UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE CIENCIAS FISICO MATEMATICAS

"PROGRAMACION DINAMICA"

TEMA

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
LICENCIADO EN MATEMATICAS

PRESENTA

GLORIA SOLEDAD GARCIA QUIRINO

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L.,

JUNIO DE 1987

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE CIENCIAS FISICO MATEMATICAS

"PROGRAMACION DINAMICA"

TEMA

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
LICENCIADO EN MATEMATICAS

PRESENTA

GLORIA SOLEDAD GARCIA QUIRINO

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L.,

JUNIO DE 1987

I N D I C E

I.- INTRODUCCION

Por el año de 1950, motivados especialmente por problemas aeroespaciales, los ingenieros se interesaron en el problema de controlar un sistema, por ejemplo, el problema de que una nave alunizara suavemente y gastando un mínimo de combustible, en ese problema se tiene claro que es lo que hay que minimizar. Muchos otros - problemas se pueden plantear en forma similar al anterior, en donde se tiene ciertas restricciones dadas por un sistema de ecuaciones diferenciales y una función a optimizar.

Existen varias formas de atacar el problema, una de ellas fue desarrollada por Pontryagin, Boltyanskii y Gamkrelidzc, y a ese resultado se le llamó El Principio de Pontryagin. En este trabajo - se da un procedimiento diferente que se conoce como Programación Dinámica, el cual fue desarrollado por R. Bellman.

Al final del trabajo se dará un teorema que relaciona el Principio de Pontryagin con Programación Dinámica.

II . - P R E L I M I N A R E S

II.1 EL PROBLEMA DE MINIMIZACION EN UN ESPACIO ABSTRACTO TEORIA ELEMENTAL.

El problema de minimizar $f(x)$, donde x es real ó $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (denota una n-tupla de números reales) es estudiado en cálculo. Sin embargo, en muchos problemas de interes el domino de la función a minimizar es un subconjunto del espacio V de dimensión infinita. De esta manera se delinea la teoria elemental sobre minimización en un espacio abstracto V. Los ejemplos mas viejos en el cálculo - de un mínimo para una función cuyo dominio está en el espacio abstracto, ocurren en el cálculo de variaciones.

En cálculo consideramos el problema de minimización de una función $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Los siguientes resultados elementales son bien conocidos:

(i) CONDICION NECESARIA PARA UN MINIMO EN x^*

Suponga que $f(x^*) \leq f(x)$ para $x \in [a,b]$
entonces: (a) $f'(x^*) = 0$, $f''(x^*) \geq 0$ si $a < x^* < b$
(b) $f'(x^*) \geq 0$, si $x^* = a$
(c) $f'(x^*) \leq 0$, si $x^* = b$
a condición de que las derivadas existan.

(ii) CONDICION SUFICIENTE PARA UN MINIMO EN x^*

Suponga que las desigualdades de f y f' en (i) son estrictas, entonces, existe una vecindad N de x^* tal que $f(x^*) < f(x)$ para toda x en $N \cap [a,b]$, $x \neq x^*$.

(iii) EXISTENCIA DE UN MINIMO

Si f es continua en $[a,b]$, entonces, existe al menos un -

mínimo.

(iv) UNICIDAD DEL MINIMO

Si $f(x)$ es estrictamente convexa en $[a,b]$, entonces, el - mínimo existe y es único. Si $f''(x) > 0$ para toda $x \varepsilon [a,b]$, - entonces f es estrictamente convexa.

Def: Sea V un espacio vectorial. Un conjunto $K \subset V$ es convexo si para u_1, u_2 en K y $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$ tenemos que $(1 - \varepsilon)u_1 + \varepsilon u_2$ esta en K.

Def: Sea K un conjunto convexo. Una función de valor real J es - convexa en K, si para u_1, u_2 en K y $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$ tenemos que $J\{(1-\varepsilon)u_1 + \varepsilon u_2\} \leqq (1-\varepsilon)J(u_1) + \varepsilon J(u_2)$

La función es estrictamente convexa si esta desigualdad es estricta.

A continuación se demostrará (i) y (iv) de una manera directa a - problemas de minimización para una función definida en un espacio abstracto.

Considere el problema general de optimización: sea K un conjunto dado, sea J una función de valor real definida en K, debemos en-- contrar u^* en K tal que $J(u^*) \leqq J(u)$ para toda $u \varepsilon K$.

Dado que tenemos resultados de minimización para funciones

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$,

entonces supongamos que existe

$G: [a,b] \to K$ tal que la composición

$F: [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(\varepsilon) = (J \circ G)(\varepsilon)$ sea diferenciable.

Con esto, podemos obtener las condiciones necesarias de un míni--

mo:

CONDICION NECESARIA PARA UN MINIMO

Supongamos $u^* \varepsilon K$ y $J(u^*) \leq J(u)$ para todo u en K.
Si $G: [a,b] \to K$ tal que $G(\varepsilon^*) = u^*$, entonces

(a) $\frac{d}{d\varepsilon} J(G(\varepsilon))|_{\varepsilon = \varepsilon^*} = 0$; $\frac{d^2}{d\varepsilon^2} J(G(\varepsilon))|_{\varepsilon = \varepsilon^*} \geqslant 0$

si $a < \varepsilon^* < b$

(b) $\frac{d}{d\varepsilon} J(G(\varepsilon))|_{\varepsilon = \varepsilon^*} \geqslant 0$ si $\varepsilon^* = a$

(c) $\frac{d}{d\varepsilon} J(G(\varepsilon))|_{\varepsilon = \varepsilon^*} \leqslant 0$ si $\varepsilon^* = b$

si las derivadas indicadas existen.

Def: Sea $u \varepsilon K$ y $v \varepsilon V$ diremos que u es un punto interno de K en la dirección de v si existe un número $\varepsilon(v) > 0$ tal que $u + \varepsilon v$ esta en K para $|\varepsilon| < \varepsilon(v)$.

Def: Sea $u \varepsilon K$ y $v \varepsilon V$ diremos que u es un punto radial de K en la dirección de v si existe un número $\varepsilon(v) > 0$ tal que $u + \varepsilon v$ esta en K para $0 < \varepsilon < \varepsilon(v)$.

La función $G: [a,b] \to K$ que necesitabamos se puede definir en términos de los puntos radiales o internos de K, de tal forma que si u es un punto interno de K en la dirección de v

$$G: [-\varepsilon(v), \varepsilon(v)] \to K$$
$$\varepsilon \to u + \varepsilon v$$

Def: Sea $u \varepsilon K$ y $v \varepsilon V$

$\delta J(u;v) = \frac{d}{d\varepsilon} J(u + \varepsilon v)|_{\varepsilon = 0}$

se llama la primera variación de la función.

Def: J es Gateau-diferenciable en $u \varepsilon K$ si u es un punto interno en dirección v y $\delta J(u;v)$ existe; para cada $v \varepsilon V$.

Notación:

$$\delta^2 J(u;v) = \frac{d^2}{d\varepsilon^2} J(G(\varepsilon))\Big|_{\varepsilon = 0} \quad \text{(segunda variación)}$$

TEOREMA 1

Si J tiene un mínimo en un punto interno $u^* \in K$ en la dirección v, $\delta J(u;v)$ y $\delta^2 J(u;v)$ existen, entonces

$$\delta J(u^*;v) = 0, \quad \delta^2 J(u^*,v) \geq 0$$

Dem.

Por ser u^* punto interno de K en dirección v existe $\varepsilon(v) > 0$ tal que $u + \varepsilon v$ esta en K para toda ε en $[-\varepsilon(v),\varepsilon(v)]$; definamos

$$G: [-\varepsilon(v),\varepsilon(v)] \to K$$
$$\varepsilon \to u^* + \varepsilon v = G(\varepsilon)$$

como u^* es un mínimo de J en K se tiene que

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(G(\varepsilon))\Big|_{\varepsilon = \varepsilon^*} = 0 \text{ y } \frac{d^2}{d\varepsilon^2} J(G(\varepsilon))\Big|_{\varepsilon = \varepsilon^*} \geq 0$$

si tomamos $\varepsilon^* = 0$, entonces

(a) $\frac{d}{d\varepsilon} J(G(\varepsilon))\Big|_{\varepsilon = 0} = \frac{d}{d\varepsilon} J(u^*;v)\Big|_{\varepsilon = 0}$

ya que $\delta J(u^*;v)$ existe, $\delta J(u^*;v) = 0$.

(b) $\frac{d^2}{d\varepsilon^2} J(G(\varepsilon))\Big|_{\varepsilon = 0} = \frac{d^2}{d\varepsilon^2} J(G(\varepsilon))\Big|_{\varepsilon = 0}$

ya que $\delta^2 J(u^*;v)$ existe, $\delta^2 J(u^*;v) \geq 0$.

TEOREMA 2

Si J tiene un mínimo en K en un punto radial u^* en dirección v y $\delta J(u^*;v)$ existe, entonces $\delta J(u^*;v) \geq 0$.

Dem.

Como u^* es un punto radial en la dirección v existe $\varepsilon(v) > 0$ tal que $u^* + \varepsilon v$ esta en K para todo ε en $[0,\varepsilon(v)]$, definamos:

$$G: [0,\varepsilon(v)] \to K$$
$$\varepsilon \to u^* + \varepsilon v = G(\varepsilon)$$

ya que u^* es un mínimo de J en K se tiene que

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(G(\varepsilon))\Big|_{\varepsilon = \varepsilon^*} \geq 0 \quad \text{si } \varepsilon^* = 0$$

entonces $\frac{d}{d\varepsilon} J(G(\varepsilon))|_{\varepsilon = 0} = \frac{d}{d\varepsilon} J(u^* + \varepsilon v)$

como $\delta J(u^*;v)$ existe, por lo tanto $\delta J(u^*;v) \geq 0$.

TEOREMA 3

Sea K convexo, sea J una función convexa en K y $u^* \varepsilon K$.
Si $\delta J(u^*;v) \geq 0$ para toda v tal que $u^* + \varepsilon v$ esta en K, entonces J tiene un mínimo en K en u^*.

Dem.

Sea $u, u^* \varepsilon K$ y $0 < \varepsilon < 1$, como J es convexa en K tenemos que

$$J\{(1 - \varepsilon)u^* + \varepsilon v\} \leq (1 - \varepsilon)J(u^*) + \varepsilon J(u)$$
$$J\{(1 - \varepsilon)u^* + \varepsilon v\} - J(u^*) \leq -\varepsilon J(u^*) + \varepsilon J(u)$$
$$\frac{J\{u^* + \varepsilon(u - u^*)\} - J(u^*)}{\varepsilon} \leq -J(u^*) + J(u)$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J\{u^* + \varepsilon(u - u^*)\} - J(u^*)}{\varepsilon} \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \{J(u) - J(u^*)\}$$
$$\delta J(u, u - u^*) \leq J(u) - J(u^*)$$

tomando $v = u - u^*$ tenemos $u^* + (u - u^*) = u$, obtenemos que ----- $0 \leq J(u) - J(u^*)$, es decir, $J(u^*) \leq J(u)$ para toda $u \in K$, por lo - tanto J tiene un mínimo en $u^* \varepsilon K$.

TEOREMA 4

Si K es convexo y J estrictamente convexa en K, entonces existe a lo más un $u^* \varepsilon K$ para el cual J es un mínimo en u^*.

Dem.

Supongamos que existen u_1 y u_2 mínimos de J; $u_1 \neq u_2$, luego ------ $J(u_1) \leq J(u)$, para toda $u \varepsilon K$, y $J(u_2) \leq J(u)$ para toda $u \varepsilon K$, tomemos $u_3 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$, ya que K es convexo si consideramos $\varepsilon = \frac{1}{2}$ - entonces $(1 - \frac{1}{2})u_1 + \frac{1}{2}u_2 = -(u_1 + u_2) = u_3 \varepsilon K$

luego $J(\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2) < \frac{1}{2}J(u_1) + \frac{1}{2}J(u_2)$

$J(u_3) < \frac{1}{2}J(u_3) + \frac{1}{2}J(u_3) = J(u_3)$ es una contradicción, por lo tanto existe a lo más un mínimo de J en K.

II.2 LA ECUACION DE EULER; EXTREMALES

Se hará referencia a uno de los problemas de cálculo variacional, el cual consiste en encontrar entre las curvas $x = x(t)$ con puntos extremos dados, aquella para la cual la integral del tipo:

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),\dot{x}(t))dt$$

sea mínima, donde $\dot{x}(t)$ es la derivada $\frac{dx}{dt}$.
Para plantear este problema, consideraremos que $L(t,x(t),\dot{x}(t))$ es una función de valor real que depende de tres variables reales. - Tal función L es llamada integrando variacional. Las derivadas - parciales de L seran denotadas por L_t, L_x, $L_{\dot{x}}$, $L_{x\dot{x}}$, etc.

Def: Se dice que L es de clase C^r, si todas sus derivadas parciales de orden menor o igual que r son continuas.

Def: Una función de valor real $x(t)$ se llama seccionalmente continua en un intervalo t_0,t_1 , si $x(t)$ esta definida para - un número finito de puntos $t_1',t_2',\ldots,t_m'$ interiores al in-- tervalo $[t_0,t_1]$ y $x(t)$ tiene límites por la derecha e iz--- quierda (finitos) en cada t_i.

Def: Una función $x(t)$ es llamada seccionalmente C^1 en $[t_0,t_1]$ si $x(t)$ es continua y la derivada $\dot{x}(t)$ es seccionalmente continua en $[t_0,t_1]$.

Nota: Se supondrá que L es a lo menos de clase C^2 a menos que se indique lo contrario.

FORMULACION DEL PROBLEMA DE CALCULO DE VARIACIONES

Sea χ el espacio vectorial de funciones seccionalmente continuas en $[t_0,t_1]$. Dados x_0 y x_1 números reales. Sea $\chi_c \subset \chi$

$$\chi_c = \{x: [t_0,t_1] \to \mathbb{R} \mid x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1\}$$

El problema de cálculo de variaciones es el encontrar un x^* en el cual J tiene un mínimo en χ_c.

Sea Y el espacio vectorial de funciones seccionalmente continuas en $[t_0, t_1]$ tales que: $y(t_0) = y(t_1) = 0$.

Def: Si $y \varepsilon Y$, y es llamada variación admisible.

Tenemos que si $x \varepsilon \chi_c$ y $y \varepsilon Y$, entonces

$$(x + \varepsilon y)(t_0) = x(t_0) + \varepsilon y(t_0) = x(t_0)$$

$$(x + \varepsilon y)(t_1) = x(t_1) + \varepsilon y(t_1) = x(t_1)$$

luego $x + \varepsilon y \ \varepsilon \ \chi_c$ para toda $\varepsilon \in \mathbb{R}$. De esto x es un punto interno - de χ_c en dirección y, para cualquier $y \varepsilon Y$.

LEMA 1 (Diferenciación bajo la integral)

Dado $F(t,\varepsilon)$ y su derivada parcial $F_\varepsilon(t,\varepsilon)$ continuas en el intervalo $t' \leqq t \leqq t''$, $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ donde $\varepsilon_0 > 0$.

Entonces en el intervalo $(-\varepsilon_0 , \varepsilon_0)$

$$\frac{d}{d\varepsilon} \int_{t'}^{t''} F(t,\varepsilon)\, dt = \int_{t'}^{t''} F_\varepsilon(t,\varepsilon)\, dt$$

LEMA 2

Sea $P(t) = \int_{t_0}^{t} L_x \, d\tau$. Entonces, para todo $y \varepsilon Y$, $\delta J(x;y)$ existe y

$$\delta J(x;y) = \int_{t_0}^{t_1} (-P + L_{\dot{x}})\, \dot{y}\, dt.$$

(En este lema tomaremos $L_x = L_x(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau))$ y $L_{\dot{x}} = L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))$).

Dem.

Sea $F(t,\varepsilon) \doteq L(t, x(t) + \varepsilon y(t), \dot{x}(t) + \varepsilon \dot{y}(t))$ y $t_1', \ldots t_m'$ los pun-- tos donde $\dot{x}(t)$ ó $\dot{y}(t)$ son discontinuos, $t_0' = t_0$ y $t_{m+1}' = t_1$. Aplicando el Lema 1 en cada intervalo $[t_i', t_{i+1}']$, $i = 1, \ldots, m$; tenemos

$$
\begin{aligned}
\delta J(x;y) &= \frac{d}{d\varepsilon} \; J(x + \varepsilon y)\Big|_{\varepsilon = 0} \\
&= \frac{d}{d\varepsilon}\left[\int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t) + \varepsilon y(t), \dot{x}(t) + \varepsilon \dot{y}(t))\, dt\right]\Big|_{\varepsilon = 0} \\
&= \frac{d}{d\varepsilon}\left[\int_{t_0}^{t_1} F(t,\varepsilon)\, dt\right]\Big|_{\varepsilon = 0} \\
&= \frac{d}{d\varepsilon}\left[\int_{t_0'}^{t_1'} F(t,\varepsilon)\, dt + \ldots + \int_{t_m'}^{t_{m+1}'} F(t,\varepsilon)\, dt\right]\Big|_{\varepsilon = 0} \\
&= \left[\int_{t_0'}^{t_1'} F_\varepsilon(t,\varepsilon)\, dt + \ldots + \int_{t_m'}^{t_{m+1}'} F\,(t,\varepsilon)\, dt\right]\Big|_{\varepsilon = 0}
\end{aligned}
$$

si u es una función diferenciable de las n-variables $x, x, \ldots, x_n$ y cada una de estas varibles es a su vez función de t, además

$\frac{dx_i}{dt}$ (para cada $i = 1, \ldots, n$) existen, entonces

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{du}{dx_2}\frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{du}{dx_n}\frac{dx_n}{dt}$$

luego $L_\varepsilon = \frac{dL}{d\varepsilon} = \left(\frac{dL}{dt}\right)\left(\frac{dt}{d\varepsilon}\right) + \left(\frac{dL}{d(x+\varepsilon y)}\right)\left(\frac{d(x+\varepsilon y)}{d\varepsilon}\right) + \left(\frac{dL}{d(\dot{x}+\varepsilon\dot{y})}\right)\left(\frac{d(\dot{x}+\varepsilon\dot{y})}{d\varepsilon}\right)$

$$L_\varepsilon\big|_{\varepsilon = 0} = L_x \; y + L_{\dot{x}} \; \dot{y}$$

$$
\begin{aligned}
\delta J(x;y) &= \int_{t_0'}^{t_1'} F_\varepsilon(t,\varepsilon)\big|_{\varepsilon = 0}\, dt + \ldots + \int_{t_m'}^{t_{m+1}'} F_\varepsilon(t,\varepsilon)\big|_{\varepsilon = 0}\, dt \\
&= \int_{t_0'}^{t_1'} (L_x y + L_{\dot{x}}\dot{y})\, dt + \ldots + \int_{t_m'}^{t_{m+1}'} (L_x y + L_{\dot{x}}\dot{y})\, dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} (L_x y + L_{\dot{x}}\dot{y})\, dt = \int_{t_0}^{t_1} L_x y\, dt + \int_{t_0}^{t_1} L_{\dot{x}}\dot{y}\, dt
\end{aligned}
$$

hacemos $u = y$, $du = \dot{y}\, dt$, $dv = L_x\, dt$, $v = \int_{t_0}^{t} L_x\, dt = P(t)$

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1} L_x y\, dt &= y(t)P(t)\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} P(t)\dot{y}(t)\, dt \\
&= y(t_1)P(t_1) - y(t_0)P(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} P(t)\dot{y}(t)\, dt
\end{aligned}
$$

$$\delta J(x;y) = -\int_{t_0}^{t_1} P(t)\dot{y}(t)\,dt + \int_{t_0}^{t_1} L_{\dot{x}}\dot{y}\,dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (-P(t) - L_{\dot{x}})\,\dot{y}\,dt$$

LEMA 3

Sea $\emptyset$ seccionalmente continua sobre $[t_0,t_1]$ y

$\int_{t_0}^{t_1} \emptyset(t)z(t)\,dt = 0$, para toda z seccionalmente continua sobre - $[t_0,t_1]$, tal que $\int_{t_0}^{t_1} z(t)\,dt = 0$, entonces $\emptyset(t)$ es constante sobre $[t_0,t_1]$.

Dem.

Consideremos el promedio de $\emptyset$;

$$\overline{\emptyset} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \emptyset(t)\,dt$$

luego $\int_{t_0}^{t_1} (\emptyset(t) - \overline{\emptyset})z(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \emptyset(t)z(t)\,dt - \overline{\emptyset}\int_{t_0}^{t_1} z(t)\,dt = 0$

$$\int_{t_0}^{t_1} (\emptyset(t) - \overline{\emptyset})\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \emptyset(t)\,dt - \int_{t_0}^{t_1} \overline{\emptyset}\,dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \emptyset(t)\,dt - \overline{\emptyset}\,(t_1 - t_0)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \emptyset(t)\,dt - \int_{t_0}^{t_1} \emptyset(t)\,dt = 0$$

Siendo $(\emptyset(t) - \overline{\emptyset})$ seccionalmente continua en $[t_0,t_1]$ y

$\int_{t_0}^{t_1} (\emptyset(t) - \overline{\emptyset})\,dt = 0$; tomamos $z(t) = \emptyset(t) - \overline{\emptyset}$, entonces

$$\int_{t_0}^{t_1} z^2(t)\,dt = 0, \text{ luego } z(t) = 0$$

por lo tanto se tendría que $\emptyset(t) - \overline{\emptyset} = 0$, es decir, $\emptyset(t) = $ cte.

TEOREMA 5

Si J tiene un mínimo en $x^* \varepsilon\, \chi_C$, entonces

$$- \int_{t_0}^{t_1} L_x\, d \;+ L_{\dot{x}} = cte \;, \quad \text{en } [t_0, t_1].$$

(en este teorema usaremos la notación $L_x = L_x(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau))$ y --- $L_{\dot{x}} = L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))$)

Dem.

Por el Lema 2 $\delta J(x^*, y)$ existe para toda $y \,\varepsilon\, Y$, y

$\delta J(x^*, y) = \int_{t_0}^{t_1} (-P + L_{\dot{x}})\dot{y}\, dt$. Como J tiene un mínimo en x^* en la dirección y, por teorema 1 tenemos que:

$$\delta J(x^*, y) = 0 = \int_{t_0}^{t_1} (-P + L_{\dot{x}})\dot{y}\, dt$$

Sea $\emptyset(t) = -P + L_{\dot{x}}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))$ la cual es seccionalmente continua en $[t_0, t_1]$ ya que $\dot{x}^*(t)$ es seccionalmente continua en t_0, t_1 . Sea $z(t) = \dot{y}(t)$ siendo seccionalmente continua en $[t_0, t_1]$, se tiene que

$$\int_{t_0}^{t_1} z(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \dot{y}(t)\, dt = y(t)\Big|_{t_0}^{t_1} = y(t_1) - y(t_0) = 0$$

Por el Lema 3 $\;-P + L_x = cte$ en $[t_0, t_1]$.

Def: Toda función x^* seccionalmente continua que satisface $-P + L_x = cte$ en $[t_0, t_1]$ es llamado un extremal.

Todo mínimo es un extremal. Pero en muchos problemas extremales -- los cuales no minimizan a J, tambien ocurren.

COROLARIO 1

Cada extremal x^* satisface la ecuación diferencial $L_x = \frac{d}{dt} L_{\dot{x}}$

Dem.

Ya que x^* es un extremal satisface

$$-\int_{t_0}^{t} L_x \, d + L_{\dot{x}} = \text{cte} \quad \text{en } [t_0, t_1]$$

$$\frac{d}{dt}\left(-\int_{t_0}^{t} L_x \, d + L_{\dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}(\text{cte})$$

$$-L_x + \frac{d}{dt}(L_{\dot{x}}) = 0, \text{ por lo tanto } L_x = \frac{d}{dt}(L_{\dot{x}}) \;.$$

La ecuación $L_x = \frac{d}{dt}(L_{\dot{x}})$ es llamada la ecuación de Euler. Ambos lados evaluados en $(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))$.
Si $x^*(t)$ tiene una discontinuidad en $t = t'$, entonces esta ecuación es satisfecha para la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha ($x(t_-)$ y $x(t_+)$ respectivamente).

Def: Si $L_{\dot{x}\dot{x}} > 0$ para todo $(t, x, \dot{x})$, entonces el integrando variacional L es llamado regular.

3.- EJEMPLOS

(a) Problema:
Hallar la curva $x(t)$ seccionalmente C' en $[t_0, t_1]$ con puntos extremos $x(t_0)$ y $x(t_1)$ que minimice la longitud de arco de $(t_0, x(t_0))$ a $(t_1, x(t_1))$.
Definamos una función

$$J: \chi_C \to \mathbb{R}$$
$$x \to \text{long } x = J(x)$$

donde $\chi_C = \{ x: [t_0, t_1] \to \mathbb{R} \mid x(t) \text{ seccionalmente continua y } x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1 \}$

la función queda expresada como

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \dot{x}^2}\, dx$$

ahora se quiere encontrar $x^* \in \chi_C$ tal que $J(x^*) \leq J(x)$ para toda $x \in \chi_C$.

Consideremos $L(t,x,\dot{x}) = \sqrt{1 + \dot{x}^2}$, de la ecuación de Euler tenemos

$$L_x = \frac{d}{dt}(L_{\dot{x}})$$

como $L_x = 0$ nos queda

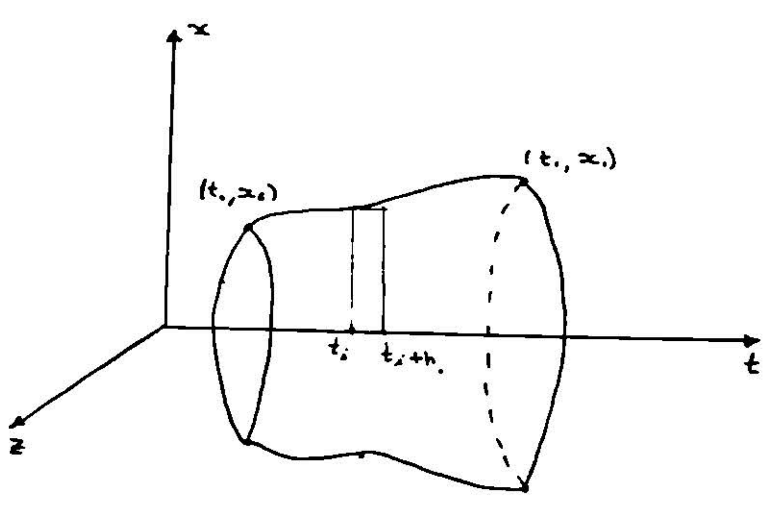
$\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} = 0$, de esto $L_{\dot{x}} = \dfrac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = K_1$

$\dot{x} = K_1 \sqrt{1 + \dot{x}^2}$, entonces $\dot{x} = K_2 (1 + \dot{x}^2)$, despejamos $\dot{x}$
$\dot{x}^2 (1 - K_2) = K_2$, es decir, $\dot{x} = K_3$, integramos con respecto a t y obtenemos que $x(t) = K_3 t + K_4$, entonces los extremales son lineas rectas.

De esto podemos concluir que la distancia mas corta en el plano euclideano de dos puntos dados es la línea recta que los une.

(b) Problema:

Hallar la curva $y = y(t)$ de clase C^2 (es decir, existe d^2y/dx^2 para toda t) para la que la superficie del sólido generado al girar la curva alrededor de eje $z = 0$, tiene el área mínima, donde los extremos de la curva son (t_0,y_0) y (t_1,y_1) con $y_0 > 0$ y $y_1 > 0$. Este problema es llamado Problema de Plateau.



Sea $J: X_c \to \mathbf{R}^+$

$x \to$ Area generada $= J(y)$

entonces $J(y) =$ Area generada $= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi y(t_i)\, \Delta s_i$

$$J(y) = \int_{t_0}^{t_1} 2\pi y(t)\sqrt{1 + \dot{y}^2}\, dt = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} y(t)\sqrt{1 + \dot{y}^2}\, dt$$

si una curva y^* minimiza a $(2\pi)^{-1}J(y)$ tambien minimiza a $J(y)$ tomemos $L(y,\dot{y}) = y\sqrt{1 + \dot{y}^2}$, derivando con respecto a $\dot{y}$ tenemos

$$L_{\dot{y}} = \frac{y\,\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}$$; derivando esto con respecto a $\dot{y}$, nos da

$$L_{\dot{y}\dot{y}} = \frac{y\sqrt{1 + \dot{y}^2} - y\dot{y}(\dot{y}/\sqrt{1 + \dot{y}^2})}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = \frac{(1 + \dot{y}^2)y - y(\dot{y}^2)}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}$$

$$L_{\dot{y}\dot{y}} = \frac{y}{(1 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

Si tomamos $y(t) > 0$, entonces $L_{\dot{y}\dot{y}} > 0$, de lo cual L es regular. Siendo L regular la ecuación de Euler es equivalente a:

$$L - \dot{y}^*L_{\dot{y}} = K, \text{ ya que } \frac{d}{dt}(L - \dot{y}^*L_{\dot{y}}) = \dot{y}^*(L_y - \frac{d}{dt}L_{\dot{y}}) = 0$$

de acuerdo con esto tenemos

$$\dot{y}^*\sqrt{1 + \dot{y}^{*2}} - \dot{y}^*\left(\frac{\dot{y}^*\, y^*}{\sqrt{1 + \dot{y}^{*2}}}\right) = K_1 \; ; \quad \frac{y^*(1 + \dot{y}^2) - y^*(\dot{y}^*)^2}{\sqrt{1 + (\dot{y}^*)^2}} = K_1$$

$$\frac{y^*}{\sqrt{1 + (\dot{y}^*)^2}} = K_1$$, elevamos al cuadrado la expresión

$(y^*)^2 = K_2(1 + (\dot{y}^*)^2)$; $(\dot{y}^*)^2 + K_3 y^* + K_4 = 0$

hacemos $\dot{y}^* = \operatorname{senh} z$, entonces $y^* = a\cosh z$

$$dt = \frac{dy^*}{\dot{y}^*} = \frac{a(\operatorname{senh} z)\, dz}{\operatorname{senh} z} = a\, dz$$

entonces $t = az + b$, de esto $z = \frac{t - b}{a}$

luego $y^*(t) = a \cosh \frac{t-b}{a}$; donde $a,b \in \mathbb{R}$.

esta ecuación es la ecuación de una catenaria, una curva plana cuya forma es la que adquiere una cuerda flexible, con densidad uniforme, sujeta en sus extremos en dos puntos distintos.

Consideremos el caso en que $(t_0, y_0) = (0,1)$, entonces

$$y^*(t) = a \cosh \frac{t-b}{a} \quad \text{y} \quad \frac{1}{a} = \cosh \frac{0-b}{a} = \cosh \frac{-b}{a}$$

definen la familia de curvas que pasan por $(0,1)$. Si fijamos los puntos y_0 y y_1 podemos encontrar la catenaria que minimiza a $J(y)$.

III.- EL PROBLEMA DE CONTROL OPTIMO

III.- INTRODUCCION

Uno de los problemas modernos que ha reavivado el interés de los matemáticos en los métodos variacionales, es el problema del control óptimo. Escencialmente, éste es el problema que encara el conductor de un vehículo. Su propósito inmediato es hacer que el vehículo se mueva en una trayectoria dada, pero en general, los controles que tiene a su disposición no afectan directamente la velocidad y la dirección del movimiento del vehículo. Por ejemplo, un volante controla la curvatura y no la dirección de la trayectoria ė incluso, entonces, la curvatura a una posición dada del volante depende de otros factores, incluyendo la velocidad hacia adelante. De modo semejante, la posición del acelerador afecta la salida de potencia del motor, en lugar de la velocidad del vehículo, pero nuevamente el efecto depende de la velocidad en curso e incluso de la temperatura del motor y muchos otros factores. Por el año de 1950, motivados especialmente por problemas aeroespaciales, los ingenieros se interesaron en el problema de controlar un sistema, es decir, una combinación de varias partes reunidas para conseguir un cierto resultado el cual estaba controlado por un sistema de ecuaciones diferenciales. En muchos de estos problemas fue natural necesitar un control del sistema a fin de que una función dada necesitaba ser minimizada. En algunos problemas aeroespaciales se pudo ahorrar bastante en el aspecto económico gracias a las mejorías de una cierta función, asi que la operación de optimizar fue muy importante. A medida que las tecnicas se fueron desarrollando tuvieron un uso práctico en la computación y en dar las herramientas necesarias para efectuar un control óptimo.

En el cálculo de variaciones clásico hay tres problemas equivalentes de optimización llamados el problema de Bolza, el problema de Lagrange y el problema de Mayer, en los cuales se minimiza una fun ción para un sistema gobernado por ecuaciones diferenciales. Hay dos diferencias entre estos problemas y el problema de control óptimo. Las ecuaciones diferenciales son de un tipo mas general que para un problema de control óptimo y en ciertas variables llamadas variables de control el valor que toman esta dentro de un conjunto cerrado, para un problema de control óptimo y para los problemas Bolza, Lagrange y Mayer las variables del problema estan en un conjunto abierto. Las condiciones necesarias para la optimalidad del problema de control óptimo fueron dadas por Pontryagin, Boltyanskii y Gramkrelidzc. Estas condiciones forman lo que llamamos "el principio de Pontryagin". Por otra parte el problema de control óptimo casi incluye a los problemas de Bolza, Lagrange y Mayer por las condiciones ya expuestas.

III.2 EJEMPLOS

a) Consideremos el problema de una nave espacial que intentará alunizar suavemente en la luna usando una mínima cantidad de combustible. Sean:

$m(t)$	la masa de la nave con cierta cantidad de combustible en el tiempo t.
$h(t)$	la altura con respecto a la luna en un tiempo t.
$v(t)$	la velocidad vertical en un tiempo t con respecto a la luna.
$u(t)$	el empuje de la nave espacial.
M	la masa de la nave sin combustible.
h_o y v_o	la altura y velocidad iniciales.
F	Cantidad inicial de combustible.
α	el máximo empuje alcanzable por los motores de la nave espacial.
g	la aceleración gravitacional de la luna. Esta aceleración puede ser considerada constante cerca de la luna.
K	una constante.

Las ecuaciones que rigen el movimiento de la nave son

$$\dot{h} = v, \quad \dot{v} = -g + u/m, \quad \dot{m} = -Ku$$

El empuje $u(t)$ de la nave espacial es lo que se puede controlar para alunizar suavemente con un gasto de combustible mínimo. -- Sea U la clase formada por las funciones de control las cuales son seccionalmente continuas y definidas en un intervalo $[t_o, t_1]$ para el cual $0 \leq u(t) \leq \alpha$. Sea $t_o = 0$ el tiempo inicial, y t_1 el tiempo al cual llega la nave a la luna. Las condiciones iniciales y finales que deben ser satisfechas son:

$$h(0) - h_o = 0, \; v(0) - v_o = 0, \; m(0) - M - F = 0$$

$$h(t_1) = 0, \qquad v(t_1) = 0.$$

El problema de alunizar suavemente usando un mínimo de combus-- tible o equivalentemente minimizar $-m(t)$ sobre la clase U.

b) El siguiente problema de optimización es llamado el problema -- del Regulador Lineal, el cual es aplicado a un largo número de problemas de ingeniería. Sea $A(t)$, $M(t)$ y D matrices nxn y $B(t)$ una matriz nxm y $N(t)$ matriz mxm de funciones continuas. Sea -- $u(t)$ una función vectorial seccionalmente continua definida en el intervalo $[t_o, t_1]$, m-dimensional. Sea $x(t)$ una función vectorial n-dimensional la cual es la solución correspondiente de

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

con condición inicial $x(t_o) = x_o$. Supongase que $M(t)$, $N(t)$ y D son simétricas, con $M(t)$, D definidas no negativas y $N(t)$ definida positiva.

Consideremos el problema de encontrar $u(t)$ tal que

$$J(x) = x(t_1)'Dx(t_1) + \int_{t_o}^{t_1} [x(t)'M(t)x(t) + u(t)'N(t)u(t)] \, dt$$

es mínima.

Def: Se dice que una matriz A es simétrica si es igual a su transpuesta, es decir,

$$A^t = A.$$

Def: Se dice que una forma cuadrática real $Q = x^t Cx$ y su matriz simetrica $C = (c_{ij})$ son definidas positivas si $Q > 0$ para todo $(x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$. Si $Q \geq 0$ para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces diremos que es definida no negativa.

c) El problema de cálculo de variaciones puede reescribirse como un problema de control óptimo. El problema con ecuaciones de movimiento:

$$\dot{x}_1 = u(t), \qquad \dot{x}_2 = L(t,\ x_1(t),\ u(t))$$

conjunto control $U = \mathbb{R}$, función a ser minimizada $x_2(b)$, y condiciones finales

$$x_1(a) = c, \quad x_2(a) = 0, \quad x_1(b) = d, \text{para } a,\ b,\ c,\ d \text{ fijos,}$$

es equivalente al problema de cálculo de variaciones de minimizar

$$J(x) = \int_a^b L(t,\ x(t),\ \dot{x}(t)) \quad dt$$

sobre la clase de curvas $x(t)$ con derivadas seccionalmente continuas, la cual satisface

$$x(a) = c, \quad x(b) = d$$

III.3 FORMULACION DEL PROBLEMA DE CONTROL OPTIMO

Para plantear el problema de control óptimo consideraremos:

Sea Z un conjunto cerrado de $\mathbb{R}^m$; t, x, u variables en $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ respectivamente.

Sean $f(t, x, u)$ y $\phi(t_o, t_1, x_o, x_1)$ funciones vectoriales,

$f: \mathbb{R}x\mathbb{R}^n x\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ y $\emptyset: \mathbb{R}x\mathbb{R}x\mathbb{R}^n x\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$,
donde f es continua y la primera derivada parcial con respecto a x es continua y $\emptyset$ es de clase C^1.
Sea U un conjunto de funciones seccionalmente continua u(t) con - valores en Z, cada función u(t) esta definida en algún intervalo - $[t_o,t_1]$, el cual puede diferir para diferentes elementos de U.

Def: Una función u(t) es U es llamada un control.

Asumiremos que el conjunto U de controles tiene las siguientes -- propiedades. Si $u(t) \varepsilon U$ definida en $t_o \leqq t \leqq t_1$ y para $i = 1,\ldots,p$ $v_i \varepsilon Z$ y $\tau_i - h_i \leqq t \leqq \tau_i$ son intervalos que no se traslapan que intersectan a $[t_o,t_1]$, entonces si

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} v_i & \text{si } \tau_i - h_i \leqq t \leqq \tau_i \\ u(t) & \text{si } t\varepsilon[t_o,t_1] \text{ y } t\notin [t_o,t_1] \cap [\tau_j - h,\tau_j] \\ & \text{para algún } j = 1,\ldots,p \end{cases}$$

entonces $\bar{u} \varepsilon U$.

Def: u(t) es un control en $[t_o,t_1]$ y x(t) es una solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(t,x(t),u(t))$ en el intervalo - $[t_o,t_1]$ con la condición inicial $x(t_o) = x_o$ será llamada -- trayectoria, correspondiente al control u(t) y la condición inicial x_o.

El valor de x(t) en el tiempo t es llamado el estado del sistema en el tiempo t. La ecuación $\dot{x} = f(t,x(t),u(t))$ es llamada la -- ecuación de movimiento del sistema.
La primera componente de $\emptyset$ evaluada en $(t_o,t_1,x(t_o),x(t_1))$ donde x(t) es la solución de la ecuación $\dot{x} = f(t,x(t),u(t))$, ------- $\emptyset_1(t_o,t_1,x(t_o),x(t_1))$ es la función a optimizar del sistema. Para indicar la dependencia de la funciones de estado $x_o = x(t_o)$ y el control u(t) se denotará la función $\emptyset_1(t_o,t_1,x(t_o),x(t_1))$ - por:

$$J(x_o,u) = \emptyset_1 (t_o,t_1,x(t_o),x(t_1)) .$$

Las siguientes k-1 componentes de $\emptyset$ se definen por medio de las - ecuaciones $\emptyset_j (t_o,t_1,x(t_o),x(t_1)) = 0$ para $j = 2,3,...,k$; condiciones finales de las trayectorias del sistema.

Def: Al par (x_o,u) de una condición inicial x_o y un control $u(t)$ será llamado factible o posible, si hay una solución $x(t)$ - de $\dot{x} = f (t,x(t),u(t))$ en $[t_o,t_1]$ con condición inicial -- $x(t_o) = x_o$ y las condiciones finales $\emptyset_j (t_o,t_1,x(t_o),x(t_1))$ igual a cero para $j = 2,3,...,k$; son satisfechas por $x(t)$.

Denotaremos por Ω la clase de pares factibles (x_o,u).
El problema de control óptimo es el encontrar en la clase Ω un elemento (x_o,u) tal que la correspondiente función a optimizar --- $\emptyset_1 (t_o,t_1,x(t_o),x(t_1))$ es minimizada. Un par (x_o,u) de Ω el cual logra este mínimo sera llamado una condición inicial óptima y un control óptimo.

Notación: $e = (t_o,t_1,x(t_o),x(t_1))$

III.4.- PROBLEMAS EQUIVALENTES

Si Z es abierto en $\mathbb{R}^m$ en lugar de ser cerrado el problema de control óptimo es un problema de optimización discutido en el cálculo de variaciones clásico llamado el problema de Mayer. Extendiendonos en esta terminología del cálculo de variaciones, podemos -- llamar al problema de control óptimo un Problema Mayer.
Sea $L (t,x,u)$ una función continua

$$L: \mathbb{R}x\mathbb{R}^n x\mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \text{ , de clase } C^1 \text{ en } (x,u).$$

Si en lugar de minimizar $J(x_o,u) = \emptyset_1(e)$, lo hacemos con - - -

$$J(x_o,u) = \int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),u(t)) \, dt$$

el problema de optimización es llamado el problema de Lagrange.

Si fuera la función

$$J(x_o,u) = \int_{t_o}^{t_1} L(t,x(t),u(t))\, dt + \phi_1(e)$$

el problema es llamado el problema de Bolza.

Los tres problemas de optimización son formulados con las respectivas funciones J ya mencionadas y son equivalentes en el sentido de que esta función J puede ser formulada en cualquiera de las formas restantes para un problema dado.

El problema de Lagrange puede ser formulado como un problema Mayer, agregando una componente mas a la ecuación diferencial $\dot{x} = f(t,x(t),u(t))$ la cual es $x_{n+1} = L(t,x(t),u(t))$ cuya condición inicial es $x_{n+1}(t_o) = 0$. Entonces la función del problema de Lagrange es dada por:

$$J(x_o,u) = \phi_1(e) = x_{n+1}(t_1) = \int_{t_o}^{t_1} L(t,x(t),u(t))\, dt$$

una función de la forma Mayer.

El problema Bolza puede ser convertido en un problema Mayer en forma similar reescribiendo

$$J(x_o,u) = \phi_1(e) + x_{n+1}(t_1).$$

Un problema Mayer puede ser convertido en un problema de Lagrange adicionando una coordenada extra y su ecuación diferencial $\dot{x}_{n+1}=0$ a $\dot{x} = f(t,x(t),u(t))$ y agregando una componente extra $\phi_{k+1}(e)$ a $\phi_2(e),\ldots,\phi_k(e)$ con $\phi_{k+1}(e)$ definida por:

$$\phi_{k+1}(e) = x_{n+1} - \frac{\phi_1(e)}{t_1-t_o}$$

Entonces $\phi_{k+1}(e) = 0$ implica

$$\int_{t_o}^{t_1} x_{n+1}(t)\, dt = \phi_1(e)$$

si hacemos $L(t,x(t),u(t)) = x_{n+1}(t)$, llegamos a que

$$J(x_o,u) = \phi_1(e) = \int_{t_o}^{t_1} L(t,x(t),u(t))\, dt.$$

III.5 EL PRINCIPIO DE PONTRYAGIN

Enunciaremos el Principio de Pontryagin cuya demostración no será dada, puesto que es larga y difícil.

TEOREMA 6

Una condición necesaria para que $(x_o^*, u^*(t))$ sea una condición óptima inicial y un control óptimo para el problema de control óptimo es la existencia de un vector k-dimensional $\lambda \neq 0$ con su primera componente $\lambda_1 \leqq 0$ y una función vectorial n-dimensional $P(t)$ -- tal que

(6.1) $\dot{P}(t)' = -P(t)' f_x(t, x^*(t), u^*(t))$

para $t \varepsilon (t_o, t_1)$ y $u \varepsilon U$

(6.2) $P(t)' [f(t, x^*(t), u(t)) - f(t, x^*(t), u^*(t))] \lneqq 0$

(6.3) $P(t_1)' = \lambda' \emptyset_{x_1}(e)$

(6.4) $P(t_o)' = -\lambda' \emptyset_{x_o}(e)$

(6.5) $P(t_1)' f(t_1, x^*(t_1), u^*(t_1)) = -\lambda' \emptyset_{t_1}(e)$

(6.6) $P(t_o)' f(t_o, x^*(t_o), u^*(t_o)) = \lambda' \emptyset_{t_o}(e)$

Si $f(t,x,u)$ tiene una derivada parcial $f_t(t,x,u)$ continua, entonces la condición

(6.7) $$P(t)' f(t, x^*(t), u^*(t)) = \lambda \emptyset_{t_o}(t_o, t_1, x^*(t_o), x^*(t_1)) + \int_{t_o}^{t} P(s)' f_t(s, x^*(s), u^*(s))\, ds$$

se cumple para toda $t \varepsilon [t_o, t_1]$.

La cantidad $H(t,x,u) = P(t)' f(t,x,u)$ es llamado Hamiltoniano.

La condición (6.2) puede ser expresada como

$$\max_{u \in U} \{ H(t,x^*(t),u(t))\} = H(t,x^*(t),u^*(t))$$

es llamado el Principio máximo de Pontryagin.
Las condiciones (6.3) a (6.6) son llamadas condiciones transversales. La ecuación (6.1) es llamada ecuación adjunta.

Las condiciones del Principio de Pontryagin son condiciones necesarias para la optimalidad, cada control óptimo debe ser un extremal. Como las condiciones no son necesariamente suficientes hay controles extremales que no son óptimo.

III.6 EXTREMALES PARA EL PROBLEMA DEL REGULADOR LINEAL

El problema del Regulador Lineal (III.2-b) esta formulado como un problema de Bolza. Podemos reducir este problema a un problema Mayer introduciendo una coordenada extra x_{n+1}, y una ecuación diferencial:

$$\dot{x}_{n+1} = L\,(t,x(t),u(t))$$

$$x_{n+1} = \int_{t_0}^{t} L(r,x(r),u(r))\; dr$$

$$= \int_{t_0}^{t} \{x(r)'M(r)x(r) + u(r)'N(r)u(r)\}\; dr$$

entonces $\emptyset_1(e) = x(t_1)'Dx(t_1) + x_{n+1}$.

Consideremos $P(t)' = (\overline{P}(t)',P_{n+1}(t))$ donde $P_{n+1}(t)$ es una función escalar y $\overline{P}(t)$ es una función vectorial n-dimensional.

$$f(t,x(t),u(t)) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_{n+1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ x(t)'M(t)x(t) + u(t)'N(t)u(t) \end{pmatrix}$$

Si x es un vector cuyo valor esta en $\mathbb{R}^n$ y A es una matriz simétrica el gradiente de la forma cuadrática x'Ax con respecto a la variable x(t) esta dado por 2x'A, entonces

$$f_{x(t)} = \begin{pmatrix} A(t) & 0 \\ 2x(t)'A(t) & 0 \end{pmatrix}$$

(a) de la condición (6.1) del Principio de Pontryagin:

$$\dot{P}(t)' = (\dot{\overline{P}}(t)';\dot{P}_{n+1}(t))$$

$$= -(\overline{P}(t)';P_{n+1}(t)) \begin{pmatrix} A(t) & 0 \\ 2x(t)'M(t) & 0 \end{pmatrix}$$

entonces: $\dot{\overline{P}}(t)' = -P(t)'A(t) - 2x(t)'M(t)P_{n+1}(t)$

$\dot{P}_{n+1}(t) = 0$

siendo $\emptyset(e) = (\emptyset_1(e), t_o, t_1, x_{o1}(t_o)-c_1, x_{o2}(t_o)-c_2, \ldots, x_{on}(t_o) -c_n, x_{n+1}(t_o))$

tenemos:

(b) de la condición (6.2) del Principio de Pontryagin

$$P(t_1)' = \lambda'\emptyset_{x_1}(e)$$

$$= (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+4}) \begin{pmatrix} 2x(t)'D & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (2\lambda_1 x(t_1)'D, \lambda_1)$$

$$\overline{P}(t_1)' = 2\lambda_1 x(t_1)D$$

$$P_{n+1}(t_1) = \lambda_1$$

(c) de la condición (6.3) del Principio de Pontryagin

$$P(t_o)' = -\lambda'\emptyset_{x_o}(e)$$

$$= (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+4}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (-\lambda_4, \ldots, -\lambda_{n+3}, -\lambda_{n+4})$$

$$\bar{P}(t_o)' = (-\lambda_4, \ldots, -\lambda_{n+3})$$

$$\dot{P}_{n+1}(t_o) = -\lambda_{n+4}$$

(d) de las condiciones (6.4) y (6.5) del Principio de Pontryagin

$$P(t_1)'f(t_1,x^*(t_1),u^*(t_1)) = H(t_1,x^*(t_1),u^*(t_1)) = -\lambda\emptyset_{t_1}(e)$$

$$P(t_o)'f(t_o,x^*(t_o),u^*(t_o)) = H(to,x^*(t_o),u^*(t_o)) = -\lambda\emptyset_{t_o}(e)$$

luego

i)

$$(\bar{P}(t_1),P_{n+1}(t_1))\begin{pmatrix} A(t_1)x(t_1) + B(t_1)u(t_1) \\ x(t_1)'M(t_1)x(t_1) + u(t_1)'N(t_1)u(t_1) \end{pmatrix}$$

$$= H(t_1,x(t_1),u(t_1))$$

$$= -(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+4})\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = -\lambda_3$$

ii)

$$(\bar{P}(t_o),P_{n+1}(t_o))\begin{pmatrix} A(t_o)x(t_o) + B(t_o)u(t_o) \\ x(t_o)'M(t_o)x(t_o) + u(t_o)'N(t_o)u(t_o) \end{pmatrix}$$

$$= H(t_o,x(t_o),u(t_o))$$

$$= (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+4})\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = \lambda_2$$

$\lambda_1 \neq 0$, puesto que si $\lambda_1 = 0$ entonces de b), $P(t_1) = 0$ y con esto de a), $P(t) = 0$; y por c) y d), $\lambda = 0$ lo cual es una contradic---ción.

Escogiendo un valor arbitrario $\lambda_1 = -1/2$, tenemos que:

$$P_{n+1}(t) = -\frac{1}{2}$$

entonces el Hamiltoniano es

$$H(t,x(t),u(t)) = P(t)'f(t,x(t),u(t)$$

$$= (\overline{P}(t)',P_{n+1}(t)) \begin{pmatrix} A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ x(t)'M(t)x(t) + u(t)'N(t)u(t) \end{pmatrix}$$

$$= \overline{P}(t)'\left[A(t)x(t)+B(t)u(t)\right] - \frac{1}{2}\left[x(t)'M(t)x(t)+u(t)'N(t)u(t)\right]$$

Ahora queremos encontrar

$$\max_{u \in U} \{ H(t,x(t),u(t))\}$$

derivamos $H(t,x(t),u(t))$ con respecto a $u(t)$ e igualamos a cero

$$0 = H_{u(t)}(t,x(t),u(t)) = \overline{P}(t)'B(t) - \frac{1}{2}\left[2u(t)'N(t)\right]$$

ya que $N(t)$ es definida positiva y simétrica existe la inversa de $N(t)$, entonces

$$N(t)u(t) = \overline{P}(t)'B(t)$$

$$u(t) = N^{-1}(t)\overline{P}(t)'B(t)$$

sustituyendo esto en $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$, tenemos

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)N^{-1}(t)\overline{P}(t)'B(t)$$

y sustituyendo $P_{n+1}(t) = -1/2$ en a), tenemos

$$\dot{\overline{P}}(t)' = -\overline{P}(t)'A(t) + x(t)'M(t)$$

Luego el problema de encontrar los extremales para el problema -- del Regulador Lineal se reduce a hallar soluciones $x(t)$, $\overline{P}(t)$ --- del sistema formado por:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)N^{-1}(t)B(t)'\overline{P}(t)$$

$$\dot{\overline{P}}(t) = -\overline{P}(t)'A(t) + x(t)'M(t)$$

sujeto a las condiciones : $x(t_o) = x_o$ y $\overline{P}(t_1) = -Dx(t_1)$

con $u(t) = N^{-1}(t)B(t)\overline{P}(t)'$.

IV . - PROGRAMACION DINAMICA

Los problemas de optimización fueron estudiados por medio de diferentes propiedades de mapeos en el espacio de controles.
El método de Programación Dinámica toma un diferente enfoque. En Programación Dinámica es considerada una familia de puntos iniciales fijos en problemas de control. El valor mínimo de la función a optimizar es considerado como una función de este punto inicial. Esta función es llamada función valor.
Una condición suficiente para optimizar puede expresarse en términos de una solución continuamente diferenciable de una ecuación - diferencial parcial de primer orden llamada ecuación diferencial parcial de Programación Dinámica.
El Problema del Regulador Lineal es resuelto por este método.

IV.1 EL PROBLEMA

Consideramos un problema similar al Problema de Control Optimo. - Ahora consideremos el tiempo inicial t_o y el estado inicial x_o fijos y las otras condiciones finales implican sólo al tiempo final t_1 y al estado final x_1. Donde esas condiciones terminales son especificadas por: $(t_1,x_1) \varepsilon M$;
M es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^{n+1}$. Llamaremos a M un conjunto - terminal.
Dados (t_o,x_o) datos iniciales.
Sea Ω_{t_o,x_o} la clase de controles seccionalmente continuo, definidos en el intervalo $[t_o,t_1]$, iniciando en el tiempo t_o fijo, el -- cual es posible para el estado x_o. $x(t)$ es la correspondiente solución de $\dot{x} = f(t,x,u)$ en $[t_o,t_1]$, con $x(t_o) = x_o$ y $(t_1,x_1) \varepsilon M$.
Tomamos una función $\phi_1(t_1,x_1))$ para el tiempo y estado terminales como la función a optimizar.
El Problema de Optimización es minimizar $\phi_1(t_1,x(t_1))$ sobre todos los controles $u(t)$ en Ω_{t_o,x_o}.

IV.2 LA FUNCION VALOR

Denotaremos el tiempo y estado inicial del Problema de Optimización por (s,y) en lugar de (t_o,x_o), el cual es considerado fijo. Sin embargo al considerar una familia de Problemas de Optimización con diferentes condiciones iniciales (s,y) podemos considerar la dependencia de los valores de esos problemas de optimización en sus condiciones iniciales.

Def: La función

$$V(s,y) = \inf_{u\varepsilon\Omega_{sy}} \phi_1(t_1,x(t_1))$$

será llamada función valor.

Nota: $V(s,y) = \infty$, si $\Omega_{sy} = \emptyset$.

El método de Programación Dinámica iniciada por R. Bellman, estudia las propiedades de la función valor. El siguiente teorema es una de ellas.

TEOREMA 7

La función valor evaluada a lo largo de cualquier trayectoria correspondiendo a un control posible para el estado inicial es una función no decreciente del tiempo.

Dem.

Sea u definida en $[t_o,t_1]$ factible para x_o y x la correspondiente solución de $\dot{x} = f(t,x(t),u(t))$. Deberemos mostrar para $t_o \leq r_1 \leq r_2 \leq t_1$, que

$$V(r_1,x(r_1)) \leq V(r_2,x(r_2))$$

para todo t perteneciente a $[t_o,t_1]$, el conjunto $\Omega_{t,x(t)}$ es no vacío, ya que u(t) restringida a $[t,t_1]$ es posible para x(t).

Sea $\bar{u}(t)$ cualquier control en $\Omega_{r_2x(r_2)}$; donde $r_2 \varepsilon [t_o,t_1]$.

Definamos el control u° en $[r_1,\bar{t}_1]$ por:

$$u°(l) = \begin{cases} u(l) & \text{si } r_1 \leqq l \leqq r_2 \\ \bar{u}(l) & \text{si } r_2 \leqq l \leqq \bar{t}_1 \end{cases}$$

entonces $u°(l) \in \Omega_{r_1 x(r_1)}$, siendo $x°(l)$ la correspondiente solu-- ción de $\dot{x} = f(l,x(l),u°(l))$.

Luego

$$V(r_1,x(r_1)) \leqq \emptyset_1(\bar{t}_1,x°(\bar{t}_1))$$

por definición de función valor.

Siendo $\bar{u}$ cualquier control en $\Omega_{r_2 x(r_2)}$, tomamos el inf sobre los controles en $\Omega_{r_2 x(r_2)}$, tenemos

$$V(r_1,x(r_1)) \leqq V(r_2,x(r_2)).$$

TEOREMA 8

La función valor evaluada a lo largo de cualquier trayectoria óptima es constante.

Dem.

Sea u^* definido en $[t_o,t_1]$ un control óptimo para el problema, comenzando desde x_o. Por el Teorema 8, $V(t,x^*(t))$ es no decreciente. De que u^* restringido a $[t,t_1]$, para $t_o \leqq t \leqq t_1$, es posible para $x^*(t)$

$$V(t,x^*(t)) \leqq \emptyset_1(t_1,x(t_1))$$

como u^* es un control óptimo para el problema con condiciones iniciales t_o, x_o; implica que:

$$V(t_o,x_o) = \emptyset_1(t_1,x^*(t_1))$$

como $V(t,x^*(t))$ es no decreciente tenemos:

$$V(t_o,x_o) \leqq V(t,x^*(t)) \leqq \emptyset_1(t_1,x^*(t_1))$$

entonces

$$V(t,x^*(t)) = \emptyset_1(t_1,x^*(t_1)), \text{ para } t_o \leqq t \leqq t_1.$$

Las propiedades de la función valor de los Teoremas 7 y 8 son condiciones necesarias para optimizar.

En el Teorema 9 veremos que esas propiedades son condiciones suficientes para optimizar.

TEOREMA 9

Sea $W(s,y)$ una función de valores reales extendidos definida en -- $\mathbb{R}^{n+1}$, tal que $W(s,y) = \emptyset_1(s,y)$ si $(s,y) \in M$. Sea t_o, x_o condiciones iniciales dadas, suponga para toda trayectoria x correspondiente de un control u en $\Omega_{t_o x_o}$, que $W(t,x(t)$ es finito y no decreciente en $[t_o, t_1]$. Si u^* es un control en $\Omega_{t_o x_o}$ tal que para la trayectoria correspondiente x^*, $W(t,x^*(t))$ es constante, entonces u^* es un control óptimo y

$$W(t_o,x_o) = V(t_o,x_o).$$

Dem.

Para cualquier control u en $\Omega_{t_o x_o}$

$$W(t_o,x_o) \leqq W(t_1,x(t_1))$$

ya que $W(s,y)$ es no decreciente y siendo x la correspondiente trayectoria de u en $\Omega_{t_o x_o}$. Luego como $(t_1,x(t_1)) \in M$, tenemos

$$W(t_1,x(t_1)) = \emptyset_1(t_1,x(t_1))$$

entonces $W(t_o,x_o) \leqq \emptyset_1(t_1,x(t_1))$

Para el control u^*

$$W(t_o,x_o) = \emptyset_1(t_1,x^*(t_1))$$

donde x^* es la trayectoria correspondiente de u^* en $\Omega_{t_o x_o}$, si tomamos el inf de $\emptyset_1(t_1,x(t_1))$ sobre todos los controles u de $\Omega_{t_o x_o}$ tenemos que

$$V(t_o,x_o) = \emptyset_1(t_1,x^*(t_1))$$

por lo tanto u^* es óptimo y

$$W(t_o,x_o) = V(t_o,x_o).$$

COROLARIO 2

Sea u^* un control óptimo en $\Omega_{t_o x_o}$ y x^* la correspondiente trayectoria de $\dot{x} = f(t,x(t),u(t))$, entonces la restricción de u^* para -- $[t,t_1]$ es un control óptimo para cada problema de control con las condiciones $(t,x^*(t))$ donde $t_o \leqq t \leqq t_1$.

Dem.

Como la función valor $V(s,y)$ satisface las condiciones del Teorema 9 para cada problema de control con condiciones iniciales $(t,x^*(t)$ donde $t_o \leqq t \leqq t_1$, entonces, u^* restringido a $[t,t_1]$, es un control óptimo para cada problema de control con condiciones iniciales -- $(t,x^*(t))$; $t_0 \leq t \leq t_1$.

Por lo anterior establecemos que una condición necesaria y sufi-- ciente para que un control u^* sea óptimo es que existe una fun--- ción $W(s,y)$ definida en $\mathbb{R}^{n+1}$, tal que $W(s,y) = \emptyset_1(s,y)$ para ----- $(s,y) \in M$, $W(s,y)$ es constante en la trayectoria correspondiente - de u^* y $W(s,y)$ es no decreciente en cualquier otra trayectoria.

Ahora falta saber que tan eficaz es comprobar si una función es - no decreciente en un conjunto de trayectorias dadas, o si puede encontrarse un método sistemático para construir funciones $W(s,y)$ los cuales serían candidatos para ser funciones valores. En los - siguientes puntos se intentará resolver esto.

IV.3 LA ECUACION DIFERENCIAL PARCIAL DE PROGRAMACION DINAMICA

Def: Sea el conjunto $Q_0 = \{(s,y) \in \mathbb{R}^{n+1} : \Omega_{sy} \neq \emptyset\}$ el cual llamamos conjunto alcanzable.

Esto es Q_0 es el conjunto de puntos (s,y) de los cuales es posi-- ble llegar al conjunto terminal M con alguna trayectoria corres-- pondiente a un control seccionalmente continuo.

Def: LLamaremos a una función $V(s,y)$ diferenciable en un punto - interior (s_0,y_0) de su dominio si existe un escalar a y un vector b, tal que

$$\lim_{(s,y) \to (s_0,y_0)} \left| \frac{V(s,y)-V(s_0,y_0)-a(s-s_0)-b'(y-y_0)}{|s-s_0| + |y-y_0|} \right| = 0$$

La diferenciabilidad de V es equivalente a la existencia de un -- plano tangente de (s_0,y_0). La composición de dos funciones dife-- renciables es diferenciable. Una condición suficiente para la di- ferenciabilidad es que V tiene derivadas parciales de primer or--

den continuas.

TEOREMA 10

Sea (s,y) un punto interior del conjunto alcanzable Q_{ϕ} , en el --- cual la función V(s,y) es diferenciable. Entonces satisface la i-- necuación diferencial parcial

$$V_s + V_y f(s,y,v) \geqq 0, \text{ para toda } v \in U.$$

Si existe un control óptimo u* en Ω_{sy}, entonces la ecuación dife rencial paracial

$$\min_{v \in U} \{V_s + V_y f(s,y,v)\} = 0 \quad - - - \; (*)$$

es satisfecha. El mínimo en (*) es obtenido por el límite por la derecha $u^*(s)^+$ del control en s.

Dem.

Ya que (s,y) es un punto interior de Q_o, si un control constante arbitrario $v \in U$ es usado sobre el intervalo $[s,s+k]$ y k es bastan te pequeño, la correspondiente trayectoria x(t) estara situado en Q_o para $s \leqq t \leqq s+k$, es decir $(t,x(t)) \in Q_o$ si $s \leqq t \leqq s+k$. Si $\bar{u}$ es - un control definído en $[s+k,t_1]$ posible para x(s+k), luego el con trol u_k definido en $[s,t_1]$ por

$$u_k(t) = \begin{cases} v & \text{si } s \leqq t \leqq s+k \\ \bar{u}(t) & \text{si } s+k \leqq t \leqq t_1 \end{cases}$$

esta en Ω_{sy}.

Sea $x_k(t)$ la correspondiente solución de $\dot{x} = f(t,x(t),u(t))$ con - condiones iniciales x(s) = y.

Denotaremos la derivada por la derecha de una función g(t) como

$$D^+g(t)$$

Ya que $u_k(t)$ es seccionalmente continuo

$$D^+x_k(t) = f(t,x_k(t),u_k(t))$$

donde $u_k(t)^+$ es el límite por la derecha de u_k en t.

Del Teorema 7 es no decreciente, asi

$$D^+V(t,x_k(t)) \geqq 0$$

para cualquier t para los cuales esta derivada existe, usando la regla de la cadena tenemos

$$D^+V(t,x_k(t)) = V_t + V_{x(t)}D^+x_k(t)$$
$$= V_t + V_{x(t)}f(t,x_k(t),u_k(t))$$

haciendo t = s tenemos:

$$V_s + V_y f(s,y,v) \geqq 0$$

Si existe un control óptimo u* en Ω_{sy}, donde x* es la trayectoria correspondiente. El Teorema 8 implica que

$$V(t,x^*(t)) = \emptyset_1(t_1,x^*(t_1)), \text{ para } s \leqq t \leqq t_1.$$

como V(s,y) es diferenciable en (s,y)

$$D^+V(s,x^*(s)) = V_s + V_y f(s,y,u^*(s)^+) = 0, \text{ por lo tanto}$$

$$\min_{v \in U} \{V_s + V_y f(s,y,v)\} = 0$$

y el límite por la derecha del control óptimo $u^*(s)^+$ alcanza el mínimo en (*).

Def: La ecuación diferencial parcial (dadas las condiciones del Teorema 10)

$$\min_{v \in U} \{V_s + V_y f(s,y,v)\} = 0$$

es llamada ecuación diferencial parcial de Programación Dinámica.

Para problemas para los cuales los controles óptimos existen el Teorema 10 asegura que la función valor deberá satisfacer la ecuación diferencial parcial de Programación Dinámica.

IV.4 EL PROBLEMA DEL REGULADOR LINEAL

El problema del Regulador Lineal fue formulado en III.2-b) y después en III.6 se redujo a un Problema de Control Optimo en forma Mayer.

Sea $\bar{y} = (y_1,\ldots,y_n,y_{n+1}) = (y,y_{n+1})$

de la formulación de este problema tenemos

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) = f(t,x(t),\upsilon(t))$$

$$\dot{x}_{n+1}(t) = x(t)'M(t)x(t) + u(t)'N(t)u(t)$$

entonces la ecuación diferencial parcial

$$\min_{v\in U} \{V_s + V_y f(s,y,v)\} = 0$$

se convierte en

$$\min_{v\in U} \{V_s + V_y[Ay + Bu] + V_{y_{n+1}}[y'M(s)y + u'N(s)u]\} = 0$$

Puesto que $x_{n+1}(t)$ representa la contribución a la función a optimizar

$$\phi_1(t_1,x(t_1)) = \int_{t_0}^{t_1}[x(t)'M(t)x(t) + u(t)'N(t)u(t)]dt + x(t_1)'Dx(t_1)$$

$$\phi_1(t_1,x(t_1)) = x_{n+1}(t_1) + x(t_1)'Dx(t_1)$$

sospechamos que la función valor es lineal en y_{n+1} y cuadrática en y. Así suponemos que la función valor tiene la forma

$$W(s,y) = y_{n+1} + y'K(s)y$$

donde K(s) es una matriz simétrica C^1 con $K(t_1) = D$, y vemos si $W(s,\bar{y})$ puede ser una solución de

$$\min_{v\in U} \{V_s + V_y[Ay + Bu] + V_{y_{n+1}}[y'M(s)y + u'N(s)u]\} = 0$$

Para la función $W(s,\bar{y}) = y_{n+1} + y'K(s)y$ tenemos que

$$W_s = y'\dot{K}(s)y \qquad W_y = y'K(s) + K(s)y$$

$$W_{y_{n+1}} = 1$$

de esto la expresión

$$(**) = V_s + V_y[Ay + Bu] + V_{y_{n+1}}[y'M(s)y + u'N(s)u]$$

se convierte en:

$$(**) = y'\dot{K}(s)y + y'A(s)'K(s)y + u'B(s)'K(s)y + y'K(s)A(s)y + y'K(s)B(s)u + y'M(s)y + u'N(s)u$$

como se pretende encontrar un control u que minimice (**), tomamos el gradiente con respecto a u de (**) e igualamos a cero, entonces nos queda

$$B(s)'K(s)y + y'K(s)B(s) + 2u'N(s) = 0$$

como $B(s)'K(s)y = y'K(s)B(s)$ y $u'N(s) = N(s)u$, entonces

$$2B(s)'K(s)y + 2N(s)u = 0$$

$$N(s)u = -B(s)'K(s)y$$

como $N(s)$ es definida positiva existe $N(s)^{-1}$. Luego multiplicamos por la derecha ambos miembros de la igualdad por $N(s)^{-1}$ y obtenemos:

$$u(t) = -N(s)^{-1}B(s)'K(s)y$$

sustituimos este valor de u en (**) y entonces el valor mínimo está dado por:

$$y'\dot{K}(s)y + y'(A(s)'K(s) + K(s)A(s))y - y'K(s)B(s)N(s)^{-1}B(s)'K(s)y + y'M(s)y$$

Una condición suficiente para que esta cantidad sea igual a cero es que $K(s)$ satisfaga la ecuación de Ricatti

$$\dot{K}(s) = -A(s)'K(s) - K(s)A(s) + K(s)B(s)N(s)^{-1}B'(s)K(s) - M(s) .$$

V. - RELACION ENTRE LA ECUACION DE PROGRAMACION DINAMICA Y EL PRINCIPIO DE PONTRYAGIN.

La ecuación diferencial parcial de Programación Dinámica es una - ecuación diferencial parcial de primer orden no lineal. Hay un método clásico en la teoría de la ecuaciones diferenciales parcia-- les para obtener soluciones de la ecuación diferencial parcial de primer orden. Es el método de "características".

El método de características consite en dos partes. La primera -- asegura que existe una solución C^2 de la ecuación diferencial parcial entonces puede ser derivada una familia de ecuaciones dife-- renciales ordinarias de curvas llamadas características.

La analogía para ecuación diferencial parcial de Programación Dinámica de el método de características es vista en el Teorema 11. Como se notara que la ecuación diferencial de las tiras caracte-- rísticas es la misma ecuación diferencial envuelta en el Princi-- pio de Pontryagin.

En el Teorema 11 se considera como una derivación del Principio - de Pontryagin por el método de Programación Dinámica. Sin embargo la doble diferenciabilidad continua asumida en el Teorema 11 para la función valor es muy restringido. Hay muchos ejemplos en el -- cual la función valor no tiene derivada continua. Este Teorema 11 es mas importante como una indicación de relación entre el Prin-- pio de Pontryagin y el método de características aplicado a la -- ecuación diferencial parcial de Programación Dinámica que como un camino derivado del Principio de Pontryagin.

<u>TEOREMA 11</u>

Sea Q un subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$. Sea (t_o,x_o) un punto interior de -- Q - M. Para el problema de optimización IV.1 con condiciones iniciales (t_o,x_o). Sea u* un control óptimo. Suponga que la trayectoria correspondiente $(t,x^*(t))$ excepto tal vez para el punto terminal (t_1,x_1) esta en el interior de Q. Supongase la función valor $V(s,y)$ definida por:

$$V(s,y) = \inf_{u\epsilon\Omega_{sy}} \phi_1(t_1,x(t_1))$$

es dos veces continuamente diferenciable en Q-M.
Se define P(t) por $P(t)' = -V_x(t,x^*(t))$; entonces P(t) satisface la ecuación diferencial

$$\dot{P}(t)' = -P(t)'f_x(t,x^*(t))$$

y la condición

$$\max_{v\epsilon U} \{P(t)'f(t,x^*(t),v)\} = P(t)'f(t,x^*(t),u^*(t))$$

es válido para cada $t \epsilon (t_o,t_1)$.
Dem.
Consideremos la curva $(t,x^*(t))$ donde

$$\dot{x}^* = f(t,x^*(t),u^*(t))$$

y también consideremos el vector V_y a lo largo de la curva ------- $(t,x^*(t))$. Sea t un punto de continuidad de u^*, entonces tenemos

(a) ... $\dot{V}_y(t,t,x^*(t)) = V_{sy}(t,x^*(t)) + V_{yy}(t,x^*(t))f(t,x^*(t),u^*(t))$

ahora del Teorema 10

$$V_s(s,y) + V_y(s,y)f(s,y,u) \geq 0$$

para todo (s,y) y $u\epsilon U$, en particular esto se cumple sí remplaza--mos (s,u) por $(t,u^*(t))$. Si además remplazamos y por $x^*(t)$, por el Teorema 10 tenemos

(b) ... $V_s(t,y) + V_y(t,x^*(t))f(t,x^*(t),u^*(t)) = 0$

Así $x^*(t)$ minimiza la expresión

$$V_s(t,y) + V_y(t,y)f(t,y,u^*(t))$$

esta es una función diferenciable de y, así la derivada parcial -- con respecto a y debera ser igual a cero en $y = x^*(t)$. Fijando esa derivada parcial igual a cero y usando que el orden de la deriva-- ción parcial puede ser cambiado, nos da

$$V_{sy}(t,x^*(t)) + V_{yy}(t,x^*(t))f(t,x^*(t),u^*(t)) + V_y(t,x^*(t))f_x(t,x^*(t),u^*(t)) = 0$$

esto combinado con (a), queda

$$\dot{V}_y(t,x^*(t)) = -V_y(t,x^*(t))f_x(t,x^*(t),u^*(t))$$

de la definición de P(t) la expresión anterior es

$$\dot{P}(t)' = -P(t)'f_x(t,x^*(t,x^*(t),u^*(t))$$

Luego del Teorema 10

$$\min_{v \in U}\{V_s(t,x^*(t)) + V_y(t,x^*(t))f(t,x^*(t),v)\} = 0$$

$$V_s(t,x^*(t)) + \min_{v \in U}\{V_y(t,x^*(t))f(t,x^*(t),v)\} = 0$$

de (b) se sigue

$$\begin{aligned} V_s(t,x^*(t)) &= -V_y(t,x^*(t))f(t,x^*(t),u^*(t)) \\ &= P(t)f(t,x^*(t),u^*(t)) \end{aligned}$$

entonces

$$-\min_{v \in U}\{V_y(t,x^*(t))f(t,x^*(t),v)\} = P(t)f(t,x^*(t),u^*(t))$$

$$\max_{v \in U}\{-V_y(t,x^*(t))f(t,x^*(t),v)\} = P(t)f(t,x^*(t),u^*(t))$$

$$\max_{v \in U}\{P(t)f(t,x^*(t),v)\} = P(t)f(t,x^*(t),u^*(t)).$$

B I B L I O G R A F I A

W. H. FLEMING Y RAYMOND W. RISHEL,
Deterministic and Stochastic Optimal Control

J. CRAGGS,
Cálculo Variacional

W. H. FLEMING,
Funciones de Varias Variables