ITESM

SIMPLIFICACION DE CIRCUITOS POR MAPAS DE KARNAUGH

TRABAJO FINAL PRESENTADO POR LUIS FELIPE OREZZA
EN OPCION A TESIS PARA OBTENER EL TITULO DE
INGENIERO QUIMICO ADMINISTRADOR

F. de la PEÑA

MATERIA DE MAESTRIA :
SISTEMAS LOGICOS DE CONTROL,

CURSADA EN OPCION A TESIS PARA OBTENER EL TITULO DE

INGENIERO QUIMICO ADMINISTRADOR.

TRABAJO FINAL :
" SIMPLIFICACION DE CIRCUITOS POR MAPAS DE KARNAUGH. "

PROF.
ROBERTO PAEZ.

LUIS FELIPE OREZZA B.

I.Q.A.

INTRODUCCION.-

El álgebra booleana es considerada una de las herramientas básicas y más usada en el diseño de circuitos. Pero las técnicas de optimización de circuitos basada en esta álgebra regularmente es embarazosa y requiere de un alto grado de pericia en el manejo de expresiones booleanas.

Afortunadamente, varias técnicas suplementarias han sido desarrolladas con tino para la optimización de circuitos. Una de esas técnicas son los llamados MAPAS DE KARNAUGH.

La selección de la técnica de optimización de circuitos depende usualmente de la complejidad de dicho circuito, de la naturaleza de los componentes del circuito, y, quizá más que todo, de la experiencia del diseñador con cualquier método de optimización.

INDICE :

PAG.

EN QUE CONSISTE EL METODO ------------------ 1

REPRESENTACION DE FUNCIONES EN MAPAS -------- 3

SIMPLIFICACION DE ECUACIONES POR MAPAS ------ 10

USO DE COMBINACIONES OPCIONALES ------------ 15

PROCEDIMIENTO PARA SELECCIONAR UN CON -JUNTO DE IMPLICANTES PRIMOS IRREDUN -DANTES. ------------------------------------ 19

RESUMEN DE SIMPLIFICACION POR MAPAS --------- 21

SIMPLIFICACION DE CIRCUITOS EN BASE A ELEMENTOS UTILIZADOS --------------------- 24

BIBLIOGRAFIA ------------------------------- 27

EN QUE CONSISTE EL METODO.-

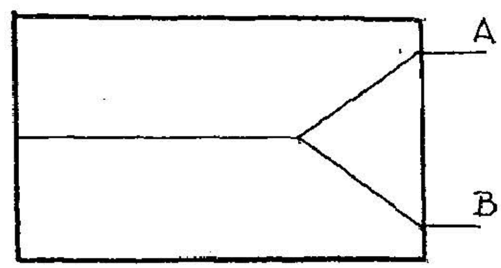
Los MAPAS DE KARNAUGH son un artificio gráfico que nos ayuda en la simplificación de un circuito. Este método es facilmente de usar debido a que la expresión que va a ser simplificada está automáticamente expandida, y los implicantes primos pueden ser identificados solo por reconocimiento visual de ciertos modelos básicos.

Por lo general se requiere de práctica antes de poder utilizar este método, particularmente cuando se trata de simplificar una ecuación con un número grande de variables.

Un mapa de " n " variables contiene 2^n cuadrados, habiendo un cuadro en el mapa para cada combinación posible de entrada. Se escribe un 1 en cada cuadro para representar una combinación de salida; se coloca un 0 en un cuadro para representar una combinación en la cual no existe salida diseñada; y un guión (-) es colocado en cada cuadro para representar una combinación opcional.

Una combinación opcional se tiene cuando se coloca un 1 en un cuadro en donde no exista asignación,de ello se tie-ne seguridad,con el objeto de formar un grupo para poder simplificar aún más la expresión booleana;como por ejemplo:

(A . B)



Del ejemplo anterior deducimos que podemos colocar un 1 en el cuadro que represente a la expresión A.B ya que te-nemos completa seguridad de que no puede existir.

Por lo general,la escritura se reduce omitiendo los ce-ros,y un espacio vacío se entiende que representa una combi-nación que no tiene salida.

REPRESENTACION DE FUNCIONES EN MAPAS.-

Un mapa está representado por cuadros los cuales van a depender del número de variables que contenga la expresión. Dada la ecuación, el número total de cuadros se puede obtener de la siguiente manera número total de cuadros es igual a 2^n en donde "n" va a ser como antes se dijo el número de variables.

A continuación se van a dar unos ejemplos de como representar funciones en mapas variando n.

Cuando se tienen dos variables ($n = 2$), el número de cuadros a utilizar será : N.C. $= 2^2 = 4$ cuadros. La figura No. I nos muestra los mapas los cuales pueden construirse de dos maneras :

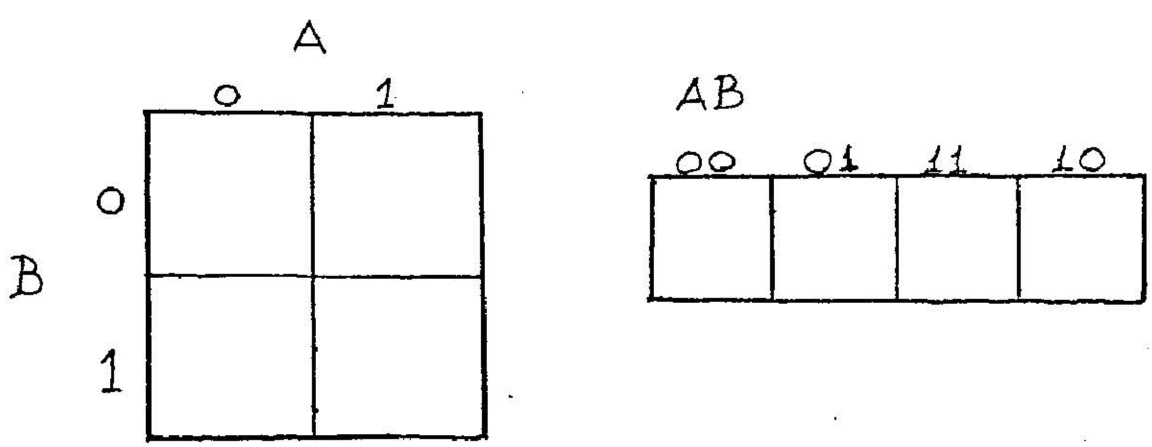


FIG. # I

Como se puede observar,de cuadro a cuadro solo existe una variación de un dígito;es decir,que entre cuadros adyacentes solo puede haber un dígito de diferencia.

Aunque por lo general los mapas de 2 variables casi nunca son usados,es decir,casi nunca se simplifican dos variables;el análisis de algunos ejemplos usando mapas de 2 variables en ambas representaciones, nos ayudarán para entender los principios fundamentales envueltos.

Si tenemos una expresión de la forma :

$F = AB + \bar{A}B + A\bar{B}$; esta se puede representar en mapas de la siguiente manera :

B \ A	0	1
0		1
1	1	1

Para el caso en que tengamos 3 variables,el número de cuadros será $2^3 = 8$ cuadros y el mapa se construye de la manera siguiente :

C \ AB	00	01	11	10
0				
1				

A continuación se muestra un estudio ó mejor dicho, la manera de como construir expresionees de 2 variables en un mapa para 3 variables.

C \ AB	00	01	11	10
0		1	1	
1		1		

$B\bar{C} + \bar{A}B$

C \ AB	00	01	11	10
0	1			1
1	1			

$\bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{C}$

C \ AB	00	01	11	10
0				
1	1		1	1

$AC + \bar{B}C$

Como se puede observar, falta una variable en cada ex--presión, pudiendo entonces, tomar el valor de 0 ó de 1. Esto está representado en los mapas.

Si tenemos una expresión completa : $F = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C}$

esta se representa en el mapa así :

C \ AB	00	01	11	10
0	1	1		
1	1			

Para un mapa de cuatro variables el númeDo de cuadros es igual a $2^4 = 16$, y lo representaremos de la siguiente manera :

dada la expresión $F = \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + A\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + ABCD$.

CD \ AB	00	01	11	10
00	1			
01				
11	1		1	
10	1			1

Para cuando se traten mapas de más de cuatro variables, existen varios caminos para dibujarlos. Cuando hay 3 ó más variables envueltas en una dimensión, las adyacencias se van a seguir conservando solo que ahora van a ser más largas y los modelos van a ser conocidos, como se muestra en el mapa de 5 variables de la Figura # X.

DE \ ABC	000	001	011	010	110	111	101	100
00								
01			1			1		
11								
10		1					1	

$BC\bar{D}E + \bar{B}CD\bar{E}$

Fig. # X.

Una aproximación más general, que puede ser extendida a cualquier número de variables, se muestra en la figura X1 para un mapa de 5 variables. Este mapa se construye usando como como artificio 2 mapas de 4 variables dibujados uno al lado de otro. Los grupos son formados como antes excepto que, los cuadrados que contienen los mismos elementos en ambos mapas se van a considerar como adyacentes.

E = 0

CD \ AB	00	01	11	10
00	1			1
01		1		
11				
10			1	1

E = 1

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01		1		
11				
10			1	1

En el diagama anterior, la entrada $\bar{A}B\bar{C}D\bar{E}$ en el mapa de la izquierda es adyacente a la entrada $\bar{A}B\bar{C}DE$ del mapa de la derecha; ambos se pueden juntar para darnos el término $\bar{A}B\bar{C}D$ el cual más adelante se explicará como se obtuvo. Lo mismo sucede con el grupo formado por los términos $ABC\bar{D}\bar{E}$ y $A\bar{B}C\bar{D}\bar{E}$ del mapa de la izquierda, y el grupo con los términos $A\bar{B}CDE$ y $A\bar{B}C\bar{D}E$ del mapa de la derecha.

A continuación se darán unos axiomas los cuales se van a representar en mapas.

1).- $A \not+ B$ está en K, si A y B están en K.

2).- $A \cdot B$ está en K, si A y B están en K.

3).- $A \not+ 0 = A$ (el cero debe interpretarse como con--junto vacío).

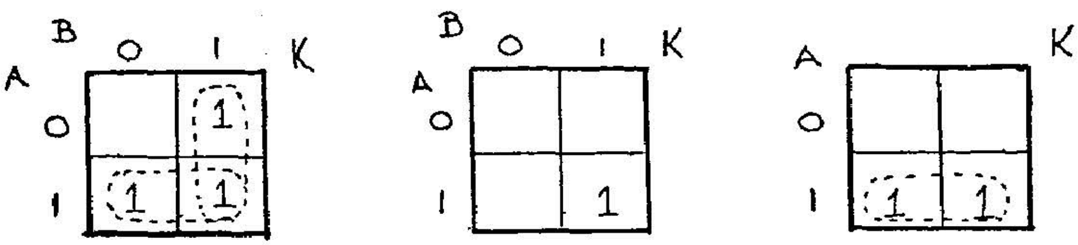
4).- $A \cdot 1 = A$

5).- $A \not+ B = B \not+ A$

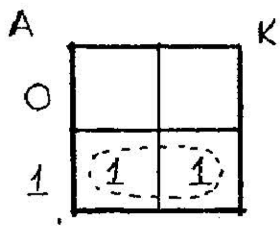
6).- $A \cdot B = B \cdot A$

7).- $A \not+ \bar{A} = 1$

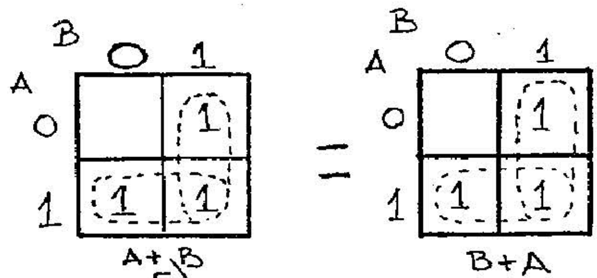
8).- $A \cdot \bar{A} = 0$



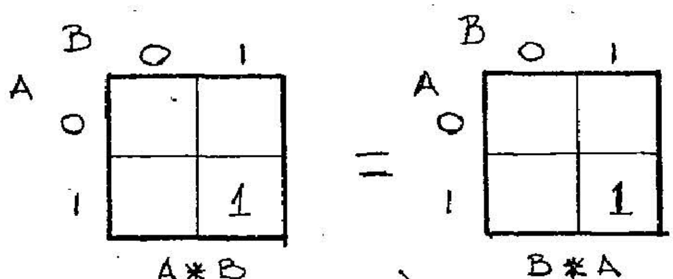
1).- 2).- 3).-



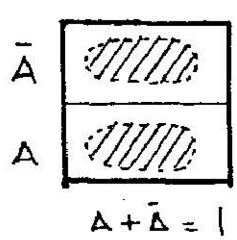
4).-



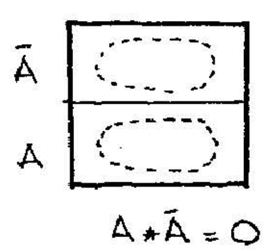
5).-



6).-



7).-



8).-

SIMPLIFICACION DE ECUACIONES POR MAPAS.-

El primer paso em la simplificación es aplicar el teorema : $AB + A\bar{B} = A$ para encontrar los términos canónicos los cuales difieren en una sola variable. La figura X11 nos muestra la manera de como vamos a movernos dentro del mapa de Karnaugh, observe q' el valor cambia exactamente en una sola variable.

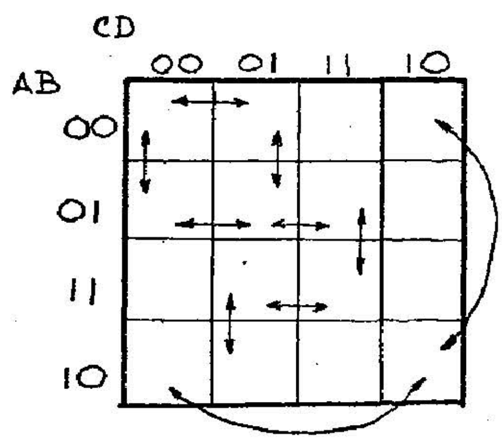


Fig. XII

Las reglas que se siguen para la simplificación son:

1).- Solo pueden simplificarse términos que esten en cuadros adyacentes.

2).- El número de cuadros del mapa debe ser una potencia de dos.

3).- Los extremos adyacentes tambien pueden simplificarse.

Son adyacentes los cuadros que difieran en un solo dí-

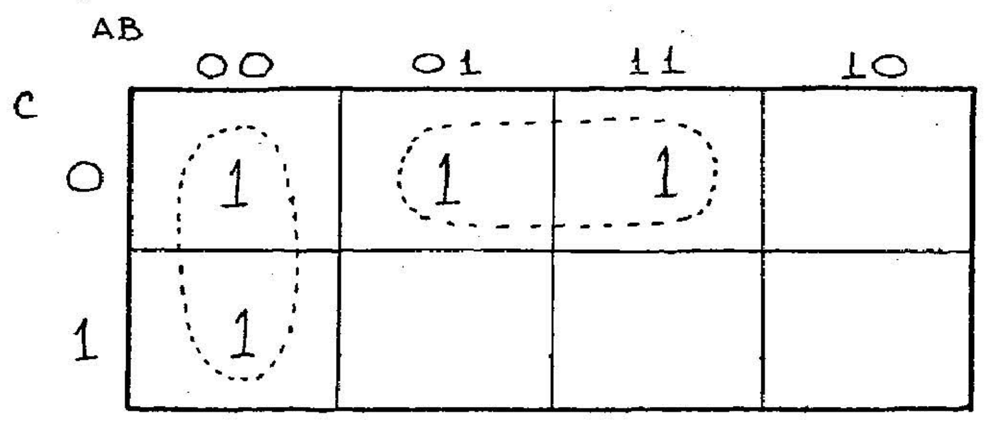
-gito.En el caso de que se trate de 5 ó más variables,son adyacentes los cuadros que ocupen la misma posición en los dos mapas.

Una buena aproximación para obtener la solución ópti-ma de un mapa es contar primero para todos los cuadros q' contengan un 1 y que puedan ser agrupados de una sola mane-ra óptima,dejando hasta el final aquellos en los cuales está involucrada más de una alternativa.Los cuadros que con-tengan un 1 y que no se combinen con ningún otro,sus entra-das deben ser contabilizadas por ellas mismas.A continua-ción se busca cualquier cuadrado que contenga un 1 y que se combine solo con otro cuadro que contenga tambien un 1; tales grupos de 2,debe tomarse en cuanta para formar otros grupos.

Cuando un cuadrado que contenga un 1 se combine exac-tamente con otros dos cuadrados,vea si hay un cuarto cua-drado que contenga un 1 que complete el grupo de 4.Si es así,las cuatro entradas deben ser tomadas como un solo gru-

-po; si no, nos queda la alternativa de cual de los dos grupos de dos escoger. Y tales desiciones deban ser dejadas hasta el final, y se vuelve a repetir todo lo anterior para el siguiente paso.

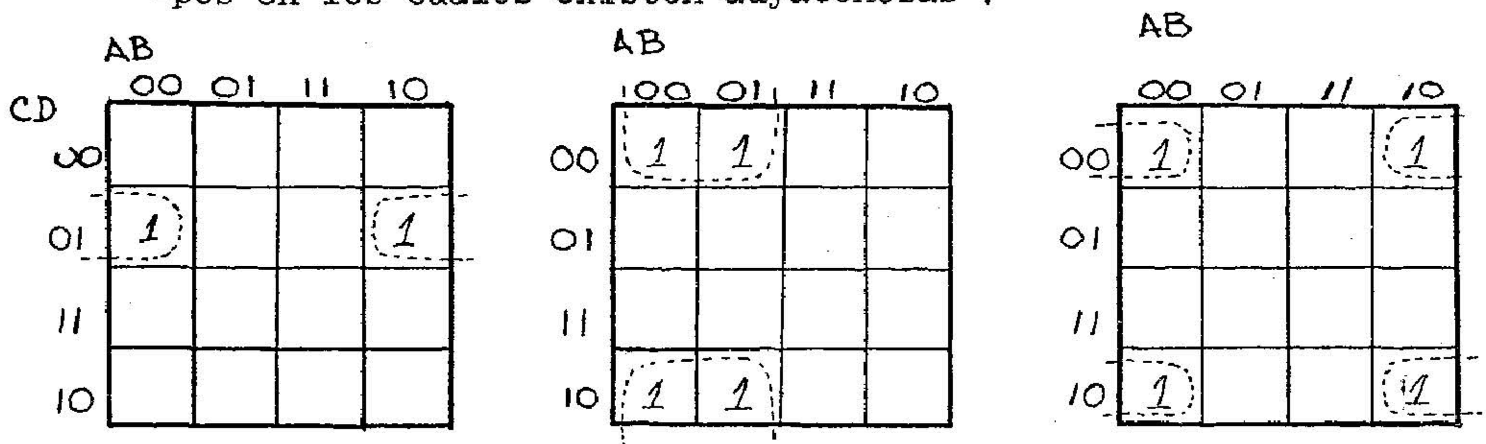
En el ejemplo dado a continuación, hay solo un camino (óptimo) para contabilizar la entrada $\bar{A}\bar{B}C$: ese camino es tener el grupo $\bar{A}\bar{B}$; y hay solo un camino óptimo para simplificar la entrada $AB\bar{C}$: formando el grupo $B\bar{C}$. Estos dos grupos incluyen todas las entradas y la solución final será $\bar{A}\bar{B}+B\bar{C}$. Observe que las entradas $\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}$ pueden combinarse cada una por dos caminos.



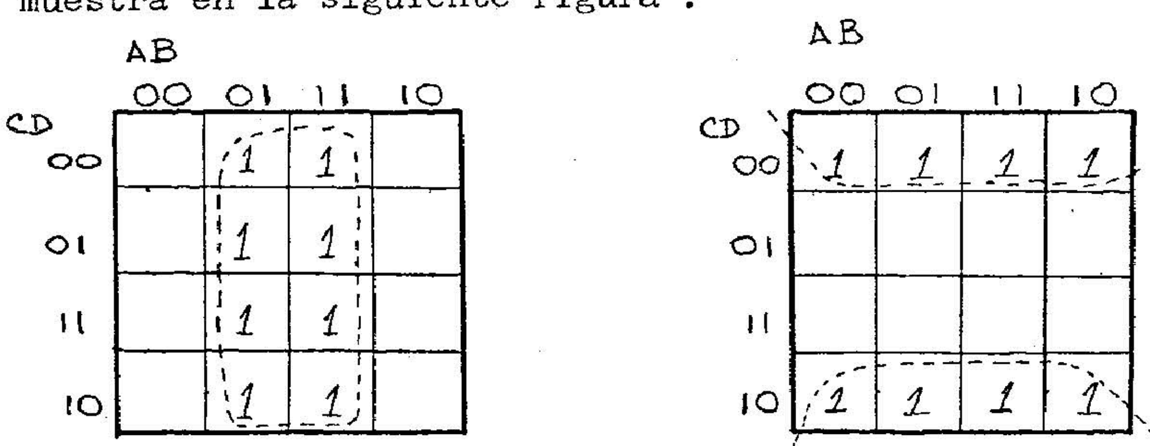
$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}B\bar{C}+AB\bar{C} = \bar{A}\bar{B}+B\bar{C}$$

En un mapa de 4 variables pueden existir adyacencias tanto en la orilla derecha como en la izquierda de dicho ma-

-pa; así como en la parte inferior y en la parte superior. La figura dada a continuación nos muestra unos ejemplos de gru-pos en los cuales existen adyacencias :

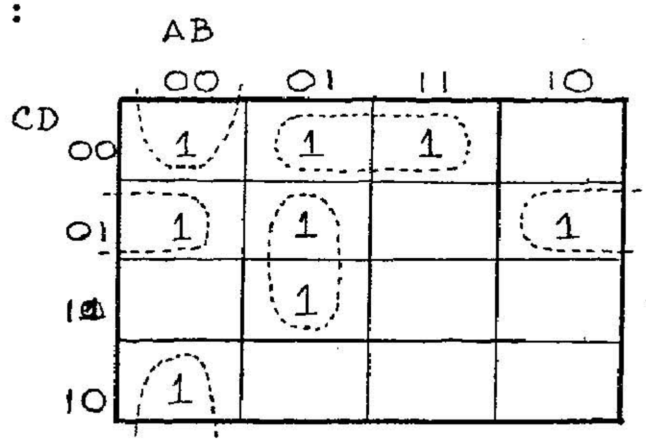


Pueden simplificarse aún grupos más grandes como se muestra en la siguiente figura :



Los grupos deben ser formados siempre lo más gran-de posible, esto es, deben de tomarse en cuenta aquellos cua-dros que nos den una mayor simplificación siempre y cuan-do nos sea conveniente. Cada grupo debe corresponder a un implicante primo, entendiendose por este aquel repre-sente una expresión que ya no pueda combinarse con ni otra expresión.

Por lo general, un grupo no debe ser hecho solo porque es grande si no nos conviene, el ejemplo siguiente ilustrará el caso :



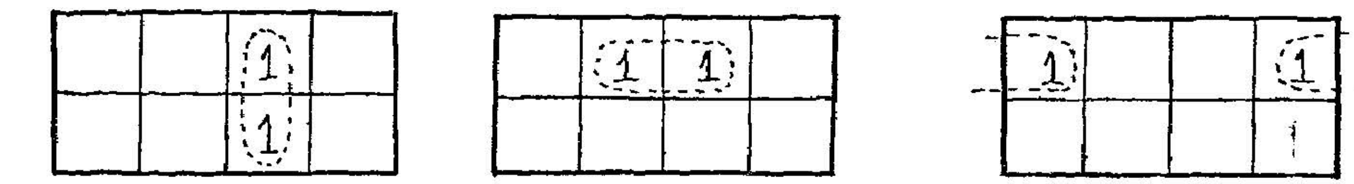
$\bar{A}\bar{B}\bar{D} + \bar{B}\bar{C}D + B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}BD$

En este ejemplo, el grupo ya simplificado $\bar{A}\bar{C}$ se ve bastante atractivo porque es el único grupo de 4 sobre el mapa. Por lo general todas las entradas en este mapa pueden com--binarse en más de un camino final y es más conveniente con--siderar primero aquellas entradas que no puedan combinarse en más de un camino. El estudio del mapa revela que cada uno de los otros cuadros (cuatro) que tienen un 1, es decir que tengan entrada,se combina con solo un cuadro que contenga un 1,cuando estos cuatro grupos de 2 han sido hechos,encontra - remos que cada cuadro en el mapa ya ha sido tomado en cuenta concluyendo que el término $\bar{A}\bar{C}$ es redundante.

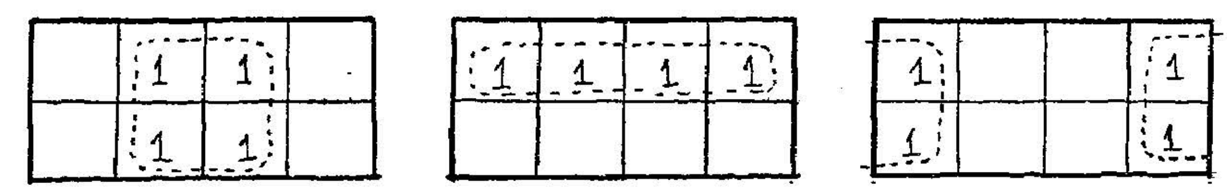
EL USO DE LAS COMBINACIONES OPCIONALES.-

La combina -- ción opcional se representa en el mapa por un guión (-) en el cuadro correspondiente a una combinación de la cual se tenga certeza de que no va a existir.Estas combinaciones pue - den ser usadas para obtener grupos más pequeños y/ó grupos más grandes de combinaciones en el mapa.En la figura XV se da un ejemplo de como utilizar esas combinaciones.Las entra- -das opcionales $\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$ y $\bar{A}B\bar{C}D$ son usadas con un 1 en los cua - -dros $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ y $\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$ para dar el grupo $\bar{A}\bar{C}$;las entradas opciona- -les $A\bar{B}CD$ y $ABC\bar{D}$ son usadas con un 1 en los cuadros ABCD y $A\bar{B}C\bar{D}$ para dar el grupo AC.La entrada opcional $AB\bar{C}\bar{D}$ no es u - -tilizada.

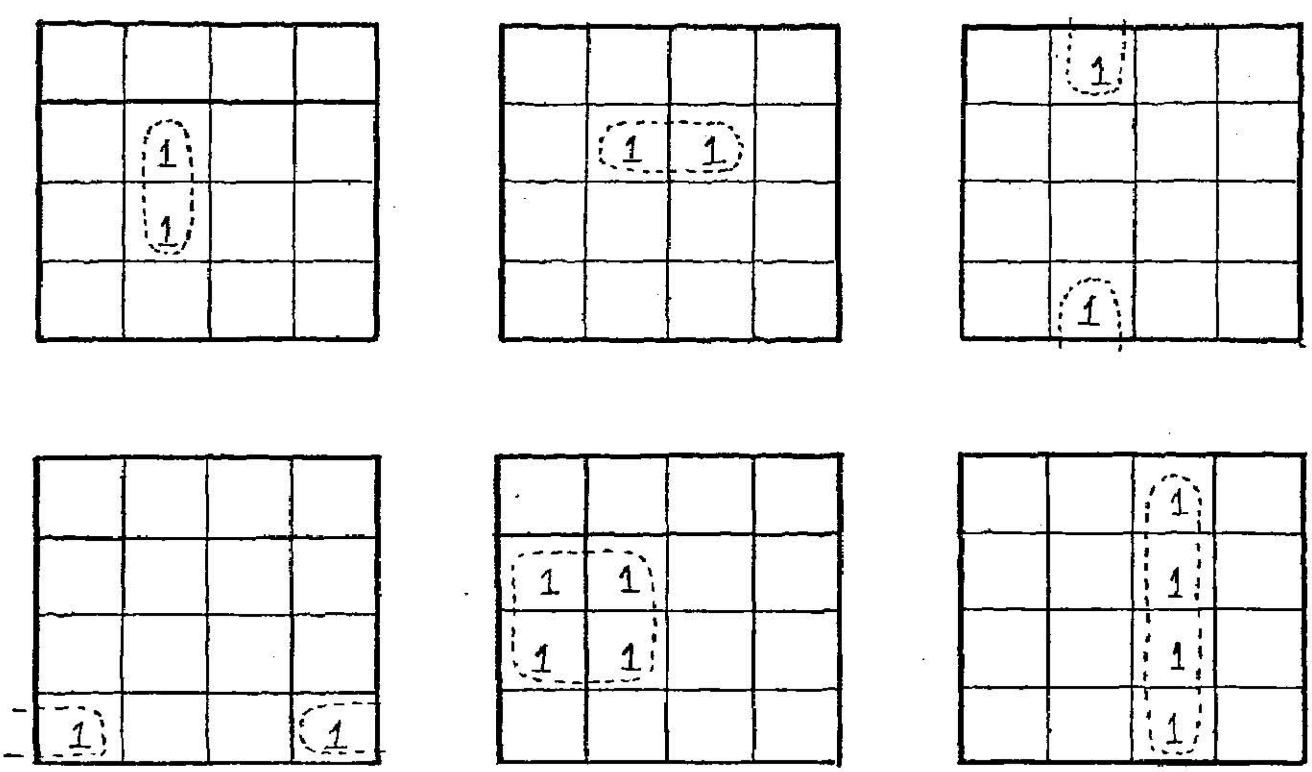
Para reconocer los implicantes primos en un mapa de Kar - -naugh,debemos primero de aprender a reconocer los modelos.Pa - -ra familiarizarnos,a continuación se mostrarán todos los mode- -los básicos para mapas de 3 variables y mapas de 4 variables.

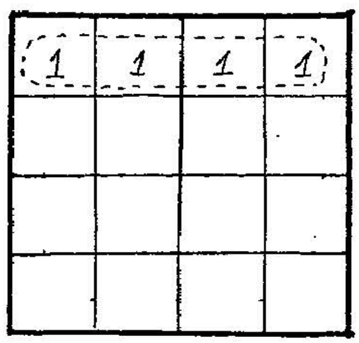


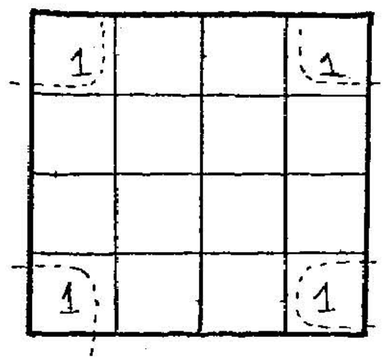
AGRUPACIONES POSIBLES DE 2.

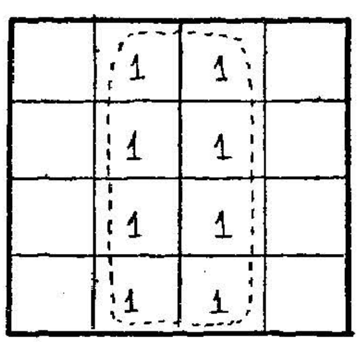


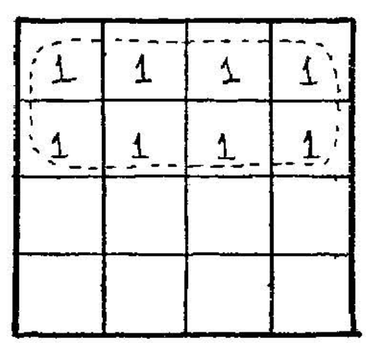
AGRUPACIONES POSIBLES DE 4.

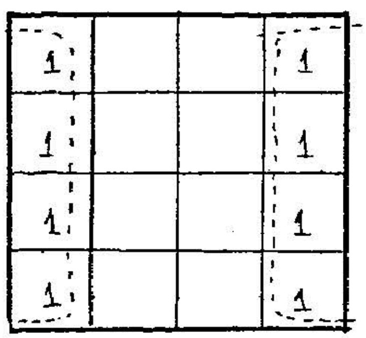


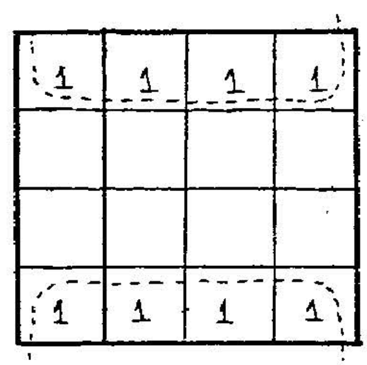












1
1
1
1

Una de las ventajas del método de mapas es que podemos agrupar los implicantes primos inmediatamente solo por inspección sin necesidad de hacer pasos intermedios.

La segunda ventaja de este método es que la redundancia de algunos implicantes primos,respecto a otros,es bastante clara.Esto es,todos los unos de los grupos redundantes son cubiertos por grupos de implicantes primos ya escogidos.

Así,la minimización por mapas de Karnaugh requiere que el diseñador reconozca los modelos de unos en el mapa;él debe escoger el menor número de grupos más grandes que cubran toda la función.

Una tercera ventaja es que nos permite escoger entre un mapa que contiene implicantes primos redundantes y un mapa que es más efectivo,esto es,nos permite ver a todos los implicantes que no vamos a necesitar en el grupo y a la vez,ver el mejor procedimiento para llegar al resultado.

En resumen,los atributos del método de mapas son :

1).- Todos los implicantes primos son inmediatamente reconocidos.

2).- La redundancia ó irredundancia de los términos es grá - -ficamente clara.

3).- Vemos los implicantes primos que no es necesario agru - -par y si hay un procedimiento más efectivo para escoger tales implicantes primos.

PROCEDIMIENTO PARA SELECCIONAR UN CONJUNTO DE IMPLICANTES PRIMOS IRREDUNDANTES._

Del mapa de Karnaugh :

1).- Todos aquellos grupos de unos que no puedan combinar- -se con cualquiera de los otros unos.

2).- Todos aquellos grupos de unos que se combinarán en un grupo de 2 pero no harán un grupo de 4.

3).- Todos aquellos grupos de unos que harán un grupo de 4 pero no un grupo de 8.

4).- Continuar de la misma manera hasta que todos los gru- -pos de unos esten cubiertos.

A continuación, se resolverá un ejemplo :

Minimizar : $f = \bar{A}D + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + B\bar{C}D + A\bar{C}D + \bar{B}D + A\bar{B}\bar{C} + ABC\bar{D}$.

Primero la función es graficada en un mapa de Karnaugh y entonces todos los grupos de unos que no hagan grupos de 2 son encerrados en un círculo (Fig. XX (a)).Ahora todos los grupos de 2 que no hagan grupos de 4 son escogidos,(b).Todos los grupos de 4 que no hagan grupos de 8 son mostrados en (c). Todos los unos han sido cubiertos de manera que tenemos la so- -lución del mapa (d).De d podemos escribir :

$$f = \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + \bar{C}D + \bar{A}D + \bar{B}D + ABC\bar{D}.$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	1	0
11	0	1	0	1
10	1	1	1	0

a

GRUPOS DE UNO.

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	1	0
11	0	1	0	1
10	1	1	1	0

b

GRUPOS DE DOS.

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	1	0
11	0	1	0	1
10	1	1	1	0

c

GRUPOS DE CUATRO

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	1	0
11	0	1	0	1
10	1	1	1	0

d

GRUPOS MÍNIMOS IRREDUNDANTES.

RESUMEN.-

Lo siguiente es un resumen de los puntos principales del método de mapeo de simplificación. Existe un cuadro en el mapa para cada combinación posible de variables. Se coloca un 1 en cada cuadro que representa una combinación para la cual se desea una salida, y un cero se coloca para representar una combinación para la cual no se desea salida.

Un guión (-) se coloca para representar una combinación opcional, cada cuadro que tenga un 1 debe ser considerado al menos una vez, pero puede considerarse tantas veces como se desee; generalmente todos los cuadros con unos deben ser contabilizados en el mínimo número de grupos.

Cada grupo debe de ser tan grande como sea posible, es ~~dee~~ decir, que cada grupo debe corresponder a un implicante primo. El número de cuadros en un grupo debe ser siempre una potencia de 2.

En un grupo de 2^m cuadros, variables nos representaran las posibles combinaciones (m variables). Si el número total de variables es n, entonces n - m variables van a ser constantes en esos 2^m cuadros y esas n - m variables definirán el grupo.Si los grupos son hechos de manera optima,la expresión leida del mapa debe ser una mínima suma de productos.Una aproximación complementaria puede ser empleada,en cuyo caso se agrupan los cuadros con ceros en lugar de unos,los grupos se complementan y una mínima suma de productos se obtiene.

La combinación opcional puede usarse para obtener más pocos grupos que a la vez van a ser más grandes.

El método de mapeo como el tabular,puede tambien ser di--rectamente adaptado a la simplificación de expresiones en la forma de productos de sumas,cada cuadro de unos representando una suma expandida y los grupos seleccionados representan el mínimo producto de sumas.

A continuación se darán ejemplos de simplificación de ecuaciones por el métodos de mapas :

$$F = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + AB\bar{C} + A\bar{B}C.$$

C \ AB	00	01	11	10
0	1	1	1	
1	1	1		1

$F = \bar{A} + \bar{C}B + \bar{B}C$ ECUACIÓN YA SIMPLIFICADA.

$$F = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + AB\bar{C}D + ABCD + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}D$$
$$+ A\bar{B}C\bar{D}.$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1			1
01	1	1	1	1
11			1	
10	1			1

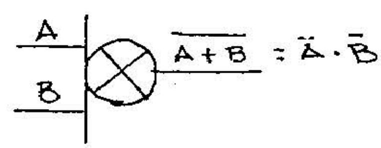
$F = \bar{C}D + \bar{B}\bar{D} + ABD + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C}$ ECUACIÓN SIMPLIFICADA

$F = \bar{B}\bar{D} + \bar{C}D + ABD$

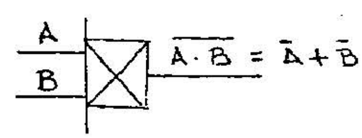
SIMPLIFICACION DE CIRCUITOS EN BASE A ELEMENTOS (NORS Y NANDS) USADOS._

Las ecuaciones pueden tambien ser simplificadas tomando en cuenta los elementos con que vamos a construir esas ecuaciones.Dicho de otra manera,una ecuación dada puede construirse utilizando elementos nors y elementos nands, y según el número de elementos que utilicemos obtendremos la manera más eficaz y económica para representar un circuito.

Un elemento NOR es aquel que está formado por un elemento OR y un NOT y se representa por :



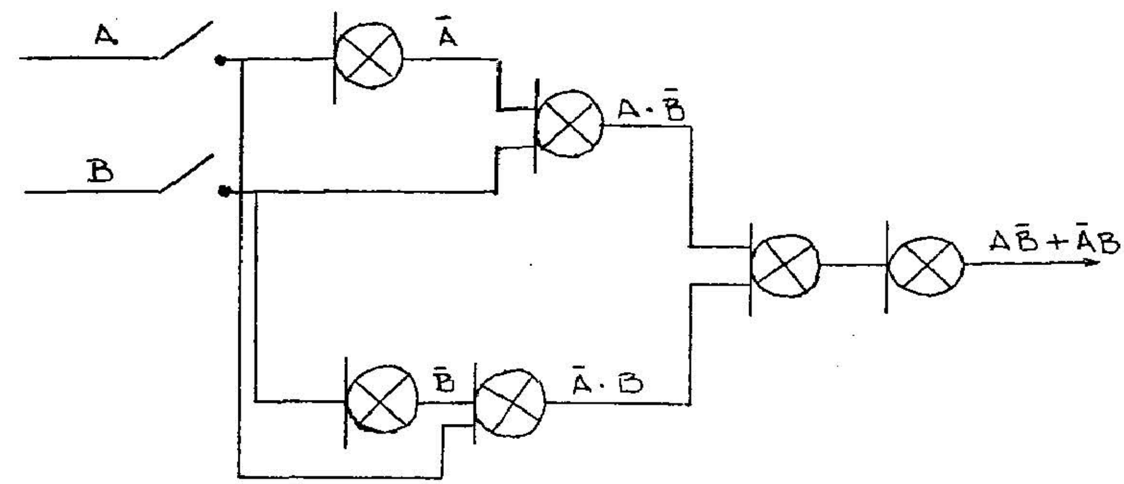
Un elemento NAND es aquel que está formado por un elemento AND y un NOT y se representa por :



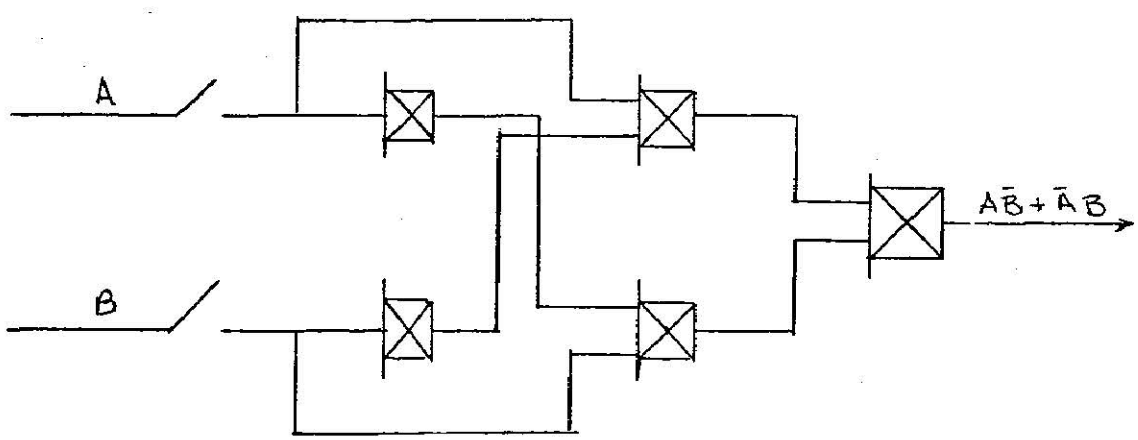
A continuación se darán ejemplos y se darán las conclusiones a las cuales se llegan.

Supongamos que tenemos la expresión $F = A\bar{B} \not+ \bar{A}B$

Construcción con NORS :



Construcción con NANDS :



Como se puede observar,para representar la función con puros NORS,fué necesario utilizar 6 de ellos;mientras que si la representamos con NANDS solo necesitaremos 5 elementos.

De lo anterior se puede deducir que nos conviene repre-sentar la función con NANDS en lugar de utilizar NORS.

BIBLIOGRAFIA.-

MARCUS MITCHELL.

SWITCHING CIRCUITS FOR ENGINEERS.

CAPITULO # 7