogénea de grado cero.

Substituyendo en la ecuación diferencial homogénea $y = ux$ nos da:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{A(x,y)}{B(x,y)} = -\frac{A(x,ux)}{B(x,ux)}$$

como es homogénea

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{A(1,u)}{B(1,u)}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(u)$$

como $y = ux$ entonces $dy = udx + xdu$ por lo tanto.

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

pero como

$\frac{dy}{dx} = f(u)$ entonces igualamos

$$f(u) = u + x\frac{du}{dx}$$

que es igual a:

$$\left[f(u) - u\right]dx = \left[xdu\right]$$

de donde

$$\frac{1}{x}dx = \frac{du}{f(u)-u}$$

que es una ecuación del tipo de variable separable ya conocido.

Ahora analizemos y encontremos la solución de:

$$(x^2 + y^2)dx - (x^2 + xy)dy = 0$$

primero veamos si es una ecuación homogénea

$$(Jx)^2 + (Jy)^2 \quad dx - \quad (Jx)^2 + (Jx)(Jy) \quad dy = 0$$

$$(J^2x^2 + J^2y^2)dx - (J^2x^2 + J^2xy)dy = 0$$

$$J^2\left[(x^2 + y^2)dx - (x^2 + xy)dy\right] = 0$$

que es una ecuación homogénea de grado dos.

Hagamos entonces $y = ux$ y: $dy = udx + xdu$

que substituido en la ecuación original nos da:

$$(x^2 + (ux)^2)dx - (x^2 + x(ux))dy = 0$$

$$(x^2 + u^2x^2)dx - (x^2 + x^2u)(udx + xdu) = 0$$

efectuando operaciones y reagrupando términos nos queda.

$$(x^2 - ux^2)dx - (x^3 + x^3u)du = 0$$

$$x^2(1 - u)dx - x^3(1 + u)du = 0$$

que es una ecuación de variable separable, cuya solución es:

$$\frac{x^2}{x^3} dx - \frac{u+1}{1-u} du = 0$$

$$\frac{1}{x} dx + \frac{u+1}{u-1} du = 0$$

Integrando obtenemos.

$$\int \frac{1}{x}\,dx + \int \left[1 + \frac{2}{u-1}\right]du = 0$$

$$\mathrm{Ln}\,x + u + 2\mathrm{Ln}(u-1) = C$$

como $y = ux$ entonces $u = \frac{y}{x}$

Substituyendo en la solución obtenemos:

$$\mathrm{Ln}\,x + \frac{y}{x} + 2\mathrm{Ln}\left(\frac{y}{x} - 1\right) = C$$

La cual es la solución que buscamos.

IV.3 Solución de ecuaciones diferenciales exactas.

Una ecuación diferencial es exacta si está completa es decir, si todos los términos que en ella se encuentran representan la derivada de $f(x,y) = C$ totalmente sin haberle sido aplicada antes alguna simplificación, es decir, la ecuación diferencial representa integramente el diferencial de su primitiva.

Por ejemplo si tenemos la primitiva siguiente:

$$xy^2 + x^2y^3 = C$$ y la derivamos obtenemos.

$$(y^2 + 2xy^3)dx + (2xy + 3x^2y^2)dy = 0$$

que es una ecuación diferencial exacta puesto que se compone integramente de todos los términos producto de la derivada de la ecuación primitiva

Las ecuaciones diferenciales exactas es posible resolverlas sin necesidad de un método bien establecido. Ya que si agrupamos adecuadamente los términos expresados como el diferencial de una función podemos obtener la primitiva por medio de una simple inspección.
Así la ecuación

$$(y^2 + 2xy^3)dx + (2xy + 3x^2y^2)dy = 0$$

la separamos

$$y^2dx + 2xy^3dx + 2xydy + 3x^2y^2dy = 0$$

y la expresamos así.

$$d(xy^2) + d(x^2y^3) = d(C)$$

Donde.

$$d(xy^2) = y^2dx + 2xydy$$

$$d(x^2y^3) = 2xy^3dx + 3x^2y^2dy$$

$$d(C) = 0$$

Que son todos los términos de la ecuación diferencial.
Aplicando el operador integral a la ecuación.

$$\int d(xy^2) + \int d(x^2y^3) = \int d(C)$$

nos da.

$$xy^2 + x^2y^3 = C$$

que es la primitiva o solución.

Por otra parte si a la ecuación diferencial obtenida anteriormente la dividimos toda por (y) nos da.

$$(y+2xy^2)dx + (2x+3x^2y)dy = 0$$

la cual hemos simplificado y ya no está completa para los requerimientos de solución para ecuaciones diferenciales -

exactas, puesto que mediante ninguna agrupación que se rea lice sobre ella la podremos expresar como el diferencial - de una función, es decir la ecuación ya no es exacta, y — por este método ya no podremos obtener la solución o ecuación primitiva.

De lo anterior se desprende que toda ecuacion diferencial exacta es posible resolverla haciendo una agrupación adecuada mediante una inspección y aplicando el operador integral a la expresión que encontremos como derivada de una función.

Entonces si.

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

nos representa una ecuación diferencial de primer orden primer grado, decimos que es exacta si existe una función como $f(x,y) = C$ tal que si la derivamos nos da:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy = 0$$

la cual si comparamos con la ecuación diferencial original- encontramos que.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \qquad y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

De donde si parcializamos M y N obtenemos.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad y \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Como.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{entonces decimos que:} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

es el requisito que debe cumplir una ecuación completa o - bien toda ecuación que sea una diferencial exacta.

Encontremos la solución de la siguiente — ecuación diferencial.

$$(6x^2 + 4xy + y^2)dx + (2x^2 + 2xy - 3y^2)dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4x + 2y \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 4x + 2y$$

de donde.

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ por lo cual la ecuación es — una ecuación diferencial exacta.

$$6x^2dx + 4xydx + y^2dx + 2x^2dy + 2xydy - 3y^2dy = 0$$

$$d(2x^3) + d(2x^2y) + d(xy^2) - d(y^3) = d(C)$$

entonces la solución es:

$$2x^3 + 2x^2y + xy^2 - y^3 = C$$

Si la función $f(x,y) = C$ se le ha denominado primitiva de la ecuación diferencial exacta

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

tratemos entonces de expresar la solución $f(x,y) = C$ como — una función de los términos M y N de la ecuación diferencial y así tratar de mecanizar la solución de las ecuaciones diferenciales exactas.

Si $f(x,y) = C$ entonces $\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$ que será igual a:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

de donde

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \qquad y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

entonces

$$f(x,y) = \int^{x} M(x,y)dx + \phi(y)$$

en cuya integral- la única variable considerada es x, la y será constante y- el único término que se desconoce es $\phi(y)$ para tener la -- solución total.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int^{x} M(x,y)dx + \phi(y)\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} \int^{x} M(x,y)dx + \phi'(y)$$

Pero

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) \qquad \text{entonces}$$

$$N(x,y) = \frac{d}{dy}\int^{x} M(x,y)dx + \frac{d\phi}{dy}$$

de donde

$$\frac{d\phi}{dy} = \frac{\partial\phi}{\partial y} = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int^{x} M(x,y)dx$$

despejando e integrando nos queda

$$\int d\phi = \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int^{x} M(x,y)dx \quad dy\right]$$

$$\phi = \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int^{x} M(x,y)dx \quad dy\right]$$

Que es el término que faltaba. Substituyendo en f(x,y) nos- da la forma final de la primitiva.

$$f(x,y) = \int^{x} M(x,y)dx + \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int^{x} M(x,y)dx\right]dy + C$$

que es la solución buscada, donde la primitiva f(x,y) es -- dada como una función de los elementos M y N de la ecuación diferencial original.

Encontremos la ecuación primitiva asociada - con la ecuación diferencial siguiente.

$$(2x + y^2e^{xy^2})dx + (2xye^{xy^2} + 3y^2)dy = 0$$

como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2ye^{xy^2} + 2xy^3e^{xy^2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2ye^{xy^2} + 2xy^3e^{xy^2}$$

en donde

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ entonces es una ecuación diferencial exacta que tiene como solución a:

$$f(x,y) = \int^x (2x + y^2e^{xy^2})dx + \emptyset(y)$$

$f(x,y) = x^2 + e^{xy^2} + \emptyset(y)$ que es la solución faltando por encontrar el valor de $\emptyset(y)$.

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xye^{xy^2} + \emptyset'(y)$ como $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$ entonces.

$$2xye^{xy^2} + \emptyset'(y) = 2xye^{xy^2} + 3y^2$$

despejando e integrando tenemos.

$\emptyset'(y) = 3y^2$ o bien $\int d\emptyset = \int 3y^2dy$

$\emptyset(y) = y^3 + C$ que si la sustituimos en la ecuación solución obtenemos.

$$f(x,y) = x^2 + e^{xy^2} + y^3 + C$$

que es la primitiva que buscamos.

CAPITULO V

REDUCCION DE UNA ECUACION DIFERENCIAL A OTRA CON TIPO DE SOLUCION BASICO

Hasta ahora hemos encontrado tres tipos diferentes de ecuaciones de primer orden primer grado para las cuales se pueden obtener las soluciones por métodos básicos o exactos. Estas ecuaciones son: Ecuaciones de variable separable, ecuaciones homogéneas y ecuaciones exactas. En el caso de las ecuaciones exactas seguimos un procedimiento definido para obtener las soluciones de manera directa. Para los otros dos tipos existen también procedimientos definidos para llegar a la solución; sin embargo, en estos casos los procedimientos no son tan directos. En el caso de las ecuaciones de variable separable, multiplicamos por factores adecuados que redujeron las ecuaciones dadas a ecuaciones que son de tipo básico más exacto. Dichos factores son conocidos como factores de integración. Para las ecuaciones homogéneas hacemos transformaciones apropiadas que las reducen a ecuaciones de variable separable.

Las observaciones anteriores sugieren dos planes generales, que debemos seguir para resolver una ecuación diferencial que no sea de ninguno de los tres tipos mencionados.

I). Multiplicar la ecuación dada por un factor de integración adecuado y reducirla a una ecuación exacta.

2). Introducir una transformación que redujera la ecuación a uno de los tipos básicos.

V.1 Factores de integración.

Se les denomina así a aquellos factores que aplicados a una ecuación diferencial nos la reduce a una ecuación diferencial básica más exacta.

Desafortunadamente no existen procedimientos de carácter general para determinar una transformación adecuada para todos los casos; no obstante, hay una variedad de formas especiales de ecuaciones diferenciales que poseen tipos especiales de factores de integración, o bien, para las cuales se pueden aplicar transformaciones especiales.

Es cierto que algunas ecuaciones diferenciales poseen factores que se pueden obtener " por simple inspección", estas ecuaciones sin embargo, rara vez llegan a encontrarse. Debe señalarse en todo caso que es necesario un gran conocimiento y experiencia adquirida sobre el tema.

Intentemos encontrar un primer factor de integración bajo las siguientes condiciones.
Supongamos que la ecuación:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

no es exacta y que $U(y)$ es el factor que la convierte a exacta.

Entonces la ecuación.

$$U(y)M(x,y)dx + U(y)N(x,y)dy = 0 \quad \text{es exacta.}$$

Entonces

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[U(y)M(x,y)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[U(y)N(x,y)\right]$$

$$\frac{dU(y)}{dy} M(x,y) + U(y)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = U(y)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

$$\frac{dU}{dy} M = U\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right]$$

$$\frac{dU}{U} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}\, dy$$

Integrando

$$\mathrm{Ln}\; U = \int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}\, dy$$

de donde

$$U = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}\, dy}$$

Si

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = g(y)$$ entonces la expresión

$$U = e^{\int g(y)dy}$$ es un factor de integración que nos convierte a exacta la ecuación diferencial inicial.

Por el contrario si la ecuación:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

no es exacta y $U(x)$ es el factor de integración que la convierte a exacta.

Tenemos que

$$U(x)M(x,y)dx + U(x)N(x,y)dy = 0$$ es exacta,-

por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial y} U(x)M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} U(x)N(x,y)$$

$$U(x) \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{dU(x)}{dx} N(x,y) + U(x)\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$$

$$U\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = N \frac{dU}{dx}$$

$$\frac{1}{U} dU = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx$$

Integrando

$$Ln\ U = \int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx$$

$$U = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx}$$

si

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x) \quad \text{entonces} \quad J = e^{\int f(x)dx}$$ que-

es el factor de integración que buscamos.

Tomamos la ecuación diferencial utilizada en el primer ejemplo de ecuaciones diferenciales exactas, la - cual simplificamos para quitarle su exactitud y ahora tra-- taremos de devolversela y resolverla.

$$(y + 2xy^2)dx + (2x + 3x^2y)dy = 0$$

en donde

$$M = y + 2xy^2 \quad y \quad N = 2x + 3x^2y$$

como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 4xy \quad y \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2 + 6xy$$

entonces

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$ la ecuación es no exacta.

Entonces.

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{1 + 2xy}{y(1+2xy)} = \frac{1}{y}$$

Utilizamos el factor de integración

$$e^{\int \frac{1}{y}\,dy} = e^{Lny} = y$$ que es el factor de - integración buscado, el cual aplicamos a la ecuación diferencial no exacta.

$$y(y + 2xy^2)dx + y(2x + 3x^2y)dy = 0$$
$$(y^2 + 2xy^3)dx + (2xy + 3x^2y^3)dy = 0$$

en donde

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y + 6xy^2 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

entonces la ecuación la hemos convertido a exacta. Resolvemos entoces por el método para ecuaciones diferenciales — exactas.

$$f(x,y) = \int^x (y^2 + 2xy^3)dx + \emptyset(y)$$
$$f(x,y) = xy^2 + x^2y^3 + \emptyset(y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 3x^2y^2 + \emptyset'(y) \qquad \text{pero } \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

entonces

$$2xy + 3x^2y^2 + \emptyset'(y) = 2xy + 3x^2y^2$$

Por lo tanto

$$\phi'(y) = 0 \qquad \text{entonces} \qquad \phi(y) = C$$

substituimos en f(x,y)

$$f(x,y) = xy^2 + x^2y^3 + C$$

que es la solución de la ecuación diferencial convertida a exacta con ayuda de un factor de integración.

V.2 Substituciones diversas.

Una ecuación diferencial puede tener un aspecto diferente a cualquier de las ecuaciones básicas recientemente estudiadas pero, por medio de un cambio de variable apropiado, un problema aparentemente difícil puede tal vez resolverse con facilidad. Aunque no se pueden dar reglas fijas sobre que substituciones usar si es que existe alguna substitución posible, una pauta podría ser: ¡ Intente algo ! a veces vale la pena hacerlo.

Por lo anterior si se nos presenta:

$$dy + (5y - 20x)^2 dx = 0$$

hacemos

$$u = 5y - 20x \qquad y \qquad du = 5dy - 20dx$$

en donde

$$dy = \frac{du + 20dx}{5}$$

que si lo substituimos en la ecuación diferencial original nos da:

$$\frac{du + 20dx}{5} + u^2dx = 0$$

en donde toma la forma de una función f(x,u) exclusivamente.

O bien.

$$du + 5(u^2 + 4)dx = 0$$

lo cual es una ecuación de variable separable.

Si separamos e integramos la expresión nos queda:

$$\int \frac{du}{u^2 + 4} + \int 5dx = 0$$

$$\frac{1}{2} \text{ arc. tang. } \frac{u}{2} + 5x = C$$

pero $u = 5y - 20x$ entonces la solución es.

$$\frac{1}{2}\text{arc.tang.}\frac{5y-20x}{2} + 5x = C$$

Otro ejemplo sería:

$$(3x + 4y - 7)dx + (5x + 6y - 5)dy = 0$$

La cual es una ecuación que no corresponde ni a variable separable, ni es exacta, ni es homogénea, ni se puede realizar alguna substitución de combinación de sumandos, entonces sugerimos lo siguiente:

1). Resolver el sistema generado por

$3x + 4y - 7 = 0$ obteniendo $x = -11$

$5x + 6y - 5 = 0$ $y = 10$

2). Incorporamos nuevas variables x_1 , y_1 bajo las siguientes relaciones.

$x = x_1 - 11$ de donde $dx = dx_1$

$y = y_1 + 10$ $dy = dy_1$

3). Substituimos estas relaciones en la ecuación diferencial.

Entonces nos da.

$$\left[3(x_1-11)+4(y_1+10)-7\right]dx_1 + \left[5(x_1-11)+6(y_1+10)-5\right]dy_1 = 0$$

si reducimos obtenemos

$$(3x_1 + 4y_1)dx_1 + (5x_1 + 6y_1)dy_1 = 0$$

La cual identificamos como una ecuación homogénea en la que utilizaremos:

$$y_1 = ux_1 \qquad y \qquad dy_1 = udx_1 + x_1du$$

Que substituidos en la ecuación diferencial nos da:

$$(3x_1+4ux_1)dx_1 + (5x_1+6ux_1)(udx_1+x_1du) = 0$$

efectuando operaciones y reduciendo términos obtenemos:

$$3(1 + 3u + 2u^2)dx_1 + x_1(5 + 6u)du = 0$$

Donde observamos que pertenece a la forma de una ecuación de variable separable.

$$\frac{3}{x_1}dx_1 + \frac{5 + 6u}{2u^2+3u+1}\,du = 0$$

pero

$$2u^2 + 3u + 1 = (u + 1)(2u + 1)$$

Integramos.

$$\int \frac{3}{x_1}dx_1 + \int \frac{5 + 6u}{(u+1)(2u+1)}\,du = 0$$

Si resolvemos por fracciones parciales entonces nos queda - asi:

$$\int \frac{3}{x_1}dx_1 + \int \frac{du}{u+1} + \int \frac{4du}{2u+1} = 0$$

$$3Lnx_1 + Ln(u+1) + 2Ln(2u+1) = LnC$$

Aplicamos propiedades de los logaritmos.

$$x_1^3(u + 1)(2u + 1)^2 = C$$

pero $u = \frac{y}{x_1}$ entonces hacemos el cambio correspondiente.

$$x_1^3\left[\frac{y_1}{x_1} + 1\right]\left[\frac{2y_1}{x_1} + 1\right]^2 = C$$

$$(y_1 + x_1)(2y_1 + x_1)^2 = C$$

pero

$$x_1 = x + 11 \quad y \quad y_1 = y - 10 \quad \text{entonces.}$$

$$(y-10+x+11)(2(y-10) + x + 11)^2 = C$$

o bien.

$$(x + y + 1)(2y + x - 9)^2 = C$$

Que es la solución final expresada como una función de las - variables originales.

CAPITULO VI

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

VI.I Definición y características de una ecuación diferencial lineal.

Se dice que una ecuación diferencial de cualquier orden es lineal, cuando es de primer grado respecto de la variable dependiente y sus derivadas; las ecuaciones diferenciales lineales son muy importantes por ser numerosas sus aplicaciones tanto en mecánica, como en electricidad, fluídos, etc.

De la definición anterior de una ecuación diferencial lineal se deduce que el tipo general de una ecuación diferencial lineal en y de primer orden podemos expresarlo como:

$$\frac{dy}{dx} + yP = Q$$

donde P y Q son funciones de x solamente.

Entonces la expresión toma la forma para $P = P(x)$ y $Q = Q(x)$ de:

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = Q(x)$$

Que es la forma general de una ecuación diferencial lineal de primer orden.

VI.2 Factor de integración para las ecuaciones lineales.

Tratemos ahora de encontrar un factor de integración para la ecuación diferencial lineal

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = Q(x)$$

Si buscamos un factor U(x) que nos haga la ecuación diferencial lineal, una ecuación que tenga un diferencial exacto, entonces hacemos:

$$U(x)\left[\frac{dy}{dx} + yP(x)\right] = U(x)Q(x)$$

$$U(x)dy + U(x)yP(x)dx = U(x)Q(x)dx$$

$$\left[U(x)P(x)y - U(x)Q(x)\right] dx + U(x)dy = 0$$

Para señalar que es exacta tenemos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[U(x)P(x)y - U(x)Q(x)\right]$$

de donde

$$\frac{\partial M}{\partial y} = U(x)P(x)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} U(x) \qquad o \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{dU(x)}{dx}$$

pero:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$ entonces tenemos que.

$$U(x)P(x) = \frac{dU(x)}{dx}$$

Integrando ambos lados de

$$P(x)dx = \frac{dU(x)}{U(x)}$$

$$\int P(x)dx = \int\frac{dU(x)}{U(x)}$$

$$\int P(x)dx = \text{Ln } U(x)$$

Si aplicamos propiedades de los logaritmos.

$$U(x) = e^{\int P(x)dx}$$

que es el factor de integración buscado, el cual nos queda como una función de P(x) que además es una función conocida.

VI. 3 Solución de una ecuación diferencial lineal.

Si a $\frac{dy}{dx} + yP(x) = Q(x)$ la multiplicamos por el factor de integración.

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + yP(x)e^{\int P(x)dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

si derivamos $\frac{d}{dx}\left[ye^{\int P(x)dx}\right]$ obtenemos.

$$= \frac{dy}{dx}e^{\int P(x)dx} + y\frac{d}{dx}e^{\int P(x)dx}$$

$$\frac{dy}{dx}e^{\int P(x)dx} + ye^{\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\int P(x)dx$$

$$= \frac{dy}{dx}e^{\int P(x)dx} + ye^{\int P(x)dx}P(x)$$

$$= \frac{dy}{dx}e^{\int P(x)dx} + yP(x)e^{\int P(x)dx}$$

$$= e^{\int P(x)dx}\left[\frac{dy}{dx} + yP(x)\right]$$

ue es la ecuación diferencial lineal original con su factor de integración aplicado entonces si:

$$\frac{d}{dx}ye^{\int P(x)dx} = e^{\int P(x)dx}\left[\frac{dy}{dx} + yP(x)\right]$$

decimos que.

$$\frac{d}{dx}ye^{\int P(x)dx} = e^{\int P(x)dx}Q(x)$$

ó bien

$$d\left(ye^{\int P(x)dx}\right) = e^{\int P(x)dx}Q(x)dx$$

Si lo integramos nos da:

$$\int d\left(ye^{\int P(x)dx}\right) = \int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx$$

$$ye^{\int P(x)dx} = \int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx$$

$$y = \frac{e^{\int P(x)dx} Q(x)dx}{e^{\int P(x)dx}}$$

$$y = e^{-\int P(x)dx} \int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx$$

Que es la solución buscada por las ecuaciones diferenciales li_ neales.

Un ejemplo de ecuación diferencial lineal es:

$$xdy + (2y - x^3) dx = 0$$

la cual toma la forma

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x^2$$

que es una ecuación diferencial lineal donde.

$$P(x) = \frac{2}{x} \qquad y \qquad Q(x) = x^2$$

Los cuales substituídos en la solución nos da.

$$y = e^{-\int \frac{2}{x} dx} \int e^{\int \frac{2}{x} dx} x^2dx$$

$$y = e^{-2Lnx} \int e^{2Lnx} x^2dx$$

$$y = x^{-2} \int x^2x^2dx$$

$$y = x^{-2} \int x^4dx$$

$$y = x^{-2}\left[\frac{x^5}{5} + C\right]$$

$$y = \frac{x^3}{5} + Cx^{-2}$$

que es el resultado final.

Para algunos casos es probable que la ecuación diferencial sea lineal para x y no para y, entonces tendremos.

$$\frac{dx}{dy} + xP(y) = Q(y)$$

Cuya solución sería idéntica pero para x o sea:

$$x = e^{-\int P(y)dy} \int e^{\int P(y)dy} Q(y)dy$$

Un ejemplo de solución para x es:

$$(y-2)dx - \left[x + (y-2)^3\right] dy = 0$$

Si observamos la ecuación diferencial encontramos que no es lineal para y. Entonces intentamos realizar el arreglo para x.

$$\frac{dx}{dy} - \frac{x + (y-2)^3}{y-2} = 0$$

$$\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y-2} = -\frac{(y-2)^3}{y-2}$$

$$\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y-2} = -(y-2)^2$$ en donde encontramos que:

$$P(y) = -\frac{1}{y-2} \quad \text{y} \quad Q(y) = -(y-2)^2$$

el factor de integración es:

$$e^{\int \frac{-1}{y-2}dy} = e^{-Ln(y-2)}$$

$$f.i. = e^{Ln(y-2)^{-1}} = \frac{1}{y-2}$$

Substituimos en la ecuación solución para obtener:

$$x = (y-2)\int \frac{1}{y-2}\left[-\ (y-2)^2\ \right] dy$$

$$x = (y-2)\int -\ (y-2)dy$$

$$x = (y-2)\ (-\ \frac{y^2}{2} + 2y + C\ )$$

$$x = -\ \frac{y^3}{2} + 3y^2 - 4y + Cy - 2C$$

Cuya expresión es la que buscamos como solución general de - la ecuación diferencial.

VI.4 Ecuación de Bernoulli y su reducción a una ecuación dife rencial lineal de primer orden.

La ecuación

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = y^nQ(x)$$

donde P y Q son funciones de x únicamente, se denomina ecua - ción de Bernoulli, por ser James Bernoulli quien la estudió - en 1695.

Si dividimos la ecuación entre y^n obtenemos:

$$\frac{1}{y^n}\ \frac{dy}{dx} + \frac{yP(x)}{y^n} = Q(x)$$

$$(1) \qquad y^{-n}\frac{dy}{dx} + y^{1-n}P(x) = Q(x)$$

Si hacemos $\quad z = y^{1-n} \quad$ y $\quad dz = (1-n)y^{-n}dy$

o bien $\quad \frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\ \frac{dy}{dx} \quad$ lo cual substituimos en -

(1) junto con $\quad z = y^{1-n}$

$$\frac{1}{1-n}\;\frac{dz}{dx} + zP(x) = Q(x)$$

o bien

$$\frac{dz}{dx} + zP(x)(1-n) = (1-n)Q(x)$$

la cual es una ecuación lineal para z cuya solución es:

$$z = e^{-\int(1-n)P(x)dx}\int e^{\int(1-n)P(x)dx}(1-n)Q(x)dx$$

$$z = e^{\int(n-1)P(x)dx}\int e^{\int(1-n)P(x)dx}(1-n)Q(x)dx$$

pero $z = y^{1-n}$ entonces.

$$y^{1-n} = e^{\int(n-1)P(x)dx}\int e^{\int(1-n)P(x)dx}(1-n)Q(x)dx$$

que es la solución de la ecuación de Bernoulli.

Consideramos entonces la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = 5x^2y^5 + \frac{y}{2x}$$

o bien

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x} = 5x^2y^5$$ que es una ecuación de Bernoulli cuya solución es:

$$y^{1-5} = e^{\int(5-1)(-\frac{1}{2x})dx}\int e^{\int(1-5)(-\frac{1}{2x})dx}(1-5)5x^2dx$$

$$y^{-4} = e^{-\frac{2}{x}dx}\int e^{\int\frac{2}{x}dx}(-4)(5x^2)dx$$

$$y^{-4} = e^{-2Lnx}\int e^{2Lnx}(-20x^2)dx$$

$$y^{-4} = e^{Lnx^{-2}}\int e^{Lnx^2}(-20x^2)dx$$

$$y^{-4} = x^{-2} \int x^{2}(-20x^{2})dx$$

$$y^{-4} = - x^{-2} (4x^{5} + C)$$

$$y^{-4} = - 4x^{3} + Ax^{-2}$$ que es la solución de-

la ecuación diferencial.

Resolvemos ahora $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = xy^{2}$

La cual es una ecuación de Bernoulli. Realizando todo el proceso dividimos primero por y^{2}.

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} + \frac{y^{-1}}{x} = x$$

haciendo $z = y^{-1}$ entonces $dz = -y^{-2}dy$

o bien

$$\frac{dz}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$$

como $-\frac{dz}{dx} = y^{-2}\frac{dy}{dx}$ que substituyéndolos en la ecuación diferencial obtenemos.

$$-\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x} = x$$

o

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = -x$$ lo cual es una ecuación -

lineal cuya solución es:

$$z = e^{\int \frac{1}{x}dx} \int e^{\int -\frac{1}{x}dx} (-x)dx$$

$$z = e^{Lnx} \int e^{-Lnx}(-x)dx$$

$$z = x\int x^{-1}(-x)dx$$

$$z = x \int -dx \;=\; x(\,-x + C\,)$$

$$z = -x^2 + Cx$$

Substituyendo $z = y^{-1}$ obtenemos $y^{-1} = -x^2 + Cx$ que corresponde a la solución general de la ecuación diferencial.

En la página siguiente hacemos la presentación de una tabla, en donde reunimos los principales tipos de ecuaciones diferenciales tratados hasta ahora, señalamos también diferentes substituciones para reducirlas a un tipo de ecuación diferencial básico con su respectiva solución.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN PRIMER GRADO

$$M(X,Y)dX + N(X,Y)dY = 0$$

ECUACIONES DIFERENCIALES	REQUISITOS O FORMA QUE DEBEN TENER	FACTOR DE INTEGRACION O SUBSTITUCION UTILIZADA	SOLUCIONES
DE VARIABLE SEPARABLE	$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$	$F.I. = \frac{1}{g_1(y)f_2(x)}$	$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = 0$
HOMOGENEAS	$f(JX, JY) = J^n f(X,Y)$	$Y = UX$ LA CONVIERTE A VARIABLE SEPARABLE CON: $dy = udx + xdu$	
EXACTAS	$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$		$\int^x M(x,y)dx + \int \left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int^x M(x,y)dx\right]dy = C$
LINEALES	$\frac{dy}{dx} + yP(x) = Q(x)$	$F.I. = e^{\int P(x)dx}$	$ye^{\int P(x)dx} = \int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx$
BERNOULLI	$\frac{dy}{dx} + yP(x) = y^n Q(x)$	$u = y^{1-n}$ LA CONVIERTE A LINEAL CON: $\frac{du}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$	

CAPITULO VII

APLICACIONES A LA MECANICA

VII. 1 Introducción.

Antes de aplicar nuestros conocimientos de- las ecuaciones diferenciales a ciertos problemas de la mecá- nica vamos a recordar brevemente ciertos principios de este- tema.

La mecánica es la parte de la física que es tudia el movimiento de los cuerpos. Para su estudio fué divi dida en cinemática, estática y dinámica.

La cinemática estudia la geometría del movi miento; se aplica para relacionar el desplazamiento, la velo cidad, la aceleración y el tiempo, sin tener en cuenta las-- causas del movimiento.

La estática es un caso especial del análi-- sis del movimiento ya que estudia los cuerpos en reposo o -- sea el equilibrio estático.

La dinámica estudia la relación existente - entre las fuerzas que actúan en un cuerpo, la masa del cuer- po y el movimiento del mismo.

A continuación deducimos ecuaciones y anali zamos las características del movimiento en aplicaciones a - la mecánica.

VII.2 Determinación del movimiento de una partícula

Existen cuatro parámetros fundamentales para establecer las características del movimiento de una partícula que son; posición, velocidad, aceleración y tiempo, las cuales pueden relacionarse entre sí y obtener tanto ecuaciones como -gráficas que nos representan dicho movimiento. Sin embargo en la práctica son pocas las ocasiones en que el movimiento se define por la relación posición-tiempo. Generalmente las condiciones del movimiento se especificarán por el tipo de aceleración que posee la partícula.

Un ejemplo de lo anterior, un cuerpo que cae libremente tendrá una aceleración constante dirigida hacia abajo con un valor de $g = 9.8\ m/s^2$; una masa unida a un resorte - que ha sido estirado tendrá una aceleración que es proporcional a la elongación instantánea del resorte medida a partir de la posición de equilibrio; etc..

Consideremos tres clases comunes de movimiento:

1.- Si $a = f(t)$. Es decir la aceleración está dada como una función del tiempo. Pero como $a = \frac{dv}{dt}$ entonces -- tenemos la relación:

$$\frac{dv}{dt} = f(t) \qquad \text{en donde}$$

$$dv = f(t)dt$$

Integrando ambos miembros obtenemos: $\int dv = \int f(t)dt$

La cual define la velocidad como una función del tiempo. Sin embargo para eliminar la constante de integración arbitraria asignamos condiciones de valor inicial de la - manera siguiente.

Si $t_1 = 0$ entonces $v_1 = v_o$

Si $t_2 = t$ entonces $v_2 = v_f$

de donde

$$\int_{v_1 = v_o}^{v_2 = v_f} dv = \int_{t_i = 0}^{t_2 = t} f(t)dt$$

$$v_f - v_o = \int_0^t f(t)dt$$

$$v_f = v_o + \int_0^t f(t)dt$$

que es la expresión que nos da la velocidad como una función del tiempo.

2.- Si $v = g(t)$ y $v = \frac{ds}{dt}$

o bien la velocidad expresada como la variación de la posición con respecto al tiempo. Nos da que

$$\frac{ds}{dt} = g(t)$$

de lo cual

$$ds = g(t)dt$$

Integrando

$$\int ds = \int g(t)dt$$

Asignando las siguientes condiciones.

Si $t_1 = 0$ entonces $s_1 = s_o$

Si $t_2 = t$ y $s_2 = s$

tenemos que:

$$\int_{s_1 = s_o}^{s_2 = s} ds = \int_{t_1 = 0}^{t_2 = t} g(t)dt$$

$$s - s_o = \int_0^t g(t)dt$$

En donde observamos que la ecuación nos dá la posición de una partícula como función del tiempo.

3.- Si $a = f(s)$ o sea la aceleración expresada como una función de la posición, vemos que.

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad \text{pero} \qquad a = \frac{dv}{dt}\frac{ds}{ds}$$

$$a = \frac{ds}{dt}\frac{dv}{ds} \qquad \text{como} \qquad v = \frac{ds}{dt}$$

tenemos que

$$a = v\frac{dv}{ds}$$

despejando

$$f(s)ds = vdv$$

Señalando condiciones de valor inicial

$$\text{Si} \quad s_1 = s_o \quad \text{para} \quad v_1 = v_o$$

$$\text{y} \quad s_2 = s_f \quad \text{para} \quad v_2 = v_f$$

Entonces

$$\int_{s_o}^{s_f} f(s)ds = \int_{v_o}^{v_f} vdv$$

$$\int_{s_o}^{s_f} f(s)ds = \tfrac{1}{2}v^2 \Big|_{v_o}^{v_f}$$

$$\int_{s_o}^{s_f} f(s)ds = \tfrac{1}{2}v_f^2 - \tfrac{1}{2}v_o^2$$

$$v_f^2 = v_o^2 + 2\int_{s_o}^{s_f} f(s)ds$$

que es la expresión que se usa para representar a la velocidad como una función de la posición.

VII.3 Deducción de las ecuaciones básicas para el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Son tres las ecuaciones base que nos proporcionan relaciones útiles entre las coordenadas de posición, la velocidad y el tiempo para el caso del movimiento uniformemente acelerado.

1.- Movimiento rectilíneo uniforme

Esta clase de movimiento se encuentra frecuentemente en las aplicaciones prácticas, para este movimiento la aceleración es igual con cero en cualquier instante "t", la velocidad v es entonces constante.

tenemos entonces que:

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad \text{de donde} \qquad ds = vdt$$

$$\int_{s_o}^{s} ds = \int_{t_o = o}^{t} vdt$$

Por lo cual

$$s - s_o = vt \qquad \text{entonces} \qquad s = s_o + vt$$

Esta ecuación la podemos emplear cuando la velocidad de la prtícula es constante.

2.- Movimiento rectilíneo uniformemente -- acelerado.

En este tipo de movimiento la aceleración es constante y su ecuación es:

$$\frac{dv}{dt} = a = cte.$$

$$dv = a\ dt$$

Integrando

$$\int dv = \int a\ dt$$

bajo las condiciones

$$\text{si} \qquad t_1 = 0 \qquad \text{entonces} \qquad v_1 = v_o$$

$$\text{si} \qquad t_2 = t \qquad \text{entonces} \qquad v_2 = v_f$$

tenemos que

$$\int_{v_o}^{v_f} dv = \int_0^t a\ dt = a\int_0^t dt$$

$$v_f - v_0 = at$$

que conocemos como:

$$\underline{v_f = v_o + at} \qquad (1)$$

Tenemos ahora que:

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad \text{entonces} \qquad \frac{ds}{dt} = v_o + at$$

$$ds = (v_o + at)\ dt$$

Bajo las condiciones:

$$\text{para} \quad t_1 = 0 \,, \quad s = s_o$$

$$\text{para} \quad t_2 = t \,, \quad s = s_f$$

Integramos

$$\int_{s_o}^{s_f} ds = \int_0^t (v_o + at)dt$$

$$s_f - s_o = v_o t + \tfrac{1}{2}at^2$$

que conocemos como

$$\underline{s_f = s_o + v_o t + \tfrac{1}{2}at^2} \qquad (2)$$

También podemos usar

$$a = v \frac{dv}{ds} \quad \text{o} \quad ads + vd\text{\textbackslash}$$

Integrando

$$\int ads + \int vdv$$

Señalando límites

$$a \int_{s_o}^{s_f} ds = \int_{v_o}^{v_f} vdv$$

$$a(s_f - s_o) = \tfrac{1}{2}v_f^2 - \tfrac{1}{2}v_o^2$$

$$2a(s_f - s_o) = v_f^2 - v_o^2$$

$$\underline{v_f^2 = v_o^2 + 2a(s_f - s_o),} \qquad (3)$$

que es la forma bajo cual la utilizamos.

Las ecuaciones (1), (2) y (3) obtenidas son las ecuaciones básicas que nos dan las relaciones de los parámetros que intervienen en el movimiento uniformemente acelerado. Es importante tener en cuenta que se utilizan únicamente cuando la aceleración es constante.

VII. 4.— Aplicaciones prácticas.

Un ejemplo para el movimiento horizontal - sería;

Un bloque desliza sobre un plano horizontal con una velocidad inicial $v_o = 25$ m/s, debido a la fricción su velocidad disminuye a razón de 3 m/s en cada segundo.

Debemos encontrar:

a).- Ley de velocidades
b).- Ley de desplazamientos
c).- Distancia que recorre hasta que se detiene
d).- Tiempo que tarda en detenerse

Solución

Como $\frac{dv}{dt} = a \text{ cte.} = -3$

entonces

$$dv = -3dt$$
$$\int dv = -\int 3dt$$
$$v = -3t + C_1$$

determinemos el valor de C_1 escogiendo un lugar de nuestro proceso en el cual conozcamos v y t.

Tomando el origen donde

$$t = 0 \quad y \quad v = 25$$

substituimos en

$$v = -3t + C_1$$
$$25 = v = -3(0) + C_1$$
$$25 = C_1$$

o sea

$$v = -3t + 25$$

La cual consideramos como ley de velocidades. O bien es la que nos informa la velocidad del cuerpo en cualquier instante "t".

pero

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad \text{entonces} \qquad \frac{ds}{dt} = -3t + 25$$

$$ds = (-3t + 25)dt$$

$$\int ds = \int (-3t + 25)dt$$

$$s = -\frac{3}{2}t^2 + 25t + C_2$$

Para determinar C_2 tomamos el origen donde $s = 0$ para $t = 0$ que substituimos en:

$$s = -\frac{3}{2}t^2 + 25t + C_2$$

$$0 = -\frac{3}{2}(0)^2 + 25(0) + C_2$$

$$C_2 = 0$$

Entonces

$$s = -\frac{3}{2}t^2 + 25t$$

la cual conocemos como ley de desplazamientos.

Para conocer el tiempo que tarda en detenerse sabemos que $v = 0$ en ese momento, entonces utilizando ley de velocidades obtenemos ese tiempo.

$$v = -3t + 25 \qquad \text{si } v = 0$$

$$0 = -3t + 25 \qquad t = \frac{25}{3} = 8.33 \text{ seg.}$$

que es el tiempo que tarda en detenerse.

Substituyendo dicho tiempo en la ley de despla zamientos obtenemos la posición del cuerpo en ese momento.

$$s = -\frac{3}{2}t^2 + 25t$$

$$s = -\frac{3}{2}(8.33)^2 + 25(8.33)$$

$$s = 104.66 \text{ mts.}$$

que es la distancia recorrida hasta que se detiene.

Un ejemplo que nos ilustra las característi - cas del movimiento vertical es:

Desde lo alto de un edificio de 20 m de altura se lanza una pelota con una velocidad de $v_o = 15$ m/s verticalmente hacia arriba, como lo muestra la Fig. 7.1. Calcular;

a). Ley de velocidades

b). Ley de desplazamientos

c). Tiempo que dura en el aire

d). Altura máxima que alcanza

e). Velocidad con que llega al suelo

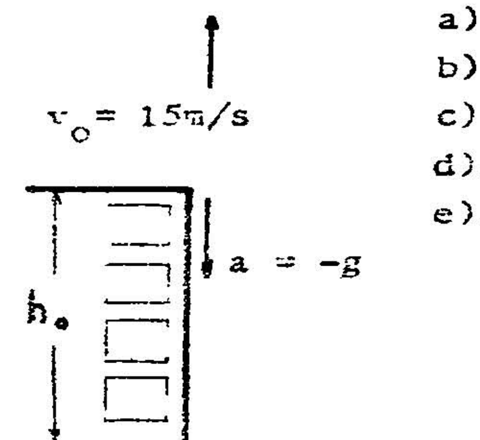

Fig. 7.1 Lanzamiento de un proyectil con un desnivel $h_o = 20$m

Solución

Substituyendo a por su valor en

$a = \frac{dv}{dt}$ nos da. $\frac{dv}{dt} = -9.8 m/s^2$

de donde $dv = -9.8dt$

integrando

$$\int dv = -\int 9.8dt \qquad v = -9.8t + C_1$$

substituyendo las condiciones que si $t = 0$ $v = 15$

nos da $15 = -9.8(0) + C_1$ donde $C_1 = 15$

Entonces

$$v = -9.8t + 15 \qquad \text{(ley de velocidades)}$$

Como

$$\frac{dh}{dt} = v \qquad \text{entonces} \qquad \frac{dh}{dt} = -9.8t + 15$$

o bien separando o integrando

$$\int dh = \int (-9.8t + 15)dt$$

entonces

$$h = -\frac{9.8t^2}{2} + 15t + C_2$$

Si

$$t = 0 \quad y \quad h = 20 \qquad \text{entonces} \qquad 20 = -4.9(0)^2 + 15(0) + C_2$$

donde

$C_2 = 20$ lo cual nos da $h = -4.9t^2 + 15t + 20$ (ley de desplazamientos)

Altura máxima que alcanza la pelota.

Cuando alcanza su altura máxima la $v = 0$ substituyendo esto en la ley de velocidades obtenemos t.

$$v = -9.8t + 15 \qquad 0 = -9.8t + 15$$

$t = \frac{15}{9.8} = 1.53$ seg. que substituidos en la ley de desplazamientos

$$h = -4.9(1.53)^2 + 15(1.53) + 20$$

nos da

$h = 31.47$ m que es la altura máxima

La pelota toca el suelo si $h = 0$ lo cual substituimos en la ley de desplazamientos para obtener.

$$0 = -4.9t^2 + 15t + 20$$

de donde

$$t_1 = 4.06 \text{ seg.}$$

$t_2 = -1.003$ seg.

Solamente $t = 4.06$ seg., corresponde a un tiempo posterior a la iniciación del mowimiento y es el correspondiente al tiempo de duración en el aire. Substitu - yéndolo en la ley de velocidades.

$$v = -9.8t + 15 \qquad v = -9.8(4.06) + 15$$

$$v = -24.79 \text{ m/s}$$

Que es la velocidad con que llega y pega en el suelo la pelota.

Un ejemplo de aplicación de la segunda ley de Newton.

Una caja que pesa 400 kg. resbala por un - plano inclinado a 10 grados. Si la fuerza de rozamiento que se opone al movimiento es de 20 kilogramos y la resistencia del aire expresada en kilogramos equivale a 0.10 veces la - velocidad en centímetros por segundo, Cuyo diagrama de fuerzas se muestra en la Fig. 7.2.

a). Una expresión para la velocidad des - pués de transcurridos t segundos a partir del movimiento inicial.

b). La velocidad después de haber transcurridos diez segundos de iniciado el movimiento.

c). La velocidad límite.

Solución.

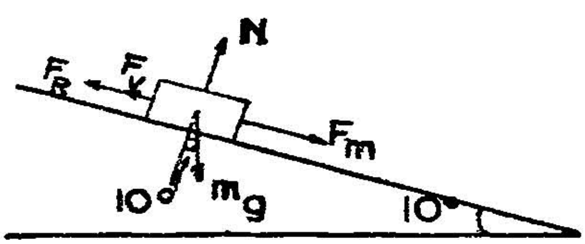

Fig. 7.2 Diagrama de fuerzas que actúan en el bloque

De la figura la fuerza paralela a la dirección del movimiento - es:

$$f_m = mg(\text{sen } 10^o) = 400 \text{ sen} 10^o$$

$$f_m = 69.46 \text{ kg.}$$

Si se escoge el sentido descendente como sentido positivo de la figura deducimos que:

$$F = 69.46 - 20 - 0.10v$$ y teniendo en -- cuenta que

$$F = ma \qquad o \qquad F = m\,\frac{dv}{dt}$$

$$49.46 - 0.10v = \frac{400}{981}\,\frac{dv}{dt}$$

donde $g = 9.81\ m/s^2 = 981\ cm/s^2$ y además:

$$\text{peso} = \text{masa} \times \text{gravedad} \qquad o \qquad \text{masa} = \frac{\text{peso}}{g} = \frac{400}{981}$$

Separando las variables e integrando obtenemos:

$$\frac{981}{400}\,dt = \frac{dv}{49.46 - 0.1v}$$

$$-\,0.245dt = \frac{-\,0.1dv}{49.46 - 0.1v}$$

$$-\int_0^t 0.245dt = \int_0^v \frac{-0.1dv}{49.46 - 0.1v}$$

$$-\,0.245t = Ln(49.46 - 0.1) - Ln\ 49.46$$

Despejando v obtenemos:

$$v = \frac{49.46(\ 1 - e^{-0.245t})}{0.1}$$

$$v = 494.6(\ 1 - e^{-0.245t})$$

Que es la expresión para la velocidad en cualquier instante -- "t".

De las condiciones siguientes obtenemos la velocidad a los 10 segundos.

Si $t = 0$ $\quad v = 0$

Si $t = 10$ $\quad v = v_{10}$

Substituyendo $t = 10$ en la expresión para las velocidades.

Obtenemos:

$$v = 494.6(1 - e^{-0.245(10)})$$

$$v = 451.92 \text{ cm/s.}$$

Además si $t \rightarrow \infty$ entonces el término $e^{-0.245t} \rightarrow 0$ y en la expresión de velocidades.

$$v = 494.6(1 - e^{-0.245t})$$

observamos que la velocidad tiene por límite el valor de:

$$v = 494.6 \text{ cm/s.}$$

Un ejemplo donde podemos reunir el movimiento horizontal y vertical utilizando notación vectorial y ecuaciones diferenciales es el siguiente:

Desde un desnivel de altura h_o se dispara una bala con una velocidad inicial v_o y un ángulo θ_o con respecto a la horizontal, como lo muestra la Fig. 7.3. Determinar: Expresiones que nos den aceleración velocidad y posición en cualquier instante "t".

Solución:

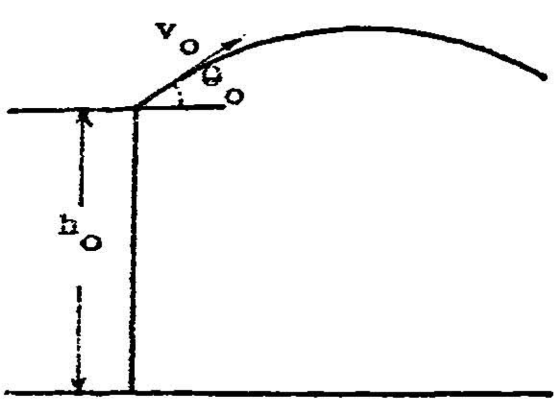

Fig. 7.3 Diagrama del lanzamiento de un proyectil.

Utilizando los vectores "i" y "j" para las componentes horizontal y vertical respectivamente tenemos:

$v_o = v_{ox}i + v_{oy}j$ en donde

$v_{ox} = v_o\cos\theta_o$ y: $v_{oy} = v_o\,\text{sen}\,\theta_o$

Y como la única acleración existente en el proceso es la de la gravedad entonces:

$$a = a_x i + a_y j \quad \text{pero} \quad a_x = 0$$

$$a_y = -g \quad \text{entonces} \quad a = -gj = cte.$$

entonces de

$$a = \frac{dv}{dt} = -gj \quad \text{separamos e integramos}$$

$$dv = -a_y j\, dt \quad \text{nos queda:} \int_{v_o}^{v} dv = -a_y \int_0^t j dt$$

finalmente nos queda.

$$v - v_o = -a_y t j \quad \text{pero como}$$

$$v_o = v_o \cos\theta_o i + v_o \operatorname{sen}\theta_o j \quad \text{entonces:}$$

$$v = (v_o \cos\theta_o) i + (v_o \operatorname{sen}\theta_o - a_y t) j$$

que es la expresión para la velocidad en cualquier instante "t".

Si utilizamos la expresión para las velocidades obtenemos:

$$\frac{ds}{dt} = (v_o \cos\theta_o) i + (v_o \operatorname{sen}\theta_o - a_y t) j$$

La cual si despejamos e integramos nos da:

$$\int_{s_o}^{s} ds = \int_0^t (v_o \cos\theta_o i + (v_o \operatorname{sen}\theta_o - a_y t) j)dt$$

$$s - s_o = v_o \cos\theta_o t i + (v_o \operatorname{sen}\theta_o t - \tfrac{1}{2} a_y t^2) j$$

pero

$$s_o = x_o i + y_o j \quad \text{donde} \quad x_o = 0 \quad \text{entonces:}$$

como $y_o = h_o$

$$s = v_o \cos\theta_o t i + (h_o + v_o \operatorname{sen}\theta_o t - \tfrac{1}{2} a_y t^2) j$$

que es la expresión de la posición como una función del tiempo.

Otro ejemplo de aplicación sería el siguiente.

En ciertos tipos de cañones el mecanismo de freno consiste de un pistón que va unido al tubo del cañón y que puede desplazarse dentro de un cilindro fijo lleno de aceite. Cuando el tubo del cañón retrocede con una velocidad inicial v_o, el pistón se desplaza y el aceite es forzado a pasar a través de los orificios que tiene el pistón, originando en el pistón una deceleración proporcional a su velocidad es decir $a = - kv$. Expresar:

a). La velocidad como una función del tiempo.

b). El desplazamiento como una función del tiempo.

c). La velocidad como una función del desplazamiento.

a). v en función de t. Sustituyendo a por $-kv$ en la fórmula fundamental que define la aceleración como $a = \frac{dv}{dt}$, tenemos

$$-kv = \frac{dv}{dt} \qquad \frac{dv}{v} = -kdt \qquad \int_{v_o}^{v} \frac{dv}{v} = -k\int_{o}^{t} dt$$

$$\text{Ln}\,\frac{v}{v_o} = -kt \qquad \underline{v = v_o e^{-kt}}$$

b). s en función de t. Sustituyendo esta última expresión de v en $v = \frac{ds}{dt}$ tenemos

$$v_o e^{-kt} = \frac{ds}{dt} \qquad \int_o^s ds = v_o \int_o^t e^{-kt} dt$$

$$s = - \frac{v_o}{k} (e^{-kt} - 1)$$

lo cual nos da finalmente:

$$\underline{s = \frac{v_o}{k} (1 - e^{-kt})}$$

c). v en función de s. Sustituyendo a por $-kv$ en $a = v\frac{dv}{ds}$ tenemos

$$-kv = v\frac{dv}{ds} \qquad\qquad dv = -k\,ds$$

Integrando

$$\int_{v_o}^{v} dv = -k\int_{o}^{s} ds \qquad\qquad v - v_o = -ks$$

finalmente

$$\underline{v = v_o - ks}$$

que es la expresión que buscamos.

Tenemos otro ejemplo: Si un cuerpo de masa m se lanza verticalmente hacia arriba en el aire con una velocidad inicial v_o, Si el cuerpo encuentra una resitencia del aire proporcional a su velocidad, encontrar (a) la ecuación del movimiento, (b) una expresión para la velocidad en cualquier instante t, y (c) el tiempo al cabo del cual el cuerpo llega a su máxima altura.

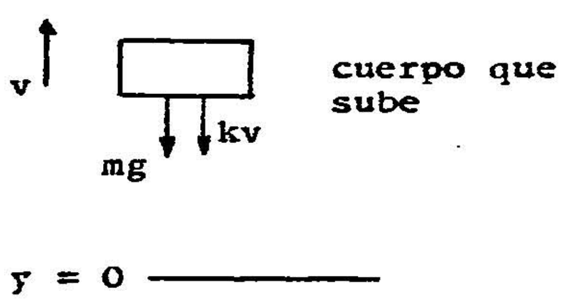

Fig. 7.4. Diagrama de fuerzas que actúan en el cuerpo.

a). Fuerzas que actúan en el cuerpo.

$$F = -mg - kv$$

lo cual agrupamos en

$$ma = -mg - kv$$

$$a = -g - \frac{k}{m}v$$

la cual podemos expresar como:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = -g$$

que es la ecuación pedida que nos representa el movimiento.

(b). La ecuación del movimiento es una ecuación lineal donde:
$P(t) = \frac{k}{m}$ y $Q(t) = -g$
entonces su solución es:

$$v = e^{-\frac{kt}{m}} \int e^{\frac{kt}{m}} (-g)dt$$

en donde.

$$v = e^{\frac{-kt}{m}} \left(- \frac{m}{k} g \, e^{\frac{kt}{m}} + C \right) \qquad v = Ce^{\frac{-kt}{m}} - \frac{mg}{k}$$

Como para $t = 0$ la $v = v_o$ entonces:

$$v_o = C - \frac{mg}{k} \qquad C = v_o + \frac{mg}{k}$$

sustituyendo este valor en la ecuación solución

$$v = \left(v_o + \frac{mg}{k} \right) \left(e^{\frac{-kt}{m}} \right) - \frac{mg}{k}$$

que es la expresión por medio de la cual obtenemos la velocidad en cualquier instante "t".

(c). El cuerpo alcanza su máxima altura cuando $v = 0$ entonces para obtener el tiempo hacemos lo siguiente:

$$0 = \left(v_o + \frac{mg}{k} \right) \left(e^{\frac{-kt}{m}} \right) - \frac{mg}{k}$$

$$e^{\frac{-kt}{m}} = \frac{\frac{mg}{k}}{v_o + \frac{mg}{k}} = \frac{mg}{kv_o + mg} = \frac{1}{\frac{v_o k}{mg} + 1}$$

tenemos entonces que.

$$- \frac{kt}{m} = \text{Ln} \left[\frac{1}{\frac{v_o k}{mg} + 1} \right]$$

de donde decimos que

$$t = \frac{m}{k} \text{Ln} \left[1 + \frac{v_o k}{mg} \right]$$

Lo cual nos da el tiempo buscado.

Para problemas referentes a resorte podemos establecer el siguiente.

Un resorte de peso despreciable está suspendido verticalmente. En su extremo libre se ha sujetado - una masa de m kilogramos. Si la masa se mueve con velocidad v_o m/s cuando el resorte está sin alargar, hallar la velocidad como una función del alargamiento "y" metros.

De la suma de fuerzas que actúan sobre el-cuerpo obtenemos que:

$$F = mg - ky \qquad ma = mg - ky$$

pero

$$m \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} = mv\frac{dv}{dy} = mg - ky \qquad \text{ya que} \quad \frac{dy}{dt} = v$$

Integrando

$$\int mv\, dv = \int mg\, dy - \int ky\, dy \qquad \text{de donde:}$$

$$mv^2 = 2mgy - ky^2 + C$$

para $x = 0$ la $v = v_o$ entonces la constante de integración tiene el valor:

$$C = mv_o^2 \qquad \text{por lo tanto:}$$

$$mv^2 = 2mgy - ky^2 + mv_o^2$$

La cual es la expresión que nos da la velocidad como una -- función del desplazamiento.

La expresión general para el peso de un -- cuerpo de masa m se obtiene a partir de la ley de Newton, - del cuadrado inverso acerca de la atracción gravitacional.- Si R es el radio de la tierra y x la altura por enciama del nivel del mar, entonces el peso sería:

$$W(x) = \frac{k}{(x + R)^2} \qquad \text{donde k es una constante}$$

Tomando x = 0 (nivel del mar), $W = mg$ por lo tanto $k = mgR^2$ entonces

$$W(x) = \frac{mgR^2}{(x+R)^2}$$

Un ejemplo sería si despreciamos la resistencia del aire pero tomamos en cuenta cómo varía el campo gravitacional de la tierra con la altura, encontrar la menor velocidad inicial que necesita tener un cuerpo para que no regrese a la tierra al ser disparado hacia arriba desde la superficie terrestre con una velocidad inicial v_o.

Entoces lo que vamos a cálcular es lo que denominamos velocidad de escape.

Empezamos con suma de fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

$$F = -\frac{mgR^2}{(x+R)^2} \quad \text{en donde} \quad m\frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(x+R)^2}$$

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{gR^2}{(x+R)^2}$$

Separando variables e integrando, obtenemos

$$\tfrac{1}{2}v^2 = \frac{gR^2}{x+R} + C$$

Como $x = 0$ **cuando** $t = 0$ y $v = v_o$ entonces.

$$\tfrac{1}{2}v_o^2 = \frac{gR^2}{R} + C \quad \text{de donde} \quad C = \tfrac{1}{2}v_o^2 - gR$$

Por lo tanto

$$v^2 = v_o^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{x+R}$$

La velocidad de escape se encuentra especificando que la velocidad v, dada por la ecuación anterior permanezca positiva para todos los valores de x. Esta con--

dición se cumplirá si $v_o^2 = 2gR$. Así, la velocidad de escape v_e está dada por.

$$v_e = (2gR)^{\frac{1}{2}}$$

La magnitud de v_e es aproximadamente de 11.1 km/s.

La velocidad de escape real que incluye la resistencia del aire es un poco mayor. Aunque tanto las fuerzas de gravedad como las de rozamiento se reducen; en particular la resistencia del aire disminuye muy rapidamente cuando aumenta la altura

BIBLIOGRAFIA

Boyce Diprima. Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Editorial Limusa

G. Zill Dennis. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones. Editorial Interamericana

L. Ross Shepley. Introducción a las ecuaciones diferenciales. Editorial Interamericana

L. Nielsen Kay. Ecuaciones diferenciales. Editorial — C. E. C. S. A.

Kells L. M. Ecuaciones diferenciales elementales. Editorial McGraw-Hill

Ayres Frank. Ecuaciones diferenciales. Editorial Mcgraw-Hill

Beer y Johnston. Mecánica vectorial para ingenieros. — Editorial McGraw-Hill